



SIS

Scuola Interdipartimentale
delle Scienze, dell'Ingegneria
e della Salute



Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS (12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4

stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano

tel.: 081 547 6545

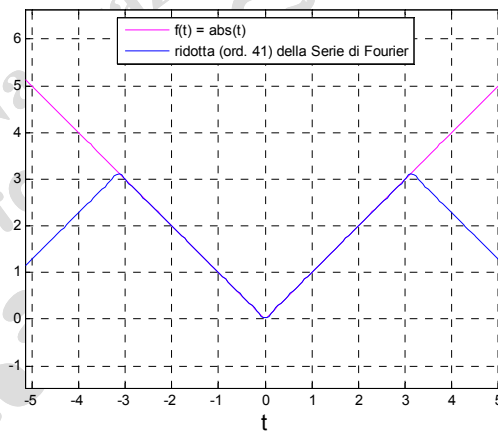
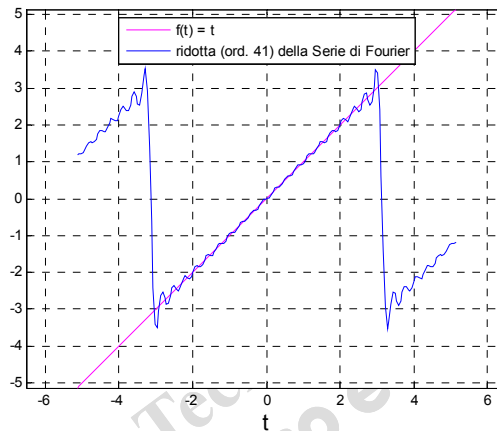
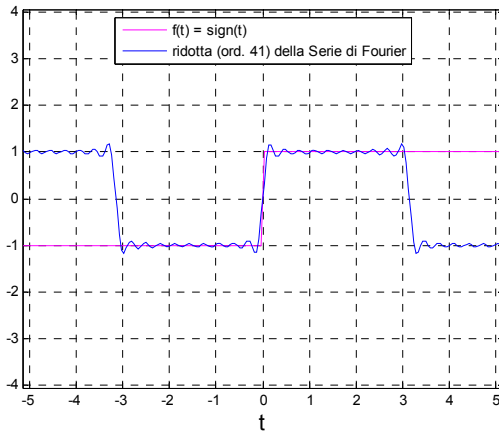
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_13a

Argomenti trattati

- **Trasformata di Fourier (FT).**
- **Esempi.**
- **FT della comb function.**
- **Superposizione di funzioni.**
- **Proprietà della FT.**

Trasformata di Fourier (FT)



Se la *Serie di Fourier* converge a f in un intervallo $[a,b]$, al di fuori di $[a,b]$ la *Serie di Fourier* converge a f solo se anche f è periodica di periodo $b-a$. La *Trasformata di Fourier* nasce dall'esigenza di approssimare funzioni non periodiche su tutto \mathbb{R} .

DEF

La *Trasformata di Fourier* $F(\omega)$ di $f(t)$ è

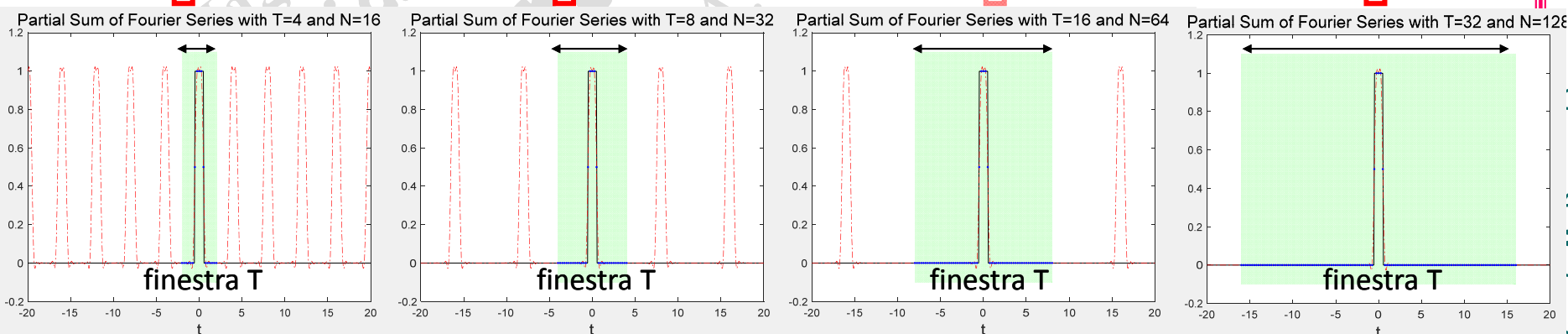
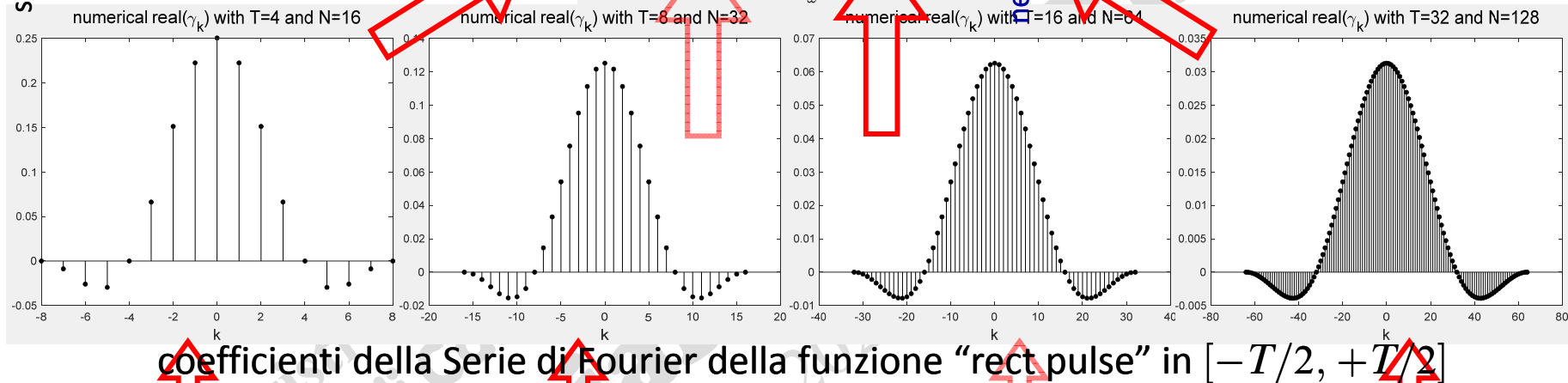
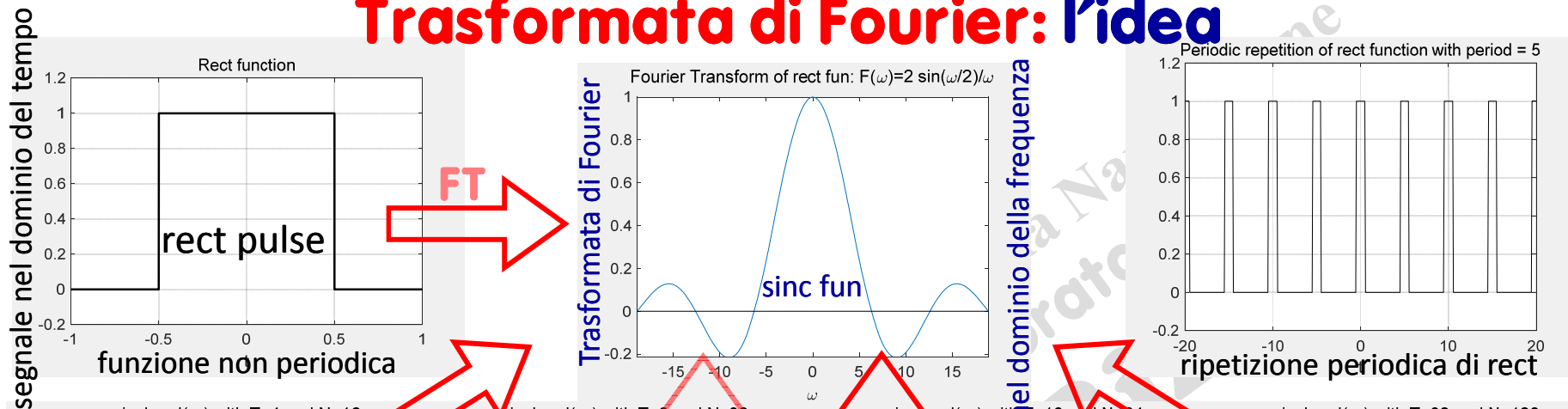
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$F(\omega)$ è funzione a valori complessi ma di argomento reale ω

quando l'integrale esiste (cioè, esso è $< \infty$).

La **sommabilità** di f [$f \in L^1(-\infty, +\infty)$] rappresenta una **condizione sufficiente**, ma non necessaria per l'esistenza della FT.

Trasformata di Fourier: l'idea



All'aumentare della finestra, nei coefficienti di Fourier di "rect pulse" le frequenze componenti il segnale diventano sempre più fitte (più vicine), e sembra che i coefficienti descrivano la curva della funzione FT.

Teorema

Se $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ e soddisfa le **condizioni di Dirichlet**, allora valgono le seguenti formule

Trasformata di Fourier continua (FT)

funzione a valori complessi di argomento reale

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Trasformata di Fourier Inversa (IFT)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

frequenza angolare ω

frequenza circolare ν

$$\omega = 2\pi\nu$$

caso discreto
e finito

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

riassunto

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Trasformata di Fourier Discreta Inversa (IDFT)

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{+i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad j = 0, \dots, N-1$$

caso discreto
e infinito

Coefficienti della Serie di Fourier in $[-\pi, +\pi]$

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty$$

Serie di Fourier (FS)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{+ikx}$$

caso continuo

Trasformata di Fourier (FT)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Trasformata di Fourier Inversa (IFT)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

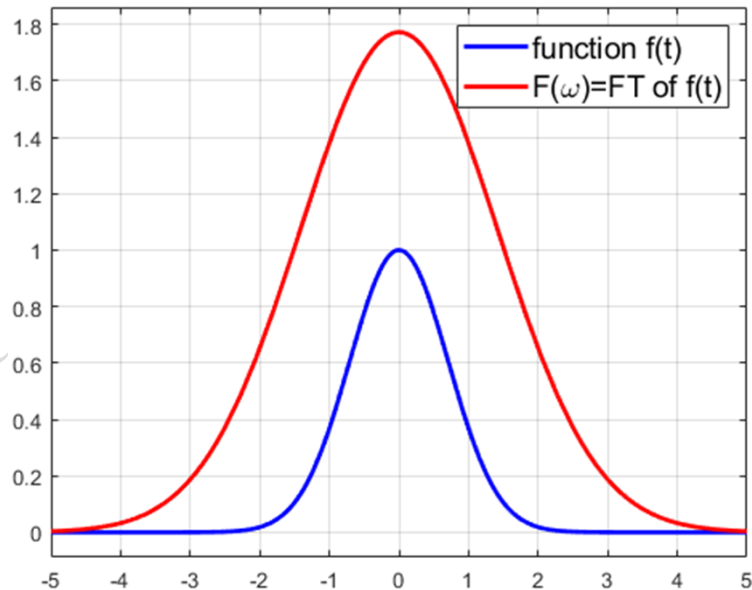
Il **Symbolic Math Toolbox** di MATLAB fornisce le funzioni **fourier(...)** e **ifourier(...)** per l'espressione simbolica della FT e della IFT rispettivamente.

gaussiana

```
syms t real
ft=exp(-t^2); Fw=fourier(ft)
Fw =
pi^(1/2)/exp(w^2/4)
```

```
syms t real; ft=exp(-t^2);
Fw=fourier(ft); Ifw=ifourier(Fw)
IFw =
1/exp(x^2)
```

sia la FT che la IFT sono gaussiane



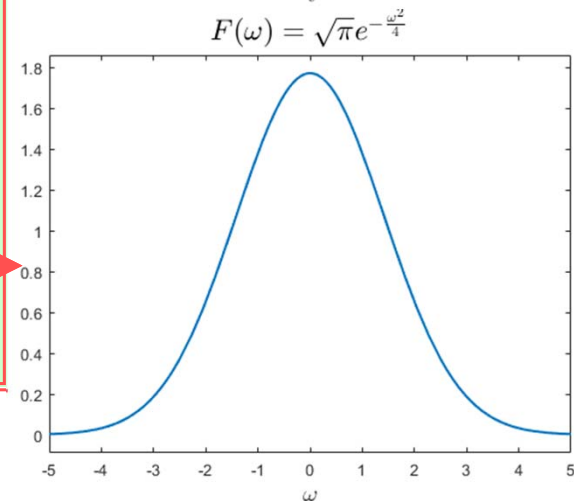
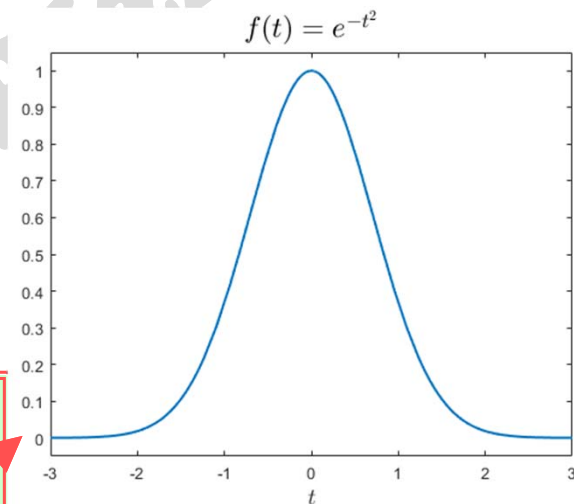
```
fplot(ft,[-5 5],'Color','b','LineWidth',2)
grid on; hold on
fplot(Fw,[-5 5],'Color','r','LineWidth',2)
legend('function f(t)', ...
       'F(\omega)=FT of f(t)','FontSize',14)
```

Esempi di Trasformate di Fourier

“La Trasformata di Fourier di una Gaussiana è ancora una gaussiana”

$$f(t) = e^{-|a|t^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{-\frac{\omega^2}{4|a|}}$$

```
syms t real; syms a positive
ft=exp(-a*t^2); % gaussiana f(t)
fourier(ft) % FT di f(t)
ans =
(pi^(1/2)*exp(-w^2/(4*a)))/a^(1/2)
ft1=subs(ft,a,1); fplot(ft1,[-5 5])
title('$f(t)=e^{-t^2}$','FontWeight','normal','FontSize',18,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('$t$','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX')
fplot(fourier(ft1),[-5 5])
title('$F(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$','FontWeight','normal','FontSize',18,...
'Interpreter','LaTeX')
xlabel('$\omega$','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX')
```



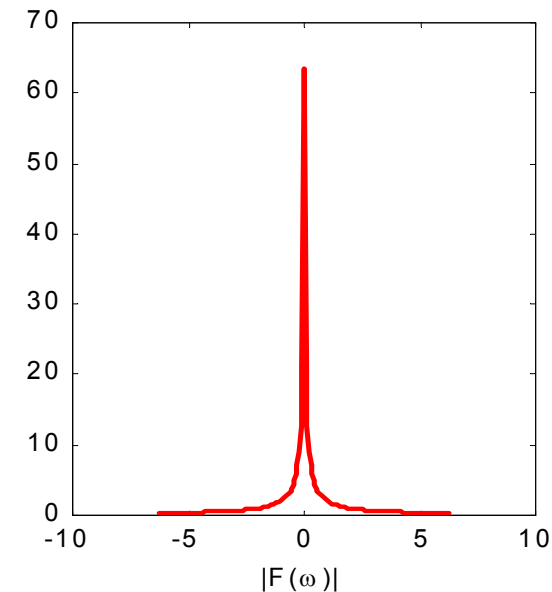
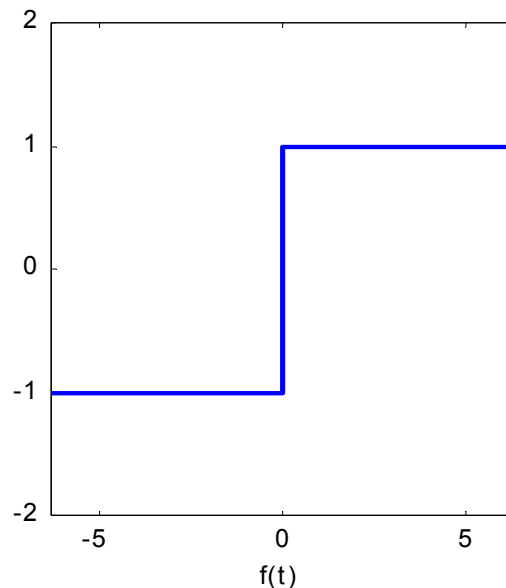
Esempi di Trasformate di Fourier (funzione dispari)

$$f(t) = \text{signum}$$

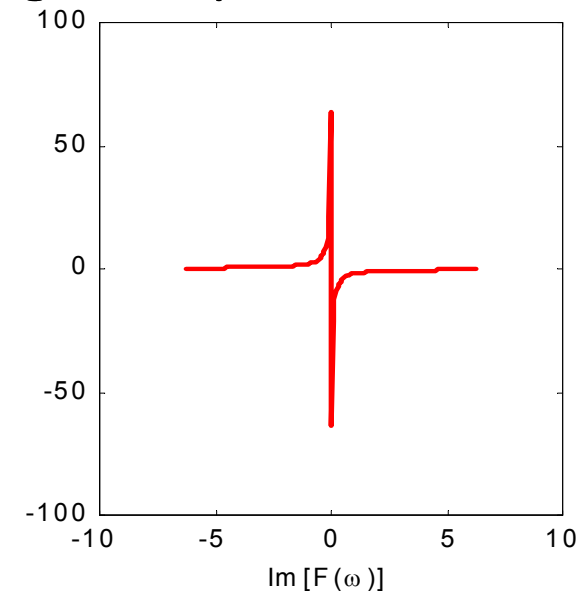
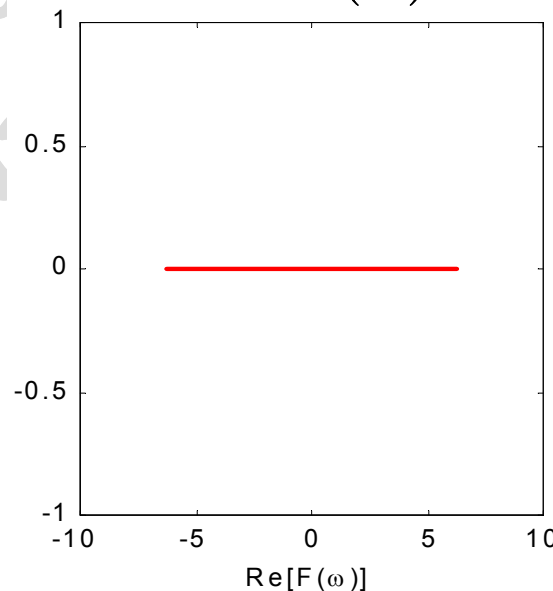
$$f(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

```
syms t real
ft=sign(t);
Fw=fourier(ft)
Fw =
-2i/w
```

```
sym(2/i)
ans =
-2i
```



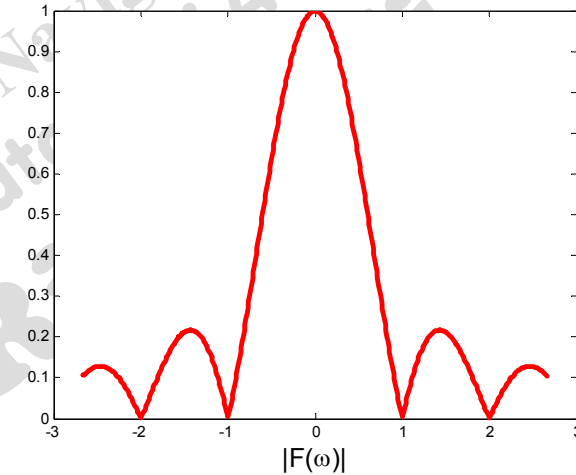
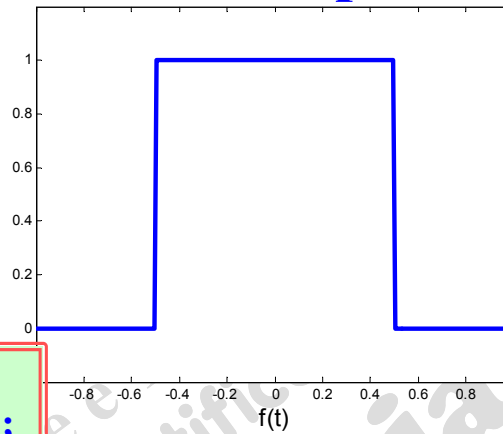
$F(\omega)$ è immaginaria pura



Esempi di Trasformate di Fourier (funzione pari)

$f(t)$ = funzione rettangolare (o rect pulse)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{L}{2} \\ 0 & |t| > \frac{L}{2} \end{cases} \quad L=1$$



MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms L positive; syms t real
ft=rectangularPulse(-L/2,+L/2,t);
Fw=simplify(fourier(ft))
```

```
Fw = (2*sin((L*w)/2))/w
syms L positive; syms t real; ft=heaviside(t+L/2)-heaviside(t-L/2);
```

cos'è heaviside(x)?

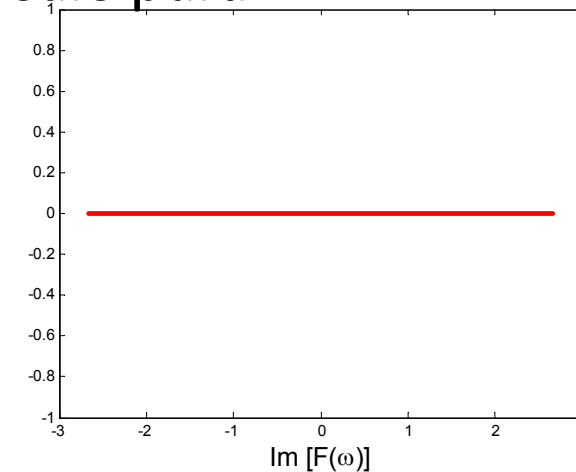
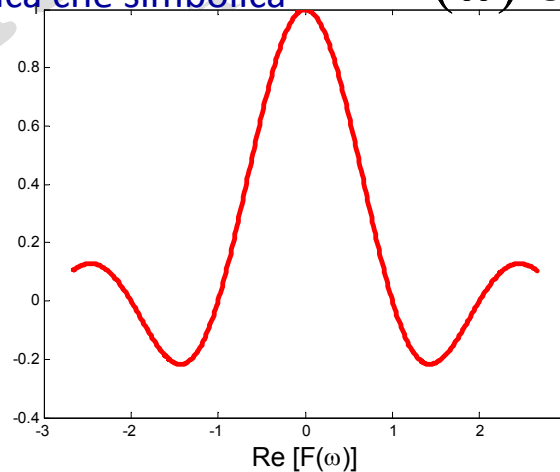
`rectpuls(t)` in MATLAB Signal Toolbox (solo numerica)

`sinc(v)` seno cardinale o funzione sinc
`sinc()` è sia numerica che simbolica

$F(\omega)$ è reale pura

$$F(\omega) = \frac{2 \sin \frac{\omega}{2}}{\omega}$$

$$F(\nu) = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}$$



cos'è heaviside(x)?

funzione Heaviside

o

funzione unit step

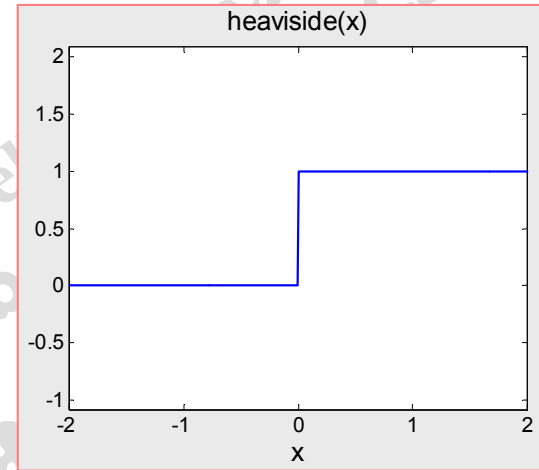
o funzione a gradino

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La delta δ di Dirac è la derivata della funzione heaviside

```
syms x real
diff heaviside(x)
ans =
dirac(x)
```

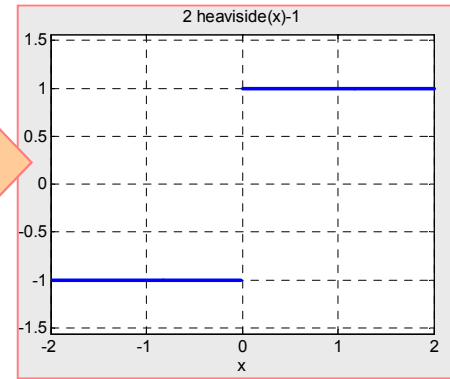
```
syms x real
ezplot heaviside(x), [-2 2]
```



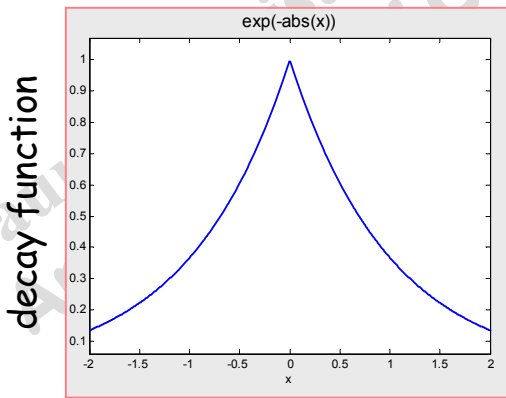
heaviside: a cosa serve?

prima di MATLAB R2014a

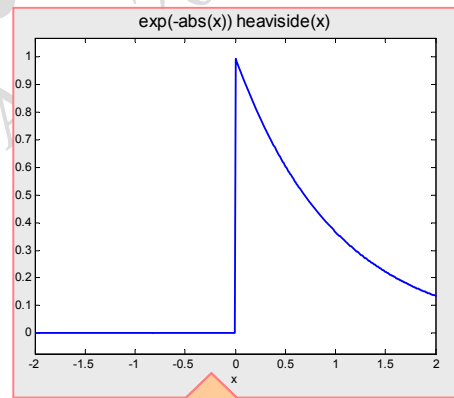
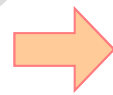
```
syms x real
signum=2*heaviside(x)-1;
ezplot(signum, [-2 2])
```



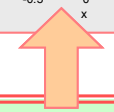
funzione **sign()**



decay function



decay pulse



```
syms x real; decayP=exp(-abs(x))*heaviside(x); ezplot(decayP, [-2 2])
```

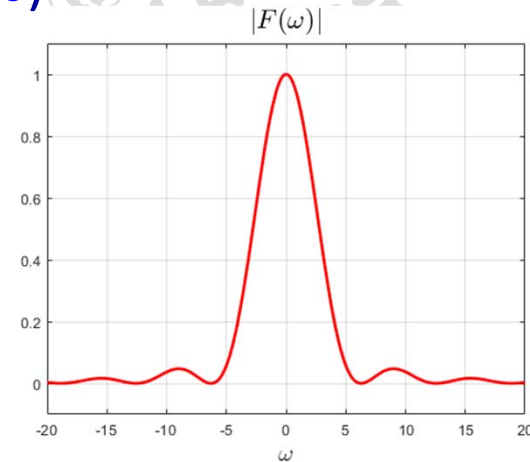
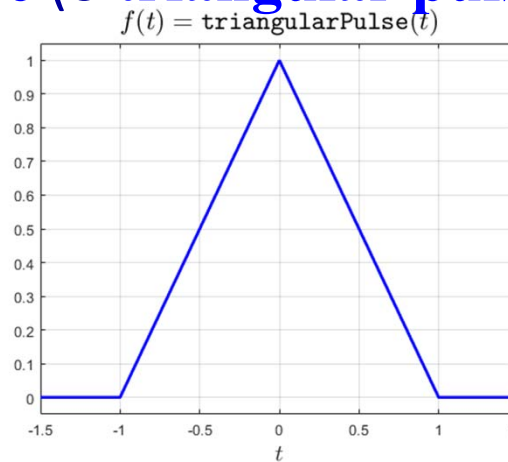
Esempi di Trasformate di Fourier (funzione pari)

$f(t)$ = funzione triangolare (o triangular pulse)

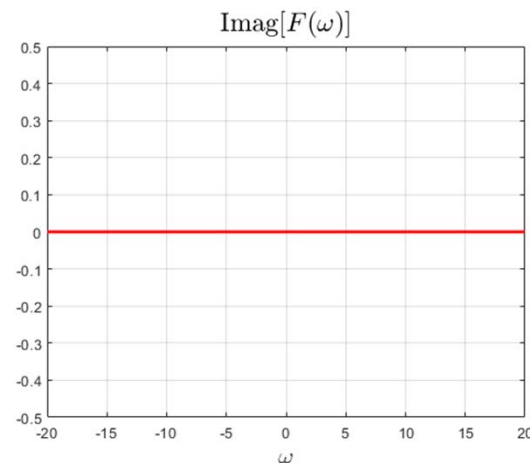
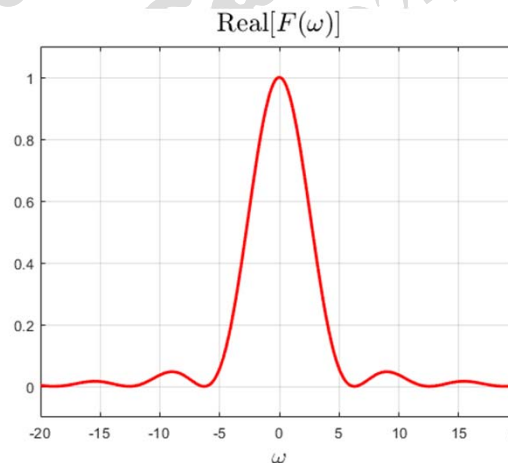
$$f(t) = \begin{cases} 1+t & t \in [-L, 0] \\ 1-t & t \in [0, L] \\ 0 & |t| > L \end{cases} \quad L=1$$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms t real
ft=triangularPulse(t);
Fw=simplify(fourier(ft),100)
Fw =
-(2*(cos(w) - 1))/w^2
syms v w
Fv=simplify(subs(Fw,w,2*pi*v),100)
Fv =
sin(pi*v)^2/(v^2*pi^2)
```



$F(\omega)$ è reale pura



$$F(\omega) = 2 \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2}$$

$$F(v) = \left(\frac{\sin \pi v}{\pi v} \right)^2 \leftarrow \boxed{\text{sinc}(v)^2}$$

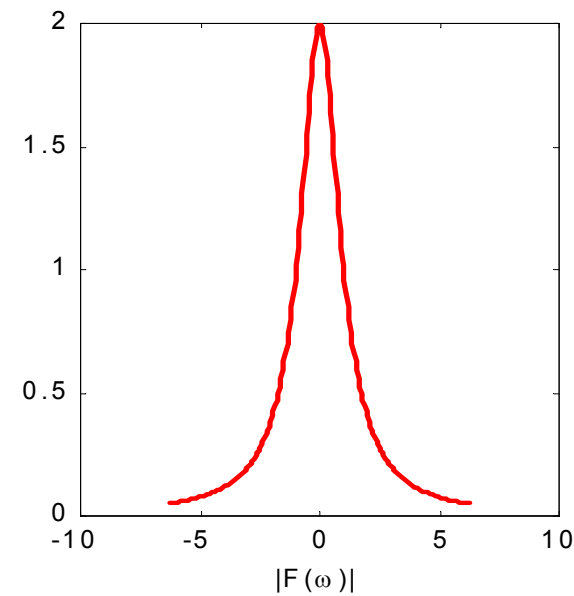
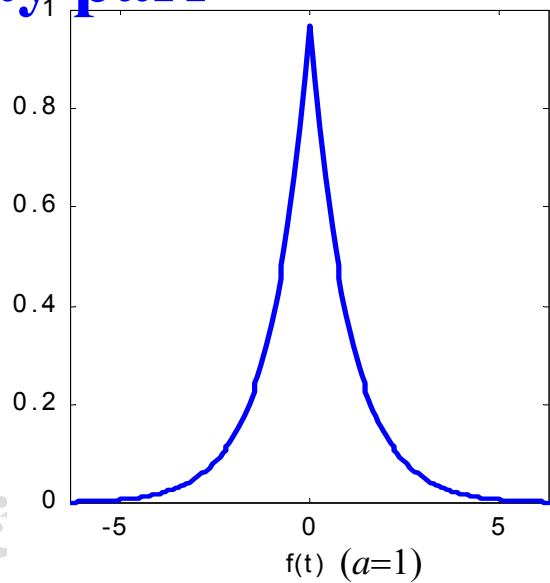
seno cardinale o funzione sinc
MATLAB sinc() è sia numerica che simbolica

Esempi di Trasformate di Fourier (funzione pari)

$f(t) =$ funzione decay pari

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

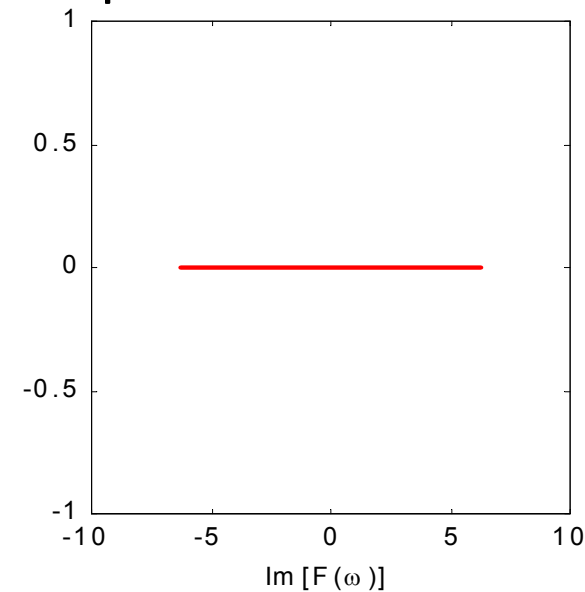
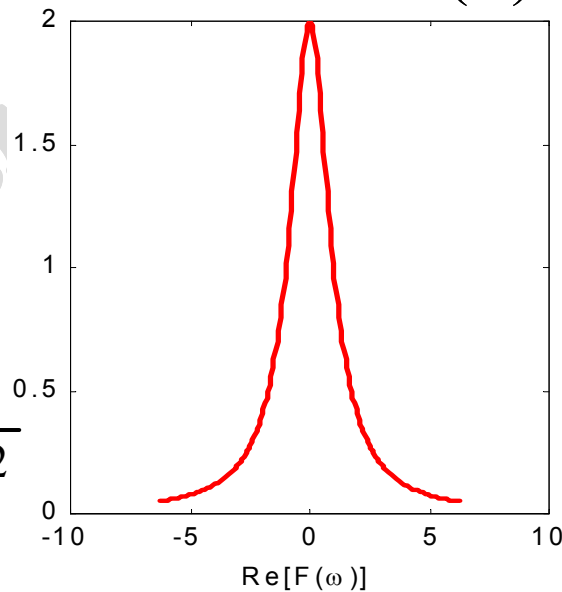
```
syms a t real
syms a positive
ft=exp(-a*abs(t));
Fw=fourier(ft)
Fw =
(2*a)/(a^2 + w^2)
```



$F(\omega)$ è reale pura

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

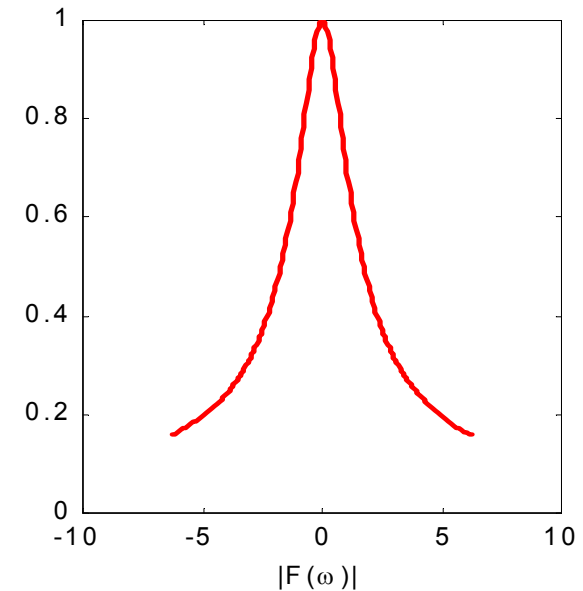
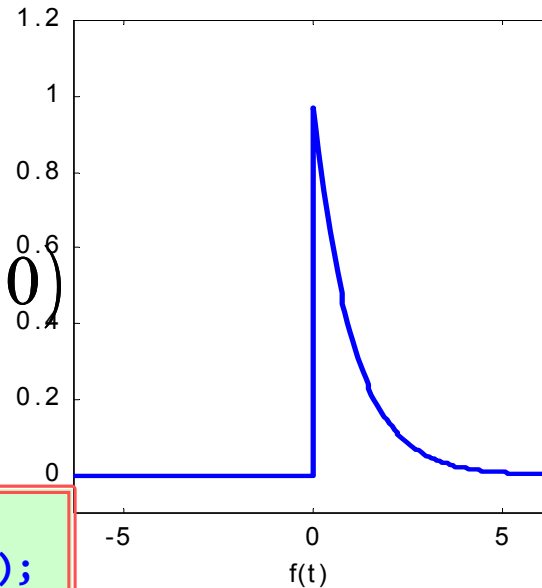
$$F(\nu) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi\nu)^2}$$



Esempi di Trasformate di Fourier (né pari né dispari)

$f(t) =$ **decay pulse**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

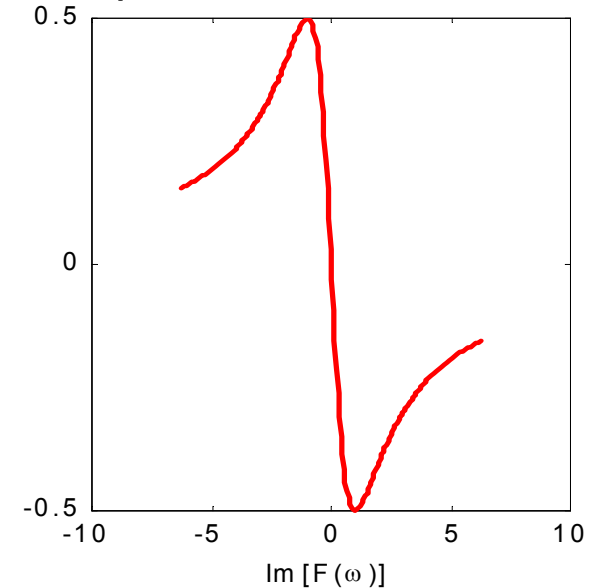
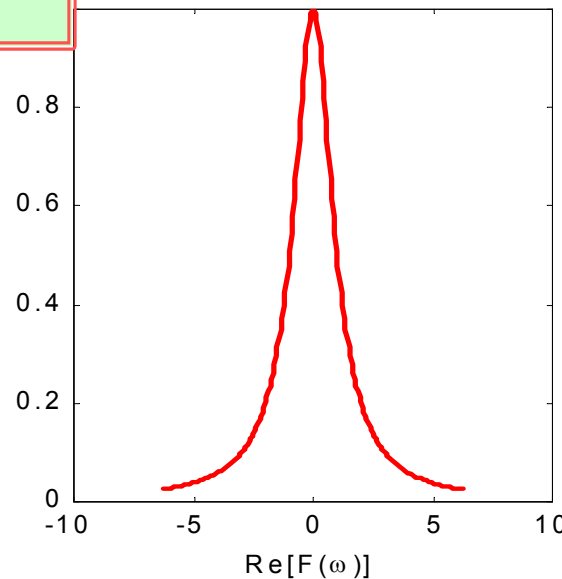


```
syms t real; syms a positive
ft=exp(-a*abs(t))*heaviside(t);
Fw=simplify(fourier(ft))
Fw =
1/(a + w*1i)
```

$F(\omega)$ è complessa

$$F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$$

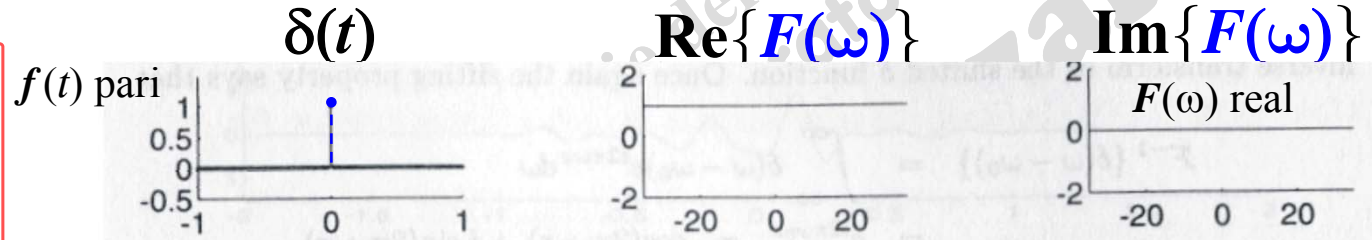
$$F(\nu) = \frac{1}{a + i2\pi\nu}$$



Esempi di Trasformate di Fourier

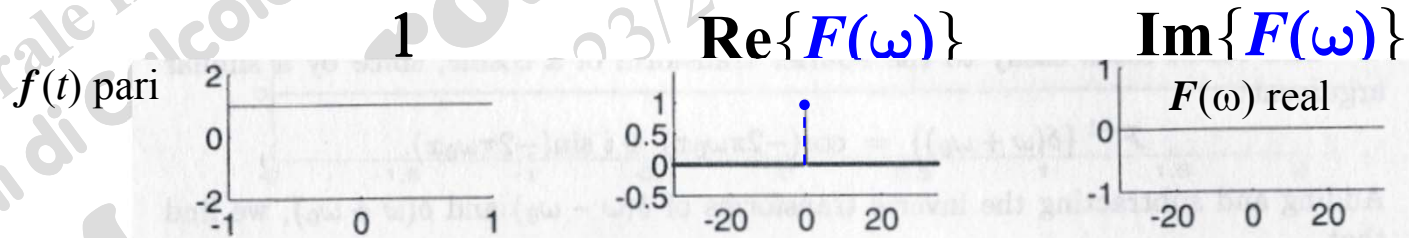
funzione delta di Dirac $f(t) = \delta(t)$ $\circ \text{---} \bullet$ $F(\omega) = 1$

```
syms t; f=dirac(t);
F = fourier(f)
F =
1
```



funzione costante 1 $f(t) = 1$ $\circ \text{---} \bullet$ $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

```
fourier(sym(1))
ans =
2*pi*dirac(w)
```



funzione Heaviside

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad F(\omega) = \pi\delta(\omega) - \frac{i}{\omega}$$

```
syms t real; fourier(heaviside(t))
ans =
pi*dirac(w) - 1i/w
```

Esempi di Trasformate di Fourier

funzioni trigonometriche

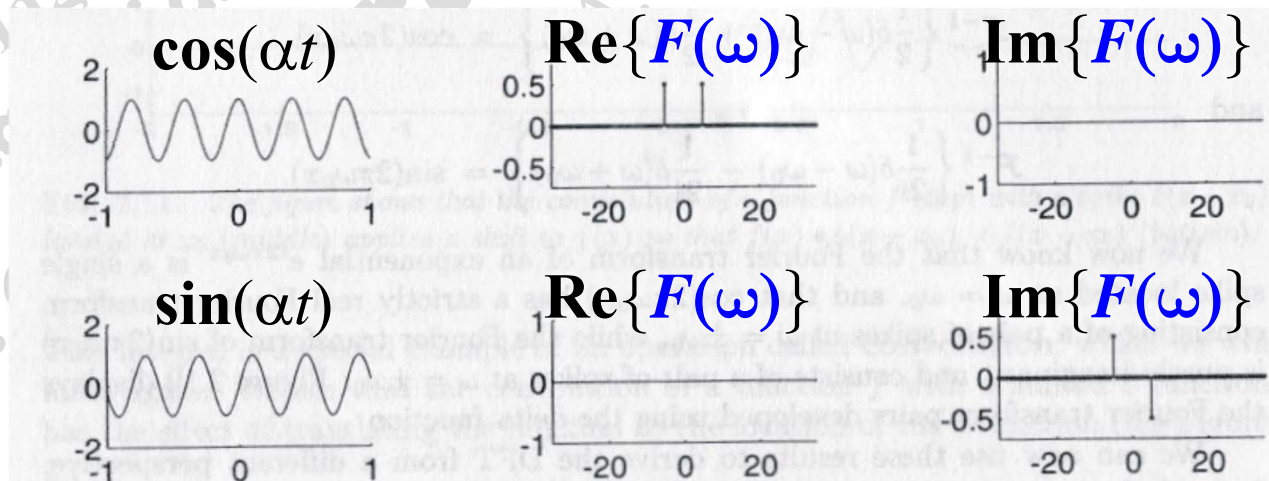
$$\begin{array}{ll}
 f(t) = \overset{f(t) \text{ pari}}{\cos \alpha t} & \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) = \pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)] \quad F(\omega) \text{ è reale} \\
 f(t) = \overset{f(t) \text{ dispari}}{\sin \alpha t} & \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) = i\pi [\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)] \quad F(\omega) \text{ è immaginaria} \\
 f(t) = e^{i\alpha t} & \circ \text{---} \bullet \quad F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \alpha)
 \end{array}$$

```

syms t a real
disp(fourier(cos(a*t)))
pi*(dirac(w-a)+dirac(w+a))
disp(fourier(sin(a*t)))
pi*(-dirac(w-a)+dirac(w+a))*1i
    
```

```

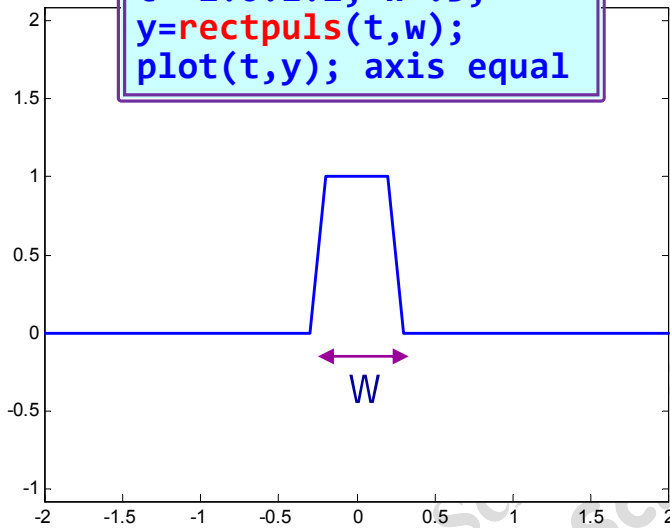
syms t a real
disp(fourier(exp(i*a*t)))
2*pi*dirac(w-a)
    
```



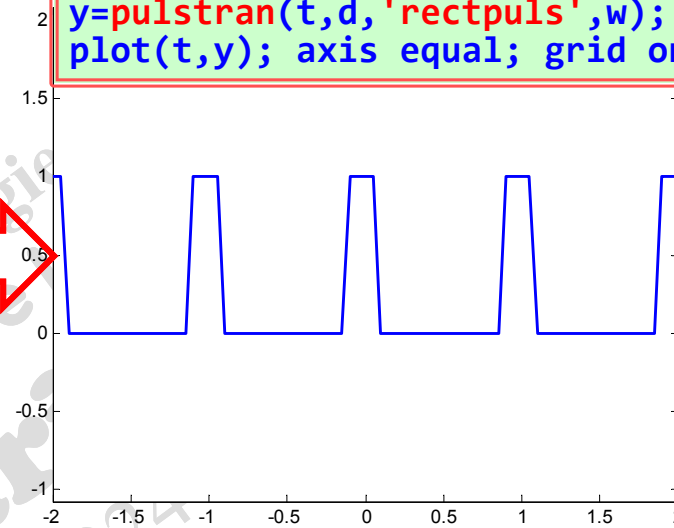
pulstran(): in MATLAB Signal Toolbox

funzioni finestra

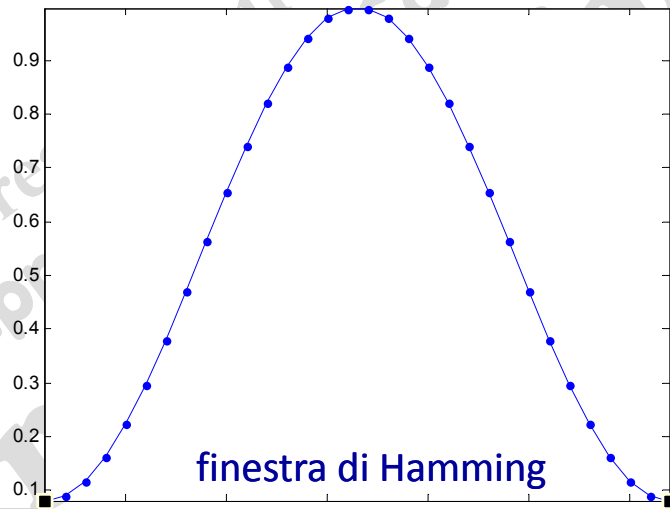
```
t=-2:0.1:2; w=.5;  
y=rectpuls(t,w);  
plot(t,y); axis equal
```



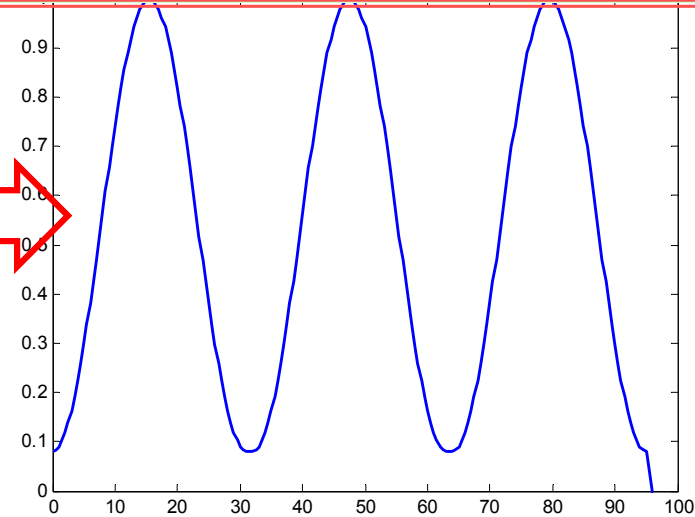
```
t=-2:0.05:2; w=0.2; d=-2:2;  
y=pulstran(t,d,'rectpuls',w);  
plot(t,y); axis equal; grid on
```



```
y=hamming(32); plot(y)
```

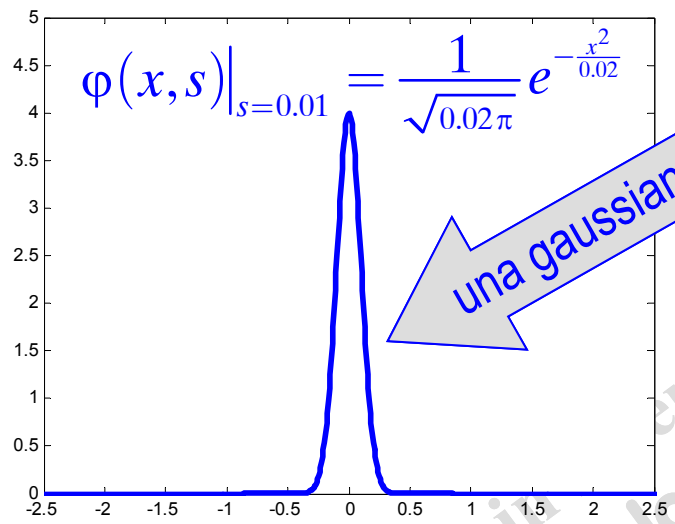


```
W=32; N=3; d=(0:N-1)*W; t=0:0.5:N*W;  
p=hamming(W); y=pulstran(t,d,p);  
plot(t,y)
```



superposizione

Cos'è una **superposizione** $\varphi_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - kT)$?



una gaussiana

replicazione periodica

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

per $\mu=0$ e $s=\sigma^2$ diventa $\varphi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$

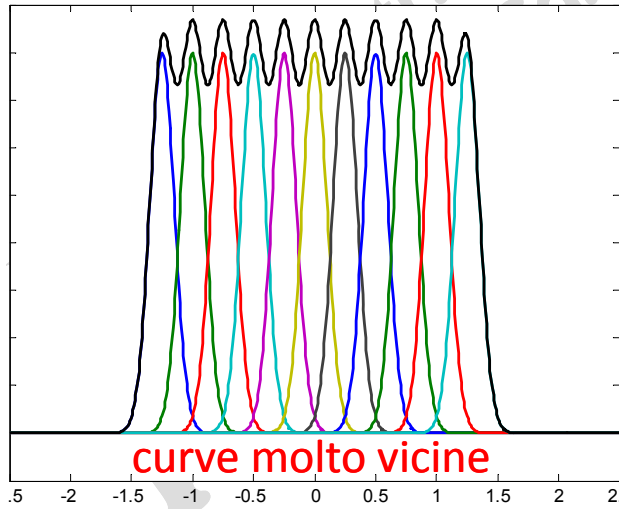
Per dare l'idea di una **superposizione**, ma nel caso finito

```
f=@(x,k,t)exp(-(x-k*t).^2/0.02)/sqrt(pi*0.02);
n=5; k=-n:n; x=linspace(-4,4,1001);
[K,X]=meshgrid(k,x); T=0.25;
F=f(X,K,T); plot(x',F, x',(sum(F,2)), 'k')
axis([-2.5 2.5 -.5 4.5])
```

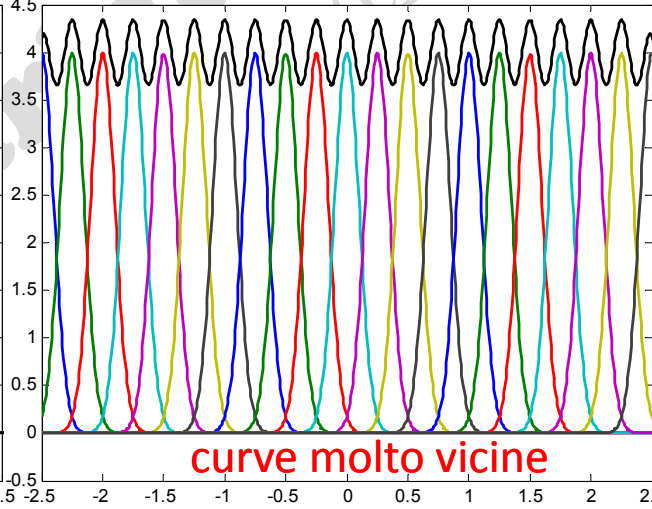
n=5; T=0.25

n=10; T=0.25

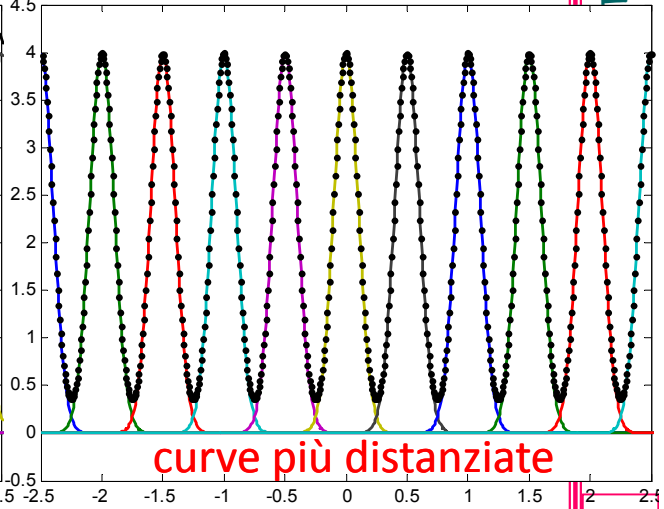
n=5; T=0.5



curve molto vicine



curve molto vicine



curve più distanziate

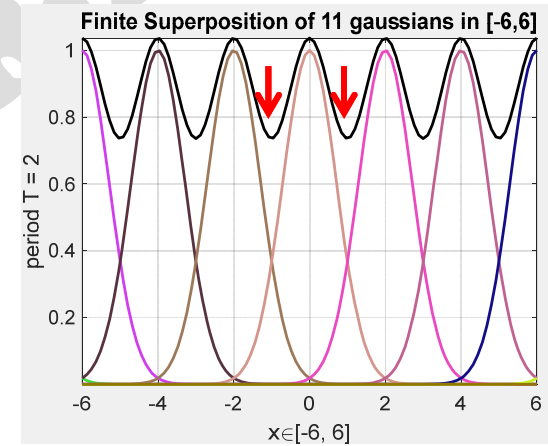
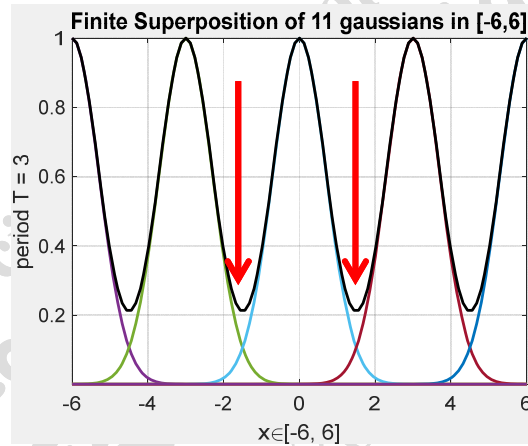
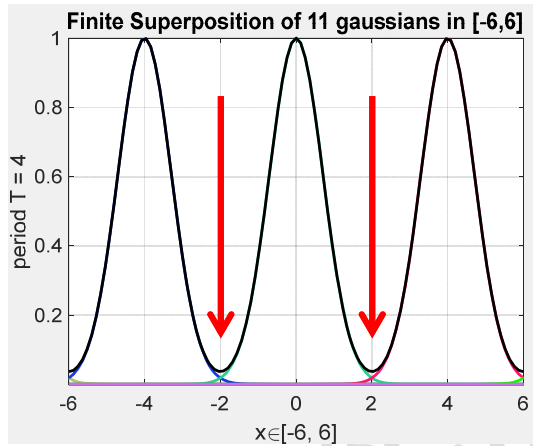
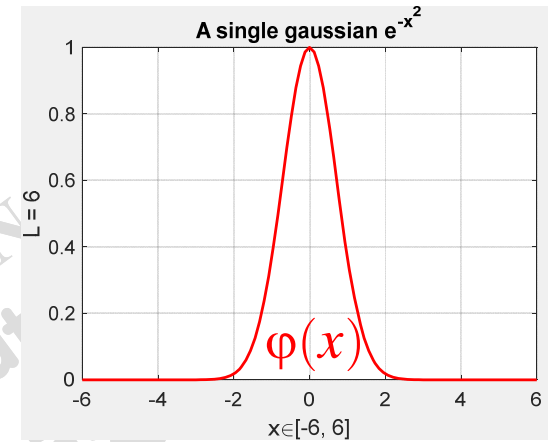
La **curva nera** rappresenta la superposizione (finita) di n gaussiane con periodo T

Download: finite_superposition.p

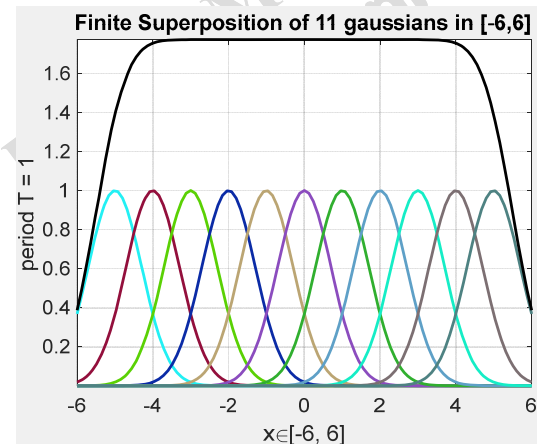
$$\varphi_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - kT)$$

superposizione (infinita)

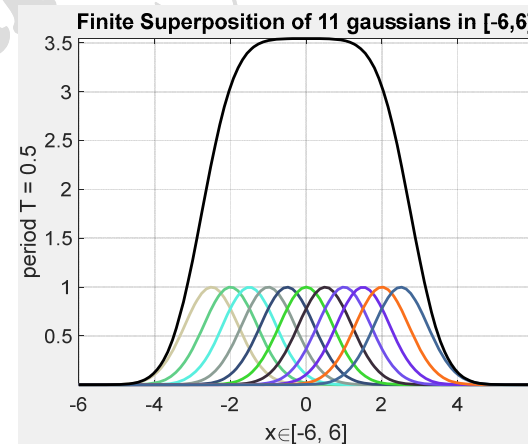
frequenza
di Nyquist



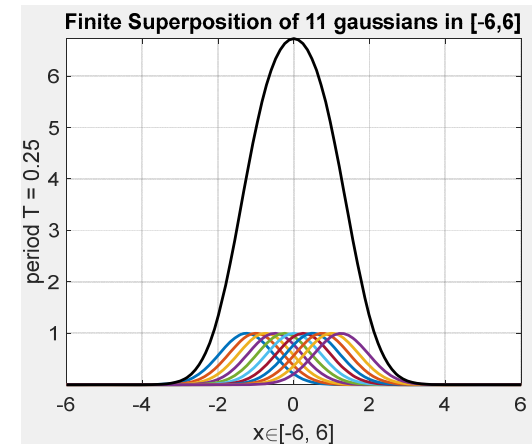
frequenza di Nyquist? Persa!



frequenza di Nyquist? Persa!



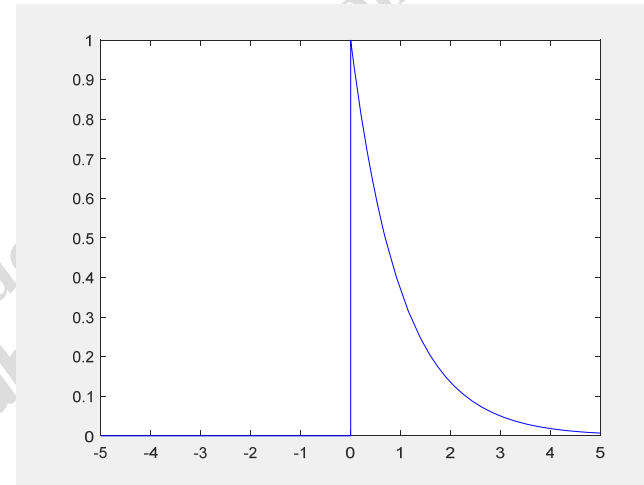
frequenza di Nyquist? Persa!



Un pò di terminologia ...

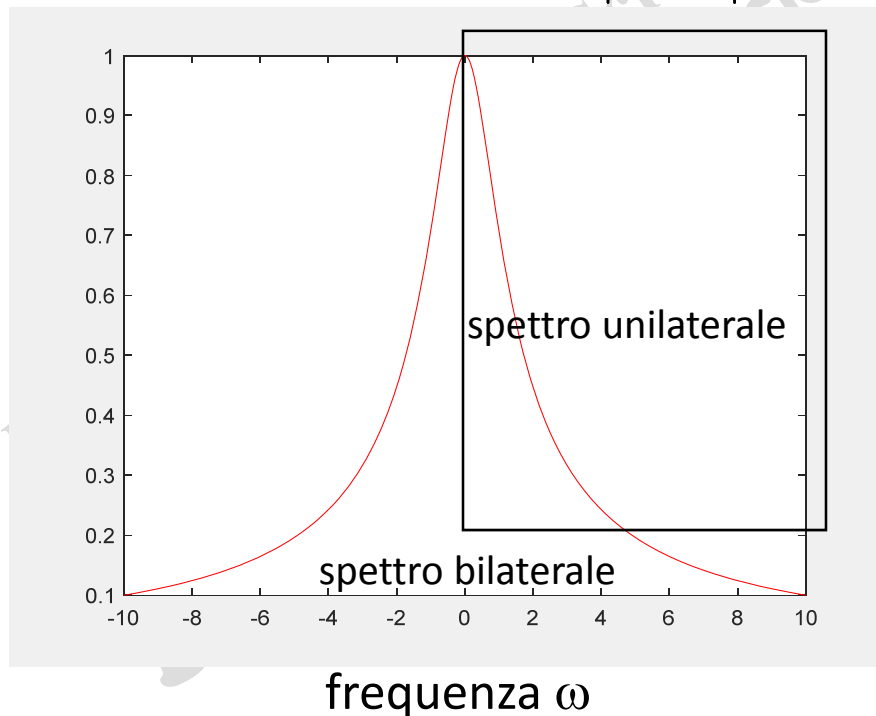
```
syms t real
ft=exp(-abs(t))*heaviside(t);
figure; fplot(ft,[-5 5]); axis tight
Fw=simplify(fourier(ft));
figure; fplot(abs(Fw), [-10 10])
figure; fplot(abs(Fw)^2, [-10 10])
```

segnale: decay pulse $e^{-|t|}$



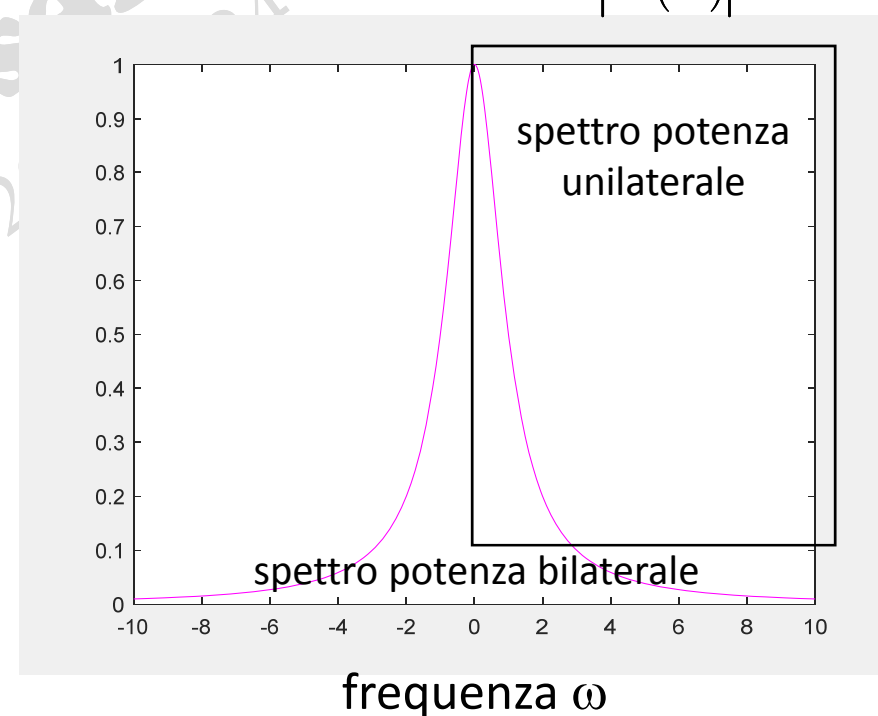
(Fourier Spectrum)

Spettro di Fourier: $|F(\omega)|$



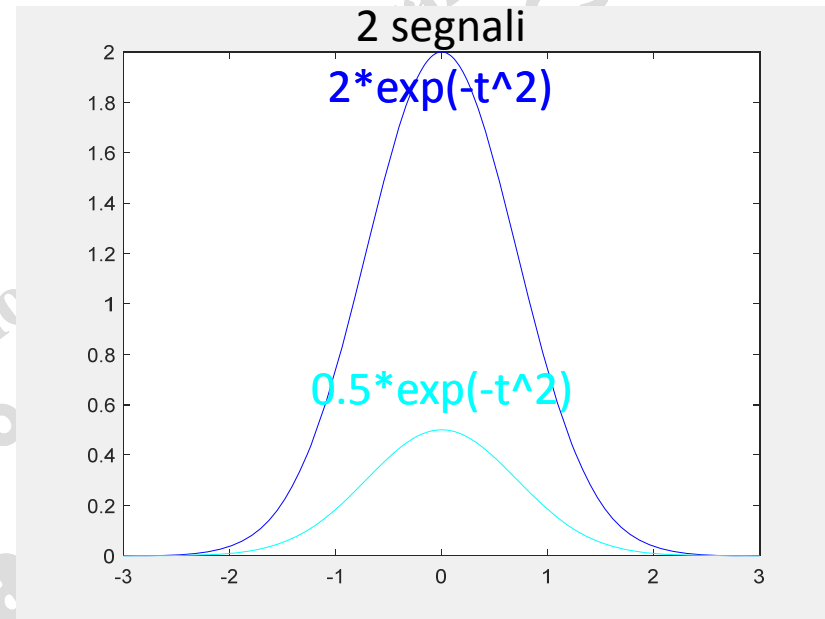
(Power Spectrum)

Spettro Potenza: $|F(\omega)|^2$

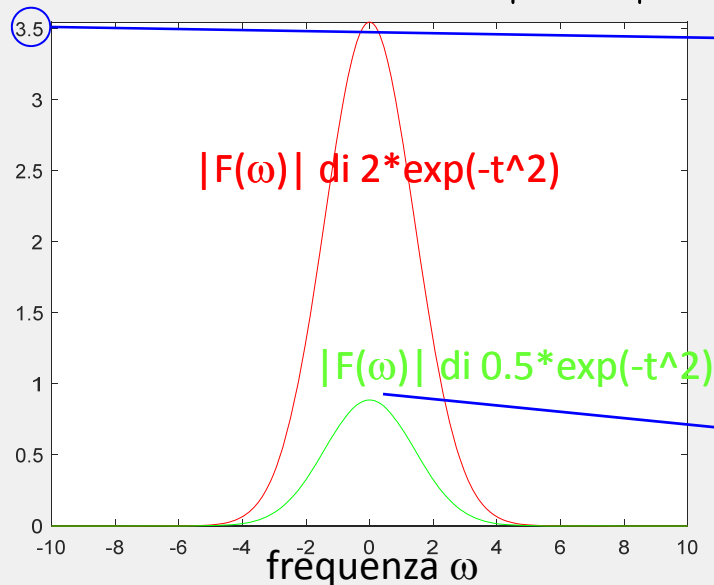


A cosa serve lo Spettro Potenza $|F(\omega)|^2$?

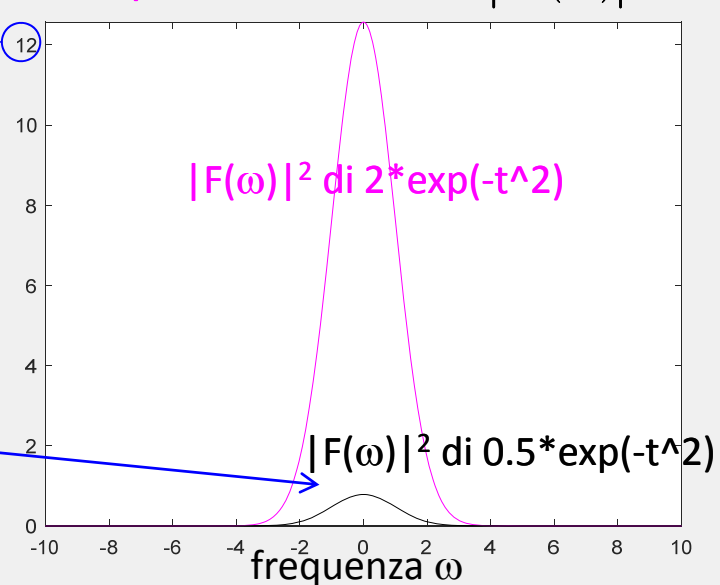
Lo **Spettro Potenza** amplifica i valori grandi dello Spettro di Fourier ($|F(\omega)| > 1$) e riduce i suoi valori piccoli ($|F(\omega)| < 1$).



Spettro di Fourier: $|F(\omega)|$



Spettro Potenza: $|F(\omega)|^2$



Principali proprietà della Trasformata di Fourier [1]

Sia \mathcal{F} la trasformazione che associa ad una funzione $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ la sua Trasformata di Fourier $F(\omega)$

$$\mathcal{F} : f \longrightarrow \mathcal{F}[f, \omega] = F(\omega) \quad \boxed{f(t) \bullet \text{---} \circ F(\omega)}$$

- $\mathcal{F}[f, \omega]$ è un **operatore lineare**: $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g, \omega] = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$.
- Se f è una **funzione pari**, allora $F(\omega)$ è **reale** ed è anch'essa una **funzione pari**.
- Se f è una **funzione dispari**, allora $F(\omega)$ è **immaginaria pura** ed è anch'essa una **funzione dispari**.
- Se f è una **funzione a valori reali**, allora $F(\omega)$ è una **funzione a valori complessi** tale che

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$$

- **Proprietà dello Shift**: la **traslazione** di una funzione nel dominio del tempo $t \pm h$ corrisponde ad una **rotazione** di un angolo $\pm h\omega$ nel dominio della frequenza:

$$f(t \pm h) \bullet \text{---} \circ e^{\pm ih\omega} F(\omega) \quad \boxed{\text{Time shift property}}$$

e la **traslazione** nel dominio della frequenza $\omega \mp \lambda$ corrisponde ad una **rotazione** di un angolo $\pm \lambda t$ nel dominio del tempo:

$$e^{\pm i\lambda t} f(t) \bullet \text{---} \circ F(\omega \mp \lambda) \quad \boxed{\text{Frequency shift property}}$$

Principali proprietà della Trasformata di Fourier [2]

- **Scalatura nel tempo** (o *Similarity Property*): se $f(t) \bullet \text{---} \circ \mathcal{F}[f, \omega] = F(\omega)$ e $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, allora

$$f(ct) \bullet \text{---} \circ F(\omega/c)/|c|$$

- **Proprietà della convoluzione**: se $f, g \in L^1(-\infty, +\infty)$ anche $f * g \in L^1$, allora la convoluzione di f e g nel dominio del tempo sarà trasformata nel prodotto delle loro Trasformate di Fourier nel dominio delle frequenze, e, viceversa, il prodotto di f e g nel dominio del tempo sarà trasformato nella convoluzione delle loro Trasformate di Fourier nel dominio delle frequenze:

$$\mathcal{F}[f * g, \omega] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \cdot G(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[f \cdot g, \omega] = F(\omega) * G(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f * g, \nu] = F(\nu) \cdot G(\nu) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[f \cdot g, \nu] = F(\nu) * G(\nu)$$

← perfettamente simmetriche →

dove la **convoluzione** tra f e g è definita come

$$[f * g](\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt \quad f, g \in L^1(-\infty, +\infty)$$

- **Uguaglianza di Parseval** (o *Teorema dell'Energia di Rayleigh*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Principali proprietà della Trasformata di Fourier [3]

- **Derivata di $f(t)$:** se f è assolutamente continua e sommabile, ed f' è sommabile, allora

$$\mathcal{F}[f', \omega] = i\omega \mathcal{F}[f, \omega]$$

Più generalmente, se f è assolutamente continua e sommabile con le sue prime $k-1$ derivate, ed $f^{(k)}$ è sommabile, allora

$$\mathcal{F}[f^{(k)}, \omega] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f, \omega]$$

- **Derivata di $F(\omega)$:** se $f(t), tf(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$, allora F ha derivata continua, e

$$F'(\omega) = \mathcal{F}[-itf(t), \omega]$$

Più generalmente, se $f(t), tf(t), \dots, t^k f(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$, allora F ha derivate continue fino all'ordine k , e

$$F^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[-(it)^k f(t), \omega]$$

- **Proprietà della Simmetria o di Dualità:**
$$\begin{cases} \mathcal{F}[F(\omega), y] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega y} d\omega = 2\pi f(-y) \\ \mathcal{F}[F(\nu), y] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{-2\pi i \nu y} d\nu = f(-y) \end{cases}$$
 segnale invertito

- **Lemma di Riemann-Lebesgue:** se $f(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$, allora $F(\omega)$ è una funzione continua ed infinitesima all' ∞ .

Esempio della Proprietà dello shift (risp. a freq. angolare)

$$f(t-h) \bullet \longrightarrow \boxed{e^{-ih\omega}} F(\omega)$$

```
syms t real
syms a positive
ft=exp(-a*abs(t));
Fw=fourier(ft)
Fw =
(2*a)/(a^2 + w^2)
syms h real
f1t=exp(-a*abs(t-h));
F1w=simplify(fourier(f1t))
F1w =
(2*a*exp(-h*w*1i))/(a^2 + w^2)
F1w/Fw
ans =
exp(-h*w*1i)
```

Applicazione della Proprietà di convoluzione (risp. a freq. circolare)

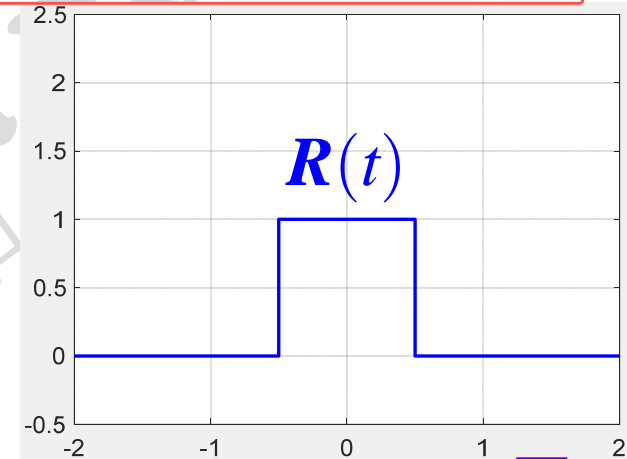
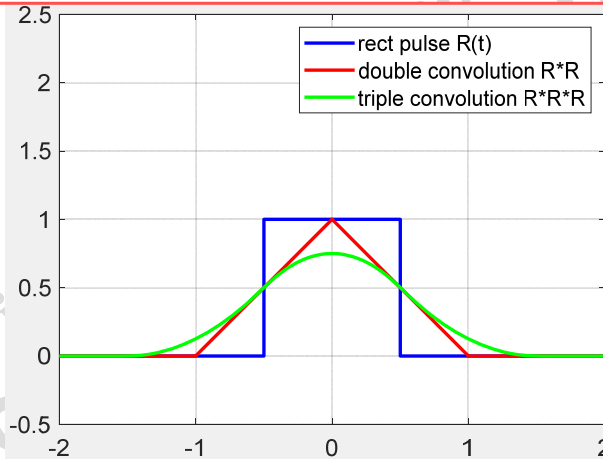
$$[f * g](\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)dt \quad f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]\}$$

```

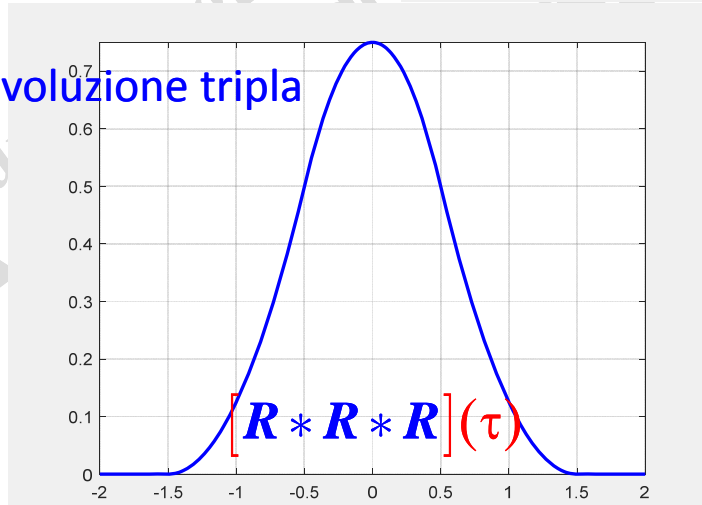
syms t w real; Rt=rectangularPulse(t); Fw=simplify(fourier(Rt))
fplot(Rt,[-2 2],'Color','b','LineWidth',2); hold on
F2=Fw*Fw; R2=simplify(ifourier(F2),100); % R2 convoluzione doppia R(t)*R(t)
fplot(R2,[-2 2],'Color','r','LineWidth',2)
F3=F2*Fw; R3=simplify(ifourier(F3),100); % R3 convoluzione tripla R(t)*R(t)*R(t)
fplot(R3,[-2 2],'Color','g','LineWidth',2)
    
```

rect pulse

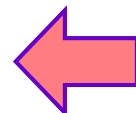
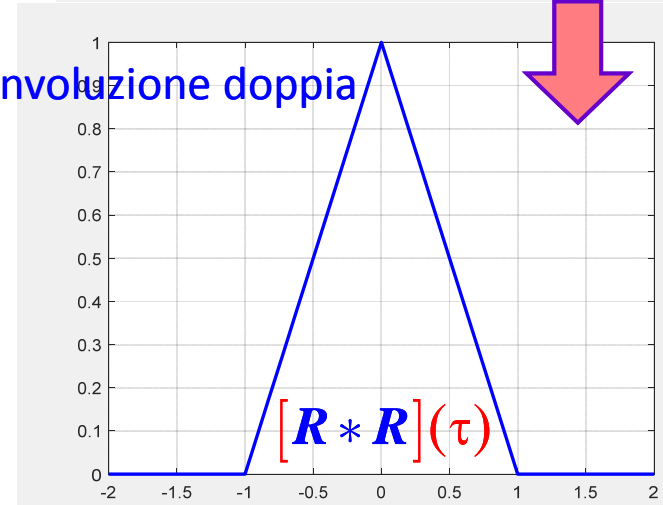
$$R(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



convoluzione tripla



convoluzione doppia

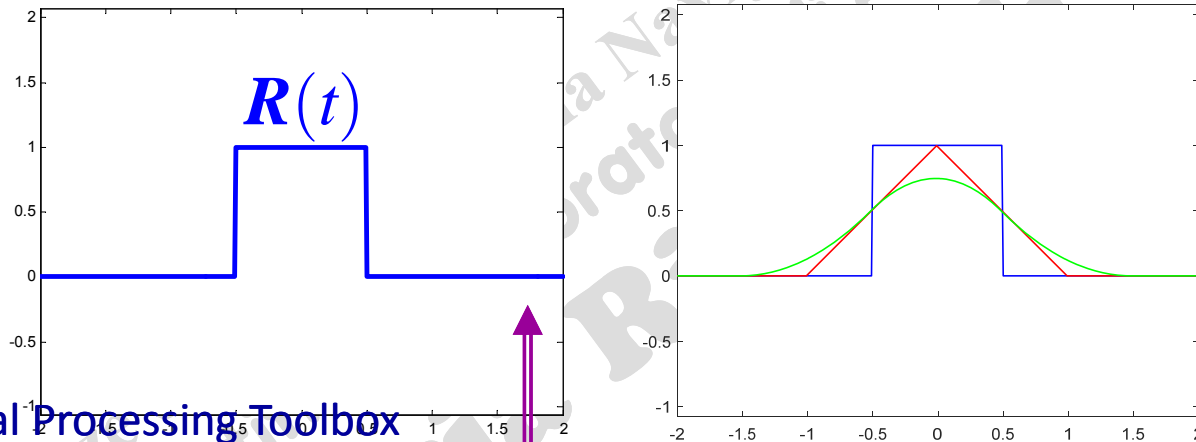


Applicazione numerica della Convoluzione (risp. a freq. circolare)

$$RR = \text{conv}(R, R, 'same') * T/N;$$

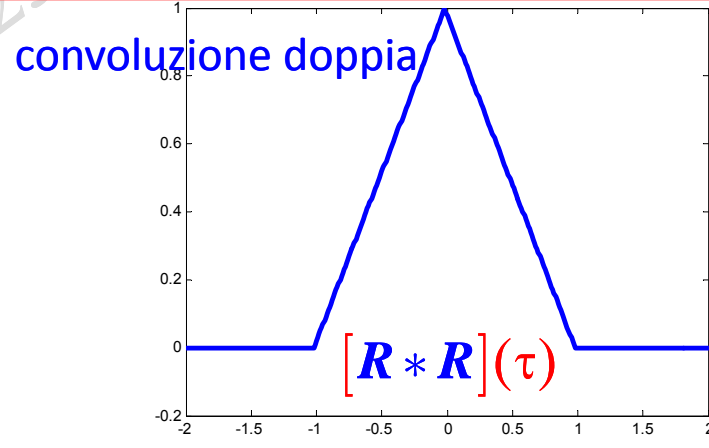
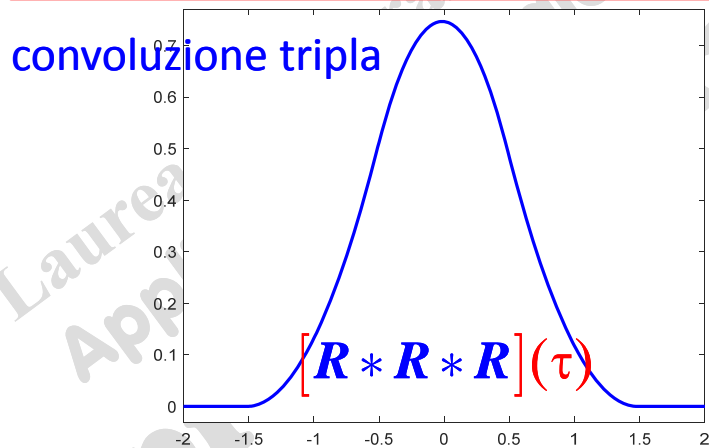
rect pulse

$$R(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



rectpuls(): in MATLAB Signal Processing Toolbox

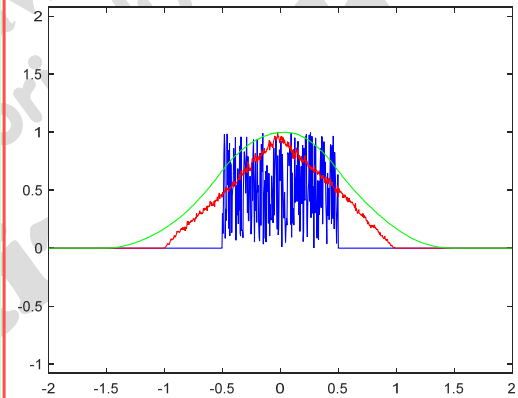
```
a=-2; b=2; T=b-a; t=a:.01:b; N=numel(t)-1; R=rectpuls(t); plot(t,R,'b')
axis equal; hold on
RR=conv(R,R,'same')*T/N; plot(t,RR,'r') % RR convoluzione doppia R(t)*R(t)
RRR=conv(RR,R,'same')*T/N; plot(t,RRR,'g') % RRR convoluzione tripla R(t)*R(t)*R(t)
```



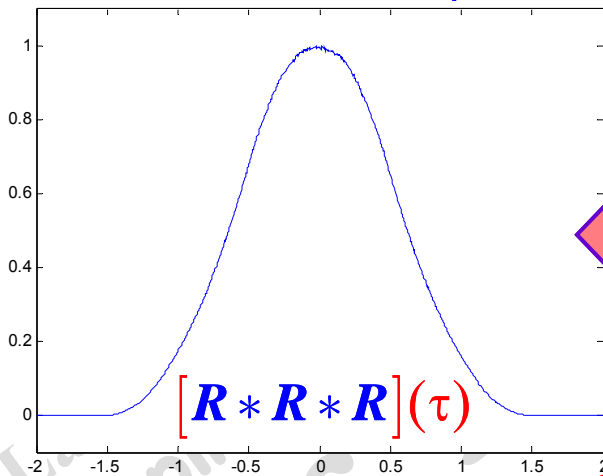
Esercizio: ripetere con DFT (fft) e con cconv(R, R, N)

Applicazione numerica della Convoluzione (risp. a freq. circolare)

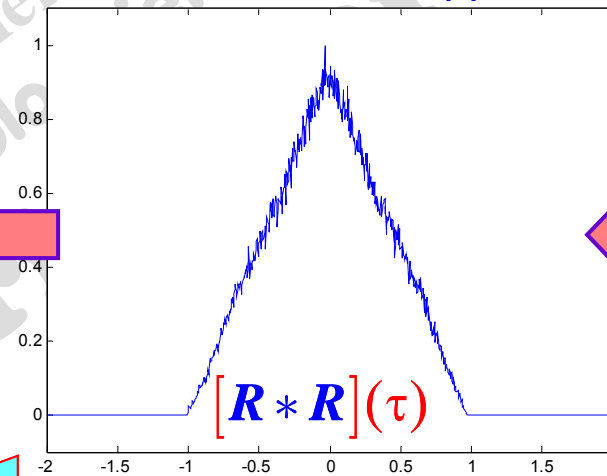
```
a=-2; b=2; T=b-a;  
t=a:.01:b; N=numel(t)-1;  
rng('default');  
R=rectpuls(t).*rand(size(t)); % con rumore random uniforme  
RR=conv(R,R,'same')*T/N; % RR convoluzione doppia R(t)*R(t)  
RRR=conv(RR,R,'same')*T/N; % RRR convoluzione tripla R(t)*R(t)*R(t)  
plot(t,R,'b'); axis equal; hold on  
plot(t,RR/max(RR),'r')  
plot(t,RRR/max(RRR),'g')
```



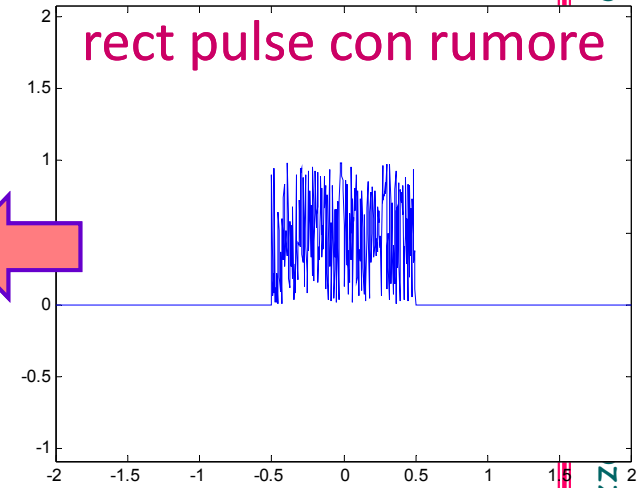
convoluzione tripla



convoluzione doppia



rect pulse con rumore



il rumore si è ridotto (convoluzione per filtrare i dati)

Esercizio: ripetere con DFT (fft) e con cconv(R, R, N)

Dall'esempio precedente, si deduce che:

Dall'essere la $\text{sinc}(\omega)$ la Trasformata di Fourier della funzione rect pulse:

$$\mathcal{F}[\text{rect pulse}, \omega] = \text{sinc}(\omega)$$

segue che la Trasformata di Fourier della funzione triangolare è $\text{sinc}^2(\omega)$:

$$\mathcal{F}[\text{triangular pulse}, \omega] = \text{sinc}^2(\omega)$$

Quiz: ... perché?
Motivare la risposta

ACS parte 2: ACS_13b

Argomenti trattati

- **Errori di Windowing ed Aliasing.**
- **Teor. del Campionamento di Nyquist-Shannon.**
- **Connessione tra FT e FC.**
- **Approssimazione numerica della FT.**
- **Alcune applicazioni della FT.**
- **Short Time Fourier Transform (STFT).**
- **Alcune applicazioni ai suoni della FT.**

Errore di Windowing

Nell'eseguire l'analisi spettrale di un campione di un fenomeno fisico $f(t)$, si osserva il fenomeno per un intervallo finito di tempo.

Da un punto di vista matematico, tale processo equivale a moltiplicare la funzione $f(t)$, che descrive il fenomeno, per una **funzione rettangolare $w(t)$** (funzione finestra rettangolare di **ampiezza L**); quindi la funzione realmente "osservata" è:

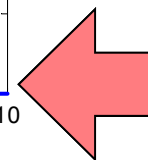
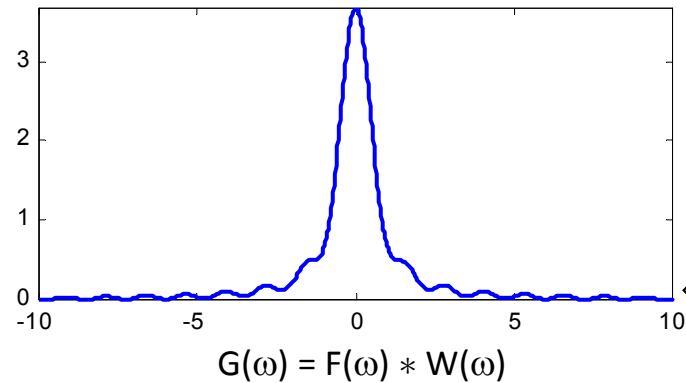
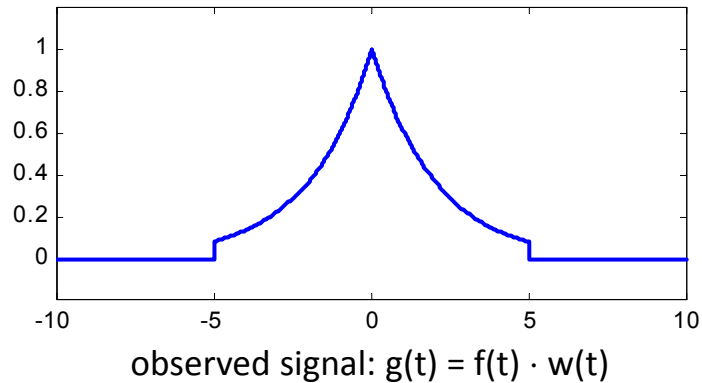
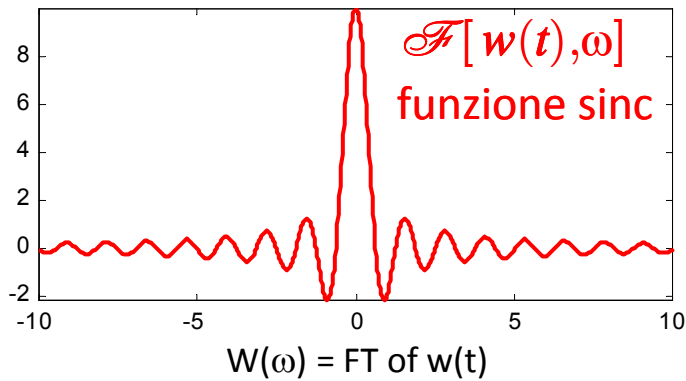
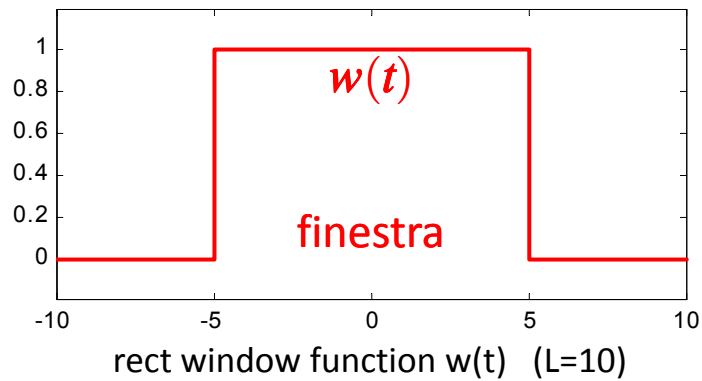
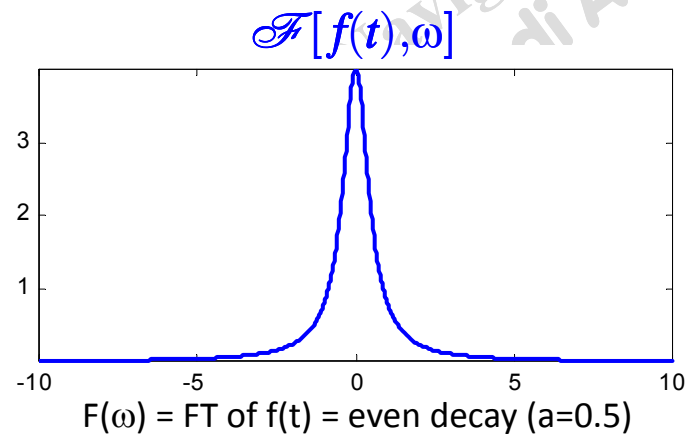
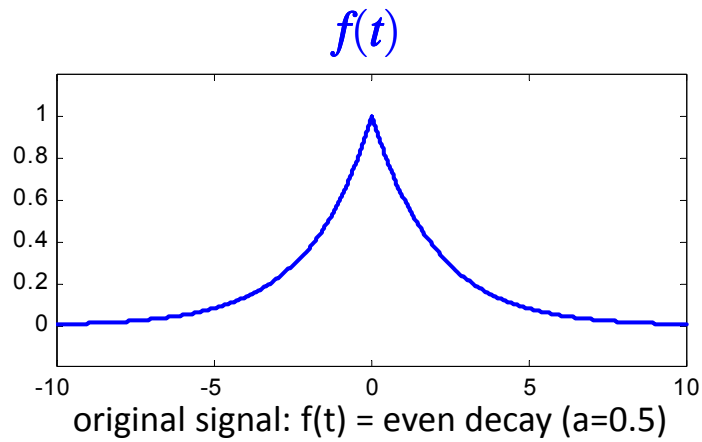
$$g(t) = f(t) \cdot w(t) \quad \begin{array}{l} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t), \omega] \\ W(\omega) = \mathcal{F}[w(t), \omega] \end{array}$$

cosicché la **Trasformata di Fourier $G(\omega)$** di $g(t)$ è data da:

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t), \omega] = \mathcal{F}[f(t), \omega] * \mathcal{F}[w(t), \omega] = F(\omega) * W(\omega)$$

dove $F(\omega) * W(\omega)$ rappresenta il **prodotto di convoluzione** di F e W , e (si ricorda che) W è una funzione **sinc()**.

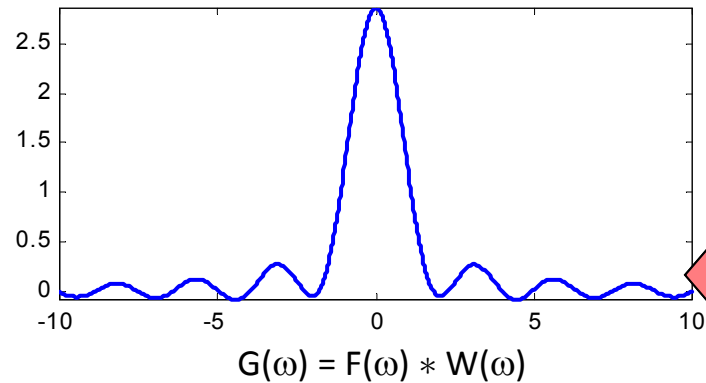
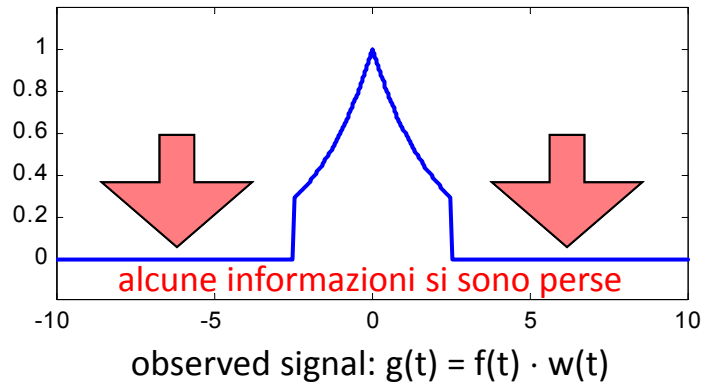
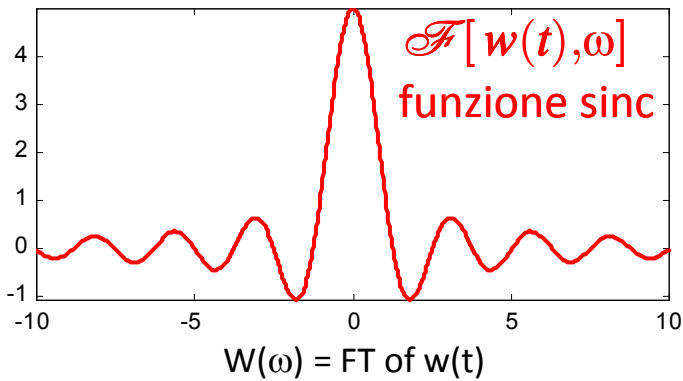
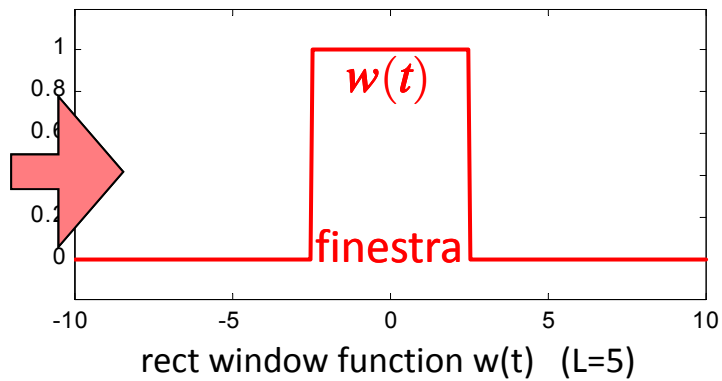
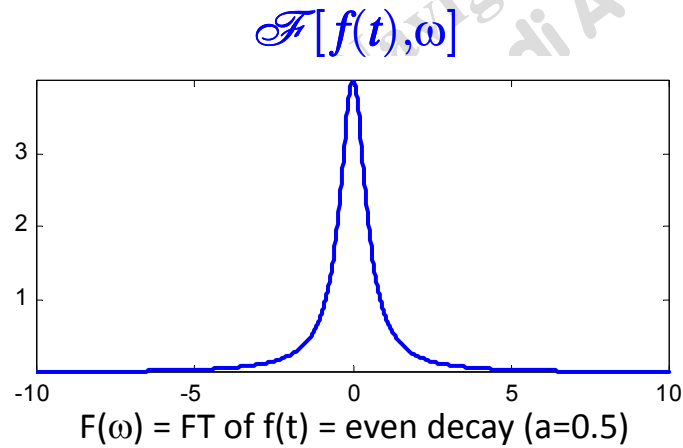
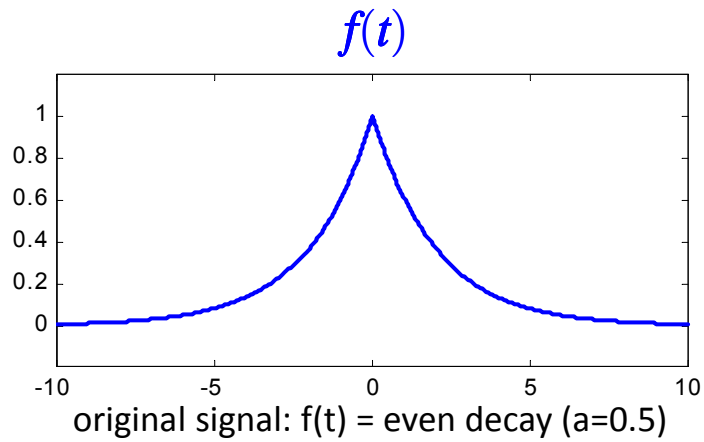
Errore di Windowing: esempio



oscillazioni secondarie

Errore di Windowing: esempio (cont.)

la finestra è stata ridotta

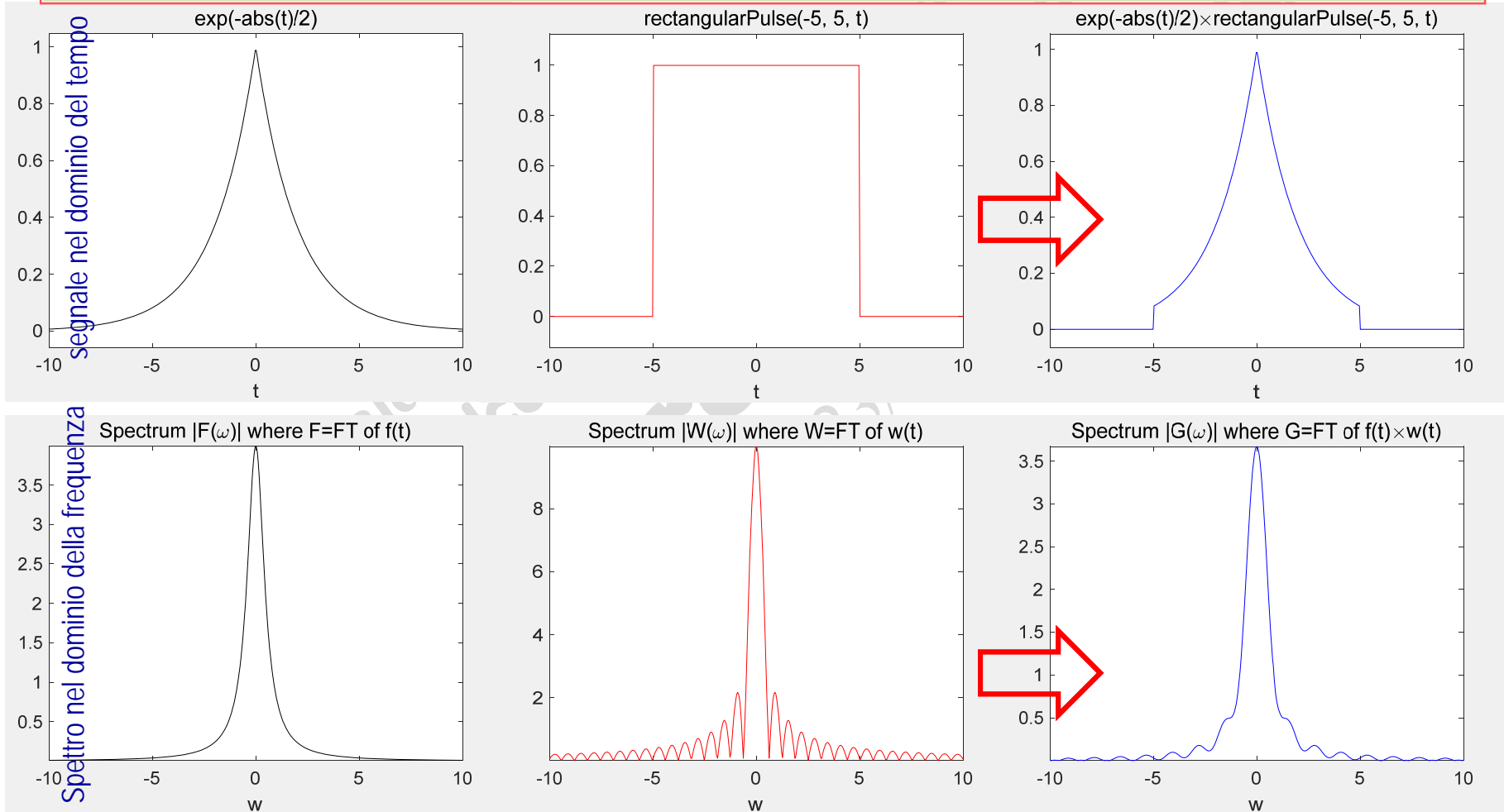


le oscillazioni secondarie
aumentano in ampiezza

Esempio mediante il Symbolic Math Toolbox

```

syms t real; f=exp(-abs(t)/2); figure; ezplot(f,[-10 10])
L=10; w=rectangularPulse(-L/2,+L/2,t); figure; ezplot(w,[-10 10])
figure; ezplot(f*w, [-10 10])
F=fourier(f); figure; h=ezplot(abs(F),[-10 10]); set(h,'Color','k')
W=fourier(w); figure; h=ezplot(abs(W),[-10 10]); set(h,'Color','r')
G=fourier(f*w); figure; h=ezplot(abs(G),[-10 10]); set(h,'Color','b')
    
```



Esercizio: cosa succede per $L=5$?

Errore di Aliasing

Nell'eseguire l'analisi spettrale di un campione di un fenomeno fisico $f(t)$, si usa un insieme discreto di osservazioni del fenomeno ottenute, ad esempio, ad intervalli costanti di tempo.

Dal punto di vista matematico, tale processo equivale a moltiplicare la funzione $f(t)$, che descrive il fenomeno, per una **Comb function** $\delta_T(t)$ (di passo T); quindi la funzione "osservata" è:

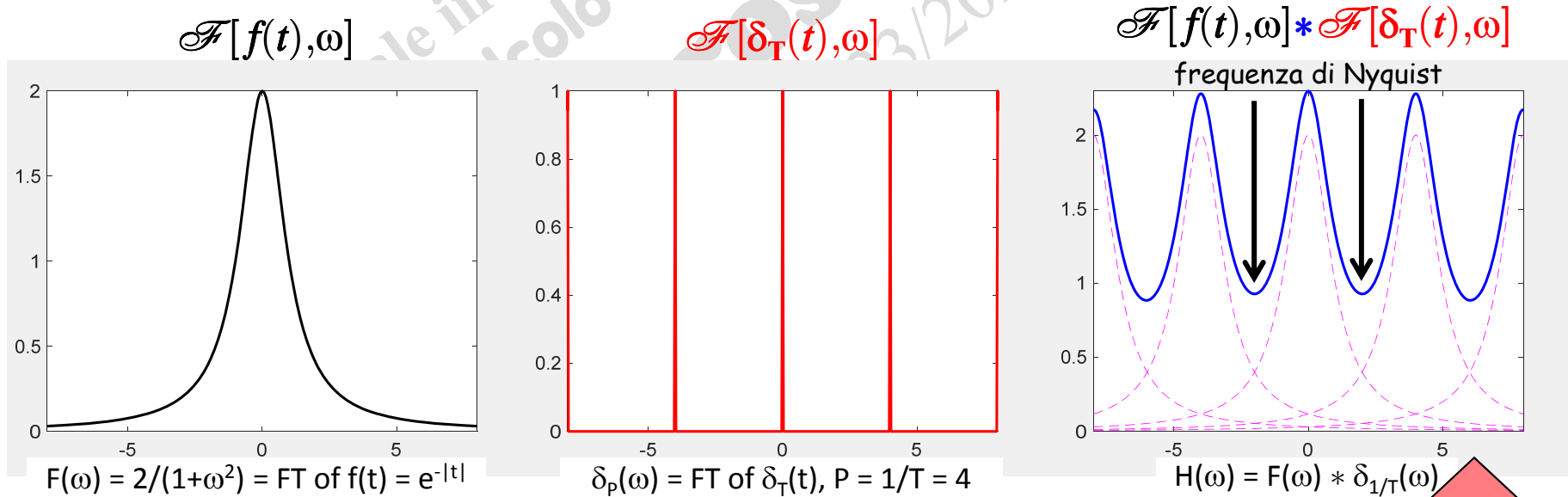
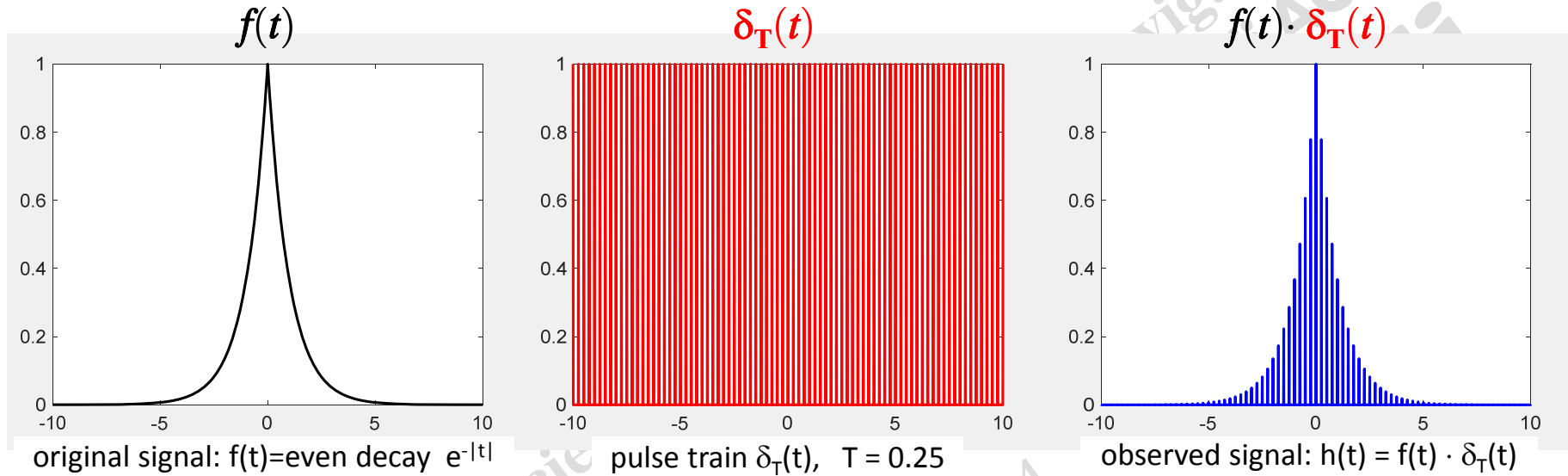
$$h(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad \begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t), \omega] \\ \delta_{1/T}(\omega) &= \mathcal{F}[\delta_T(t), \omega] \end{aligned}$$

cosicché la *Trasformata di Fourier* $H(\omega)$ di $h(t)$ è data da:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t), \omega] = \mathcal{F}[f(t), \omega] * \mathcal{F}[\delta_T(t), \omega] = F(\omega) * \delta_{1/T}(\omega) / T$$

dove $F(\omega) * \delta_{1/T}(\omega) / T$ rappresenta il **prodotto di convoluzione** di F e di $\delta_{1/T} / T$, e (si ricorda che) la FT di una Comb function è ancora una Comb function, ma col **periodo** uguale al **reciproco** del periodo della Comb function originale.

Errore di Aliasing: esempio

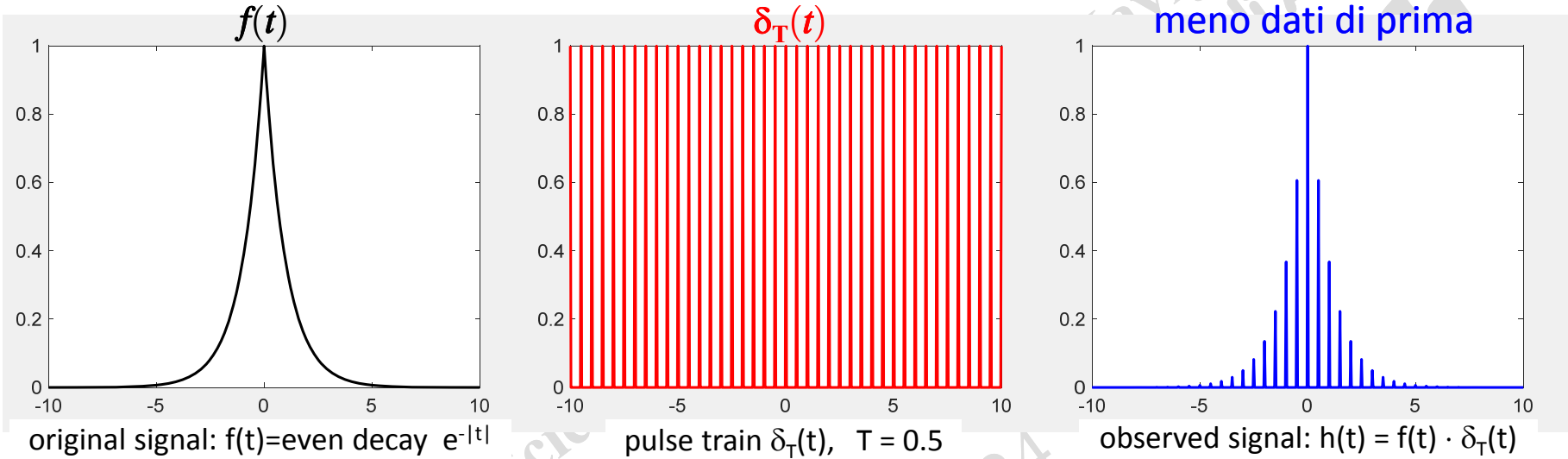


superposizione di $F(\omega)$

Errore di Aliasing: esempio (cont.)

Ora, si raddoppi il passo T della Comb Function $\delta_T(t)$

meno dati di prima



original signal: $f(t) = \text{even decay } e^{-|t|}$

pulse train $\delta_T(t)$, $T = 0.5$

observed signal: $h(t) = f(t) \cdot \delta_T(t)$

$$\mathcal{F}[f(t), \omega]$$

$$\mathcal{F}[\delta_T(t), \omega]$$

$$\mathcal{F}[f(t), \omega] * \mathcal{F}[\delta_T(t), \omega]$$

frequenza di Nyquist



il passo, nello spazio delle frequenze, si è dimezzato

meno informazioni sullo spettro

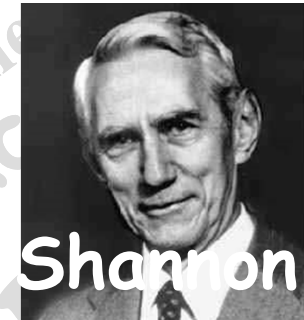
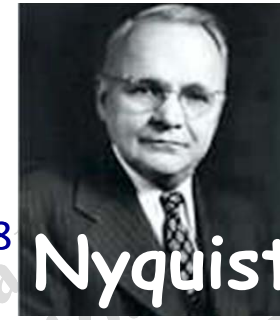
$F(\omega) = 2/(1+\omega^2) = \text{FT of } f(t) = e^{-|t|}$

$\delta_p(\omega) = \text{FT of } \delta_T(t)$, $P = 1/T = 2$

$H(\omega) = F(\omega) * \delta_{1/T}(\omega)$

superposizione di $F(\omega)$

Teor. del Campionamento di Nyquist-Shannon



Nyquist Shannon

enunciato da Harry Nyquist e dimostrato da Claude Shannon nel 1948

risp. alla frequenza circolare ν

Se la *FT* di $f(t)$, $F(\nu)$ [$\omega=2\pi\nu$], è tale che

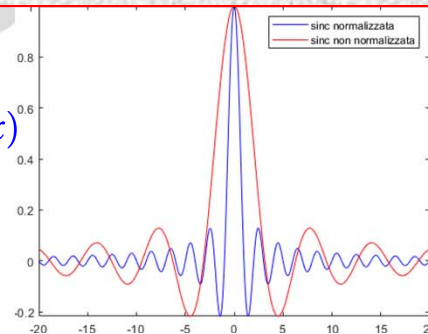
$$F(\nu)=0, |\nu| > H/2 \quad (f \text{ si dice a } \mathbf{banda\ limitata} \text{ con larghezza di banda } H)$$

allora i valori di f nei punti di campionamento $t_k=k\Delta t$, presi a frequenza $f_s=1/\Delta t$, se $f_s > H$ (maggiore del doppio della freq. max) consentono di ricostruire completamente f , cioè:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

sinc normalizzata: $\sin(\pi x)/(\pi x)$
sinc non normaliz.: $\sin(x)/(x)$



funzione "seno cardinale"

nuova base dell'espansione

L'**Errore di Aliasing** è governato dal **Teorema del Campionamento**.

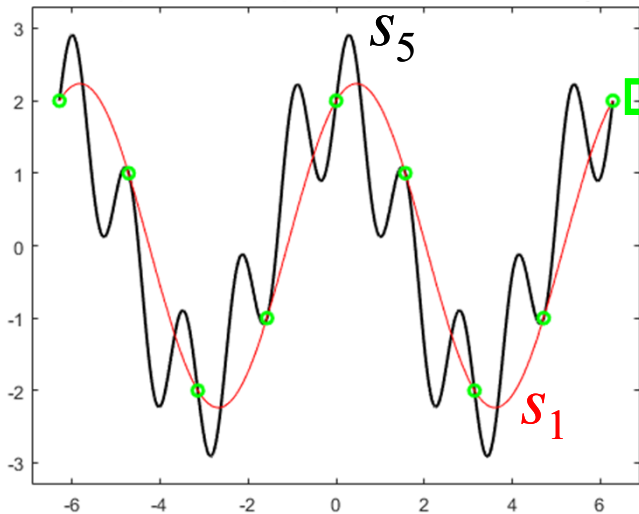
Il **Teorema del Campionamento** può pensarsi come la **conversione di un segnale analogico in forma discreta** prendendo i campioni ad una frequenza che sia maggiore del doppio della massima frequenza contenuta nel segnale analogico di input.

Tale **Teorema** sta alla base delle registrazioni digitali in grado di raggiungere un grado di fedeltà molto superiore a quelle analogiche.

Esempio: applicazione del Teorema del Campionamento.

Si considerino i due segnali: $s_5 = 2\cos(t) + \sin(5t)$ e $s_1 = 2\cos(t) + \sin(t)$.

Si vuole ricostruire s_5 a partire da una sequenza di suoi campioni equispaziati. Si campioni s_5 con un passo $h = \pi/2$ nell'intervallo $[-2\pi, +2\pi]$ (9 campioni).



I 9 campioni di s_5 cadono anche su s_1 .
I due segnali sono indistinguibili partendo dai soli campioni.

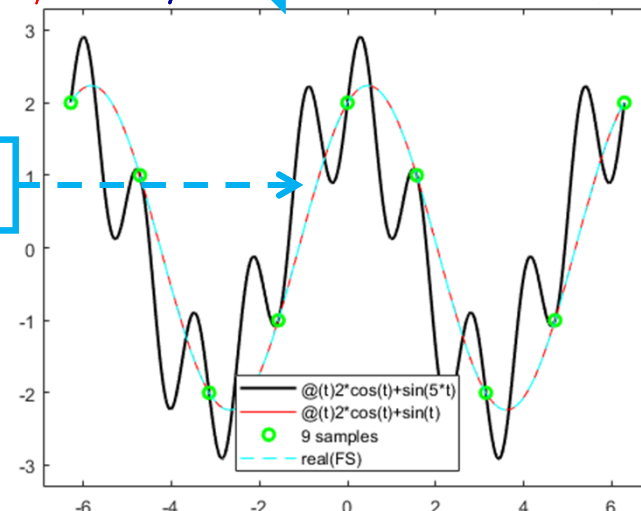
Il passo di campionamento **non soddisfa** le ipotesi del Teor. del Campionamento:

max freq in s_5 : $\omega_{\max} = 5$ \Rightarrow

min freq utile per s_5 : $f_s > 2\nu_{\max} = 5/\pi$ \Rightarrow

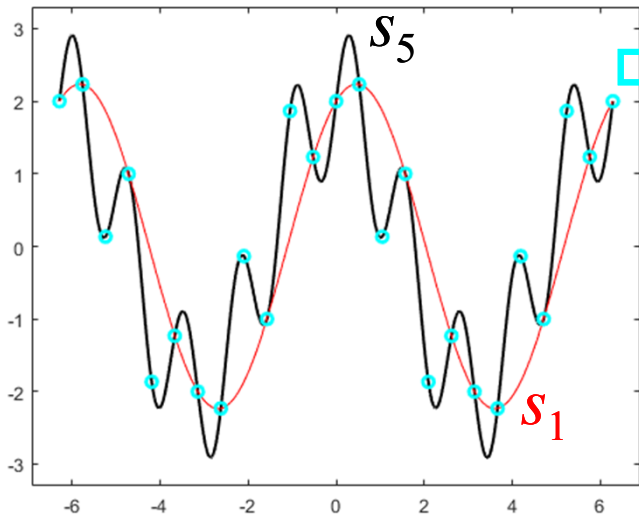
Teor. del Campionamento \Rightarrow passo utile: $\Delta t < \pi/5 < \pi/2$ \Leftarrow passo usato

Infatti ricostruendo con la **Serie di Fourier** il segnale dai 9 campioni (presi a frequenza $f_s = 2/\pi < 5/\pi = 2\nu_{\max}$), si ricostruisce s_1 e non s_5 (effetto aliasing).



Esempio: applicazione del Teorema del Campionamento. (cont.)

Se si campiona s_5 con un passo $h=\pi/6 < \pi/5$, che soddisfa il Teor. del Campionamento, si ottengono 25 campioni.



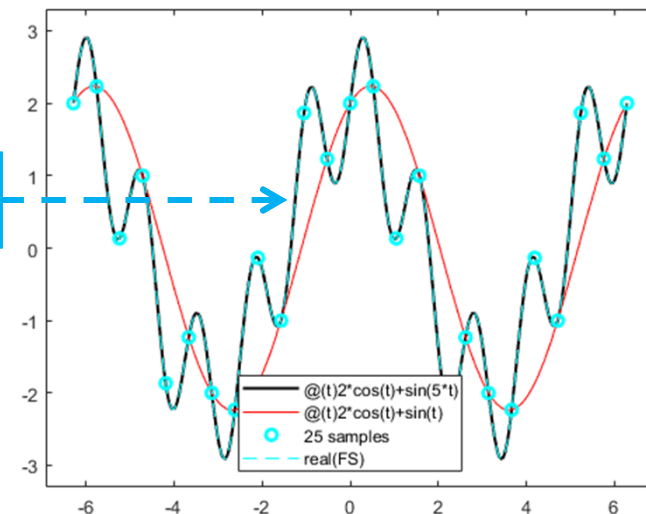
La figura evidenzia che alcuni dei 25 campioni di s_5 non cadono più su s_1 . Pertanto i due segnali sono ben distinguibili partendo dai soli campioni.

max freq in s_5 : $\omega_{max}=5$ \Rightarrow essendo $\omega=2\pi\nu$

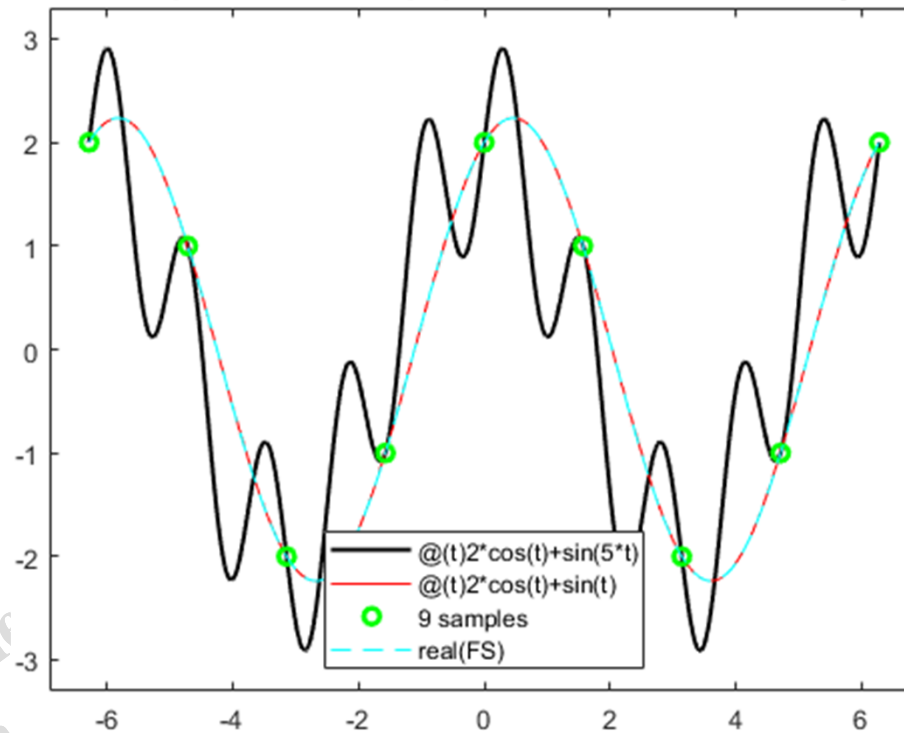
min freq utile per s_5 : $f_s > 2\nu_{max} = 5/\pi$ \Rightarrow

Teor. del Campionamento \Rightarrow passo utile: $\Delta t < \pi/5 > \pi/6$ \Leftarrow passo usato

Infatti ricostruendo con la **Serie di Fourier** il segnale dai 25 campioni (presi a frequenza $f_s=6/\pi > 5/\pi=2\nu_{max}$), si ricostruisce perfettamente s_5 (senza effetto aliasing).



Quiz



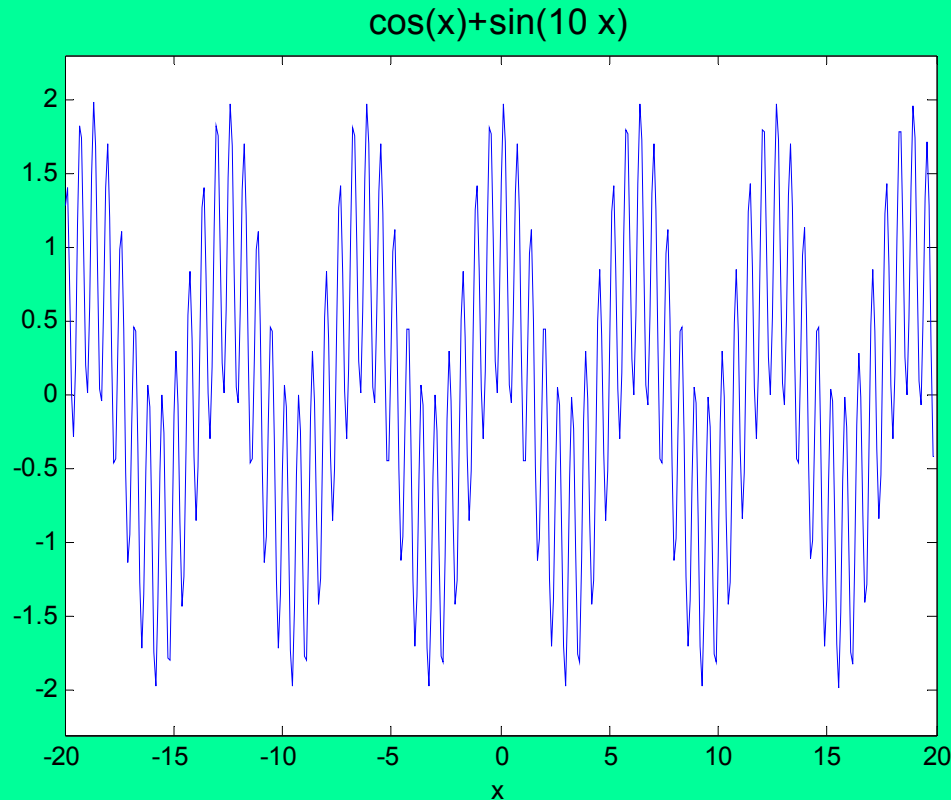
Perché dai campioni di $s_5=2\cos(t)+\sin(5t)$, presi con frequenza $f_s=2/\pi < 5/\pi=2v_{\max}$, si ricostruisce $s_1=2\cos(t)+\sin(t)$ di frequenza angolare 1, e non:

$$s_k=2\cos(t)+\sin(kt), k=2,3,4$$

di massima frequenza componente $\omega = k < 5$?

Esercizio

Qual è la frequenza di Nyquist del seguente segnale?



Verificarlo graficamente mediante il **Teor. del Campionamento**, mostrando anche cosa succede con frequenze inferiori.

Collegamento tra Trasformata di Fourier e coefficienti della Serie di Fourier

FT

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad \longrightarrow \quad F\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \frac{k}{T} t} dt$$

$\nu = \frac{k}{T}$

$f(t) = 0 \quad |t| > \frac{T}{2}$

f : funzione a tempo limitato

$$\frac{1}{T} F\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-2\pi i \frac{k}{T} t} dt$$

per una funzione $f(t)$ a tempo limitato:

$$F(\nu_k) = F\left(\frac{k}{T}\right) = T \cdot \gamma_k$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-2\pi i \frac{k}{T} t} dt$$

γ_k : k° coefficiente di Fourier di f in $[-T/2, +T/2]$

➔ Si può applicare lo stesso **algoritmo** di approssimazione dei coefficienti di Fourier, con un passo aggiuntivo.

Algoritmo per l'approximazione numerica dei $F(v_k)$

Input: $N+1$ (N pari) campioni equispaziati $f_j=f(t_j)$ in $[-T/2, +T/2]$.

Output: $N+1$ campioni equispaziati $F_k \approx F(v_k)$ in $[-\Omega/2, +\Omega/2]$, dove

$$N = \Omega T \quad \text{Relazione di reciprocità}$$

1. Definisce il vettore dei campioni \underline{f} :
$$\begin{cases} f_0 = \frac{1}{2}[f(t_0) + f(t_N)] \\ f_j = f(t_j), & j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

2. Calcola la sua **DFT** (MATLAB `fft()`).

3. Riordina il vettore (MATLAB `fftshift()`).

4. Aggiunge l'ultima componente* ed i fattori di scala
* uguale alla prima $((-1)^k T/N, k = -N/2, \dots, +N/2)$.

Nuovo passo

5. Calcola le frequenze: $v_k = \frac{k}{T}, k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, +\frac{N}{2}$.

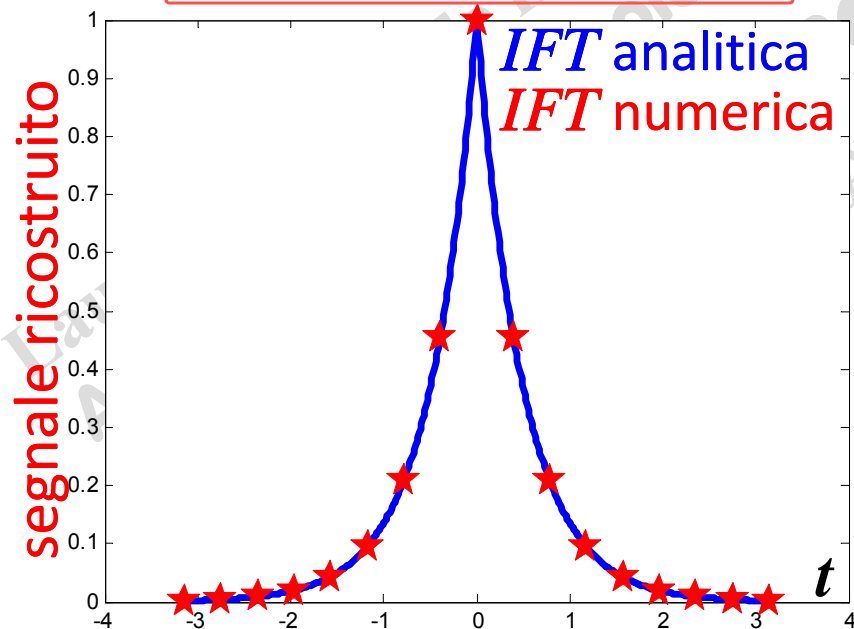
Esempio MATLAB: FT

```

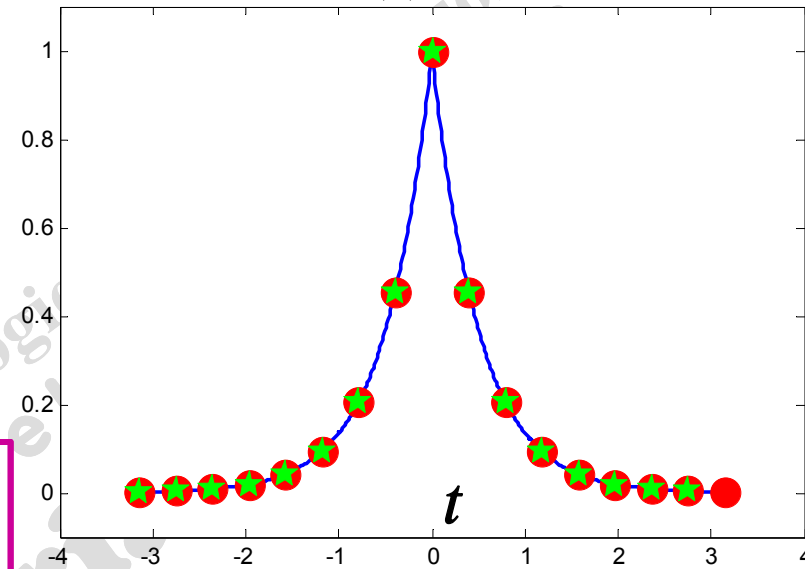
pf=@(t) exp(-2*abs(t));
T=2*pi; N=16; tj in [-T/2,+T/2]
tj=T/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj); campioni
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)]; FT
F=fftshift(fft(f)); F=[F; F(1)]*T/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end); nu=(-N/2:N/2)'/T;
G=F(1:end-1); IFT
G(2:2:end)=-G(2:2:end);
g=ifft(fftshift(G)); g=[g; g(1)]/T*N;
x=linspace(-T/2,T/2,499); y=pf(x);
    
```

stesso algoritmo della Sintesi di Fourier con serie

```
plot(x,y,'b',tj,real(g),'pr')
```

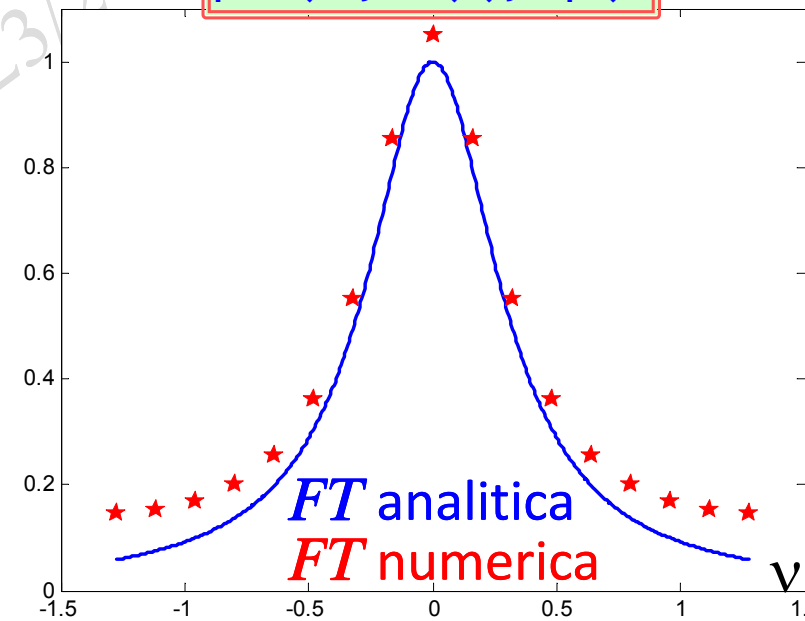


segnale: $f(t) = \text{decay pari}$



```
plot(x,y,tj,fj,'ro',tj(1:end-1),f,'gp')
```

```
plot(nu,abs(F),'rp')
```



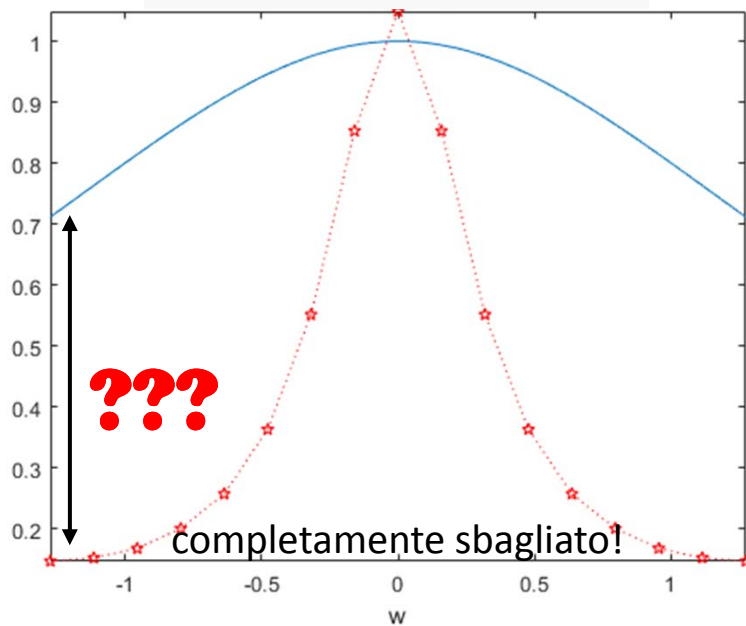
Come aggiungere la FT analitica per un confronto con i campioni numerici?

```
pf=@(t)exp(-2*abs(t)); T=2*pi; N=16; tj=T/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj);
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)]; F=fftshift(fft(f)); F=[F; F(1)]*T/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end); nu=(-N/2:N/2)'/T; FT numerica
plot(nu,abs(F),'pr:')
```

```
syms t real
Fw=fourier(sym(pf));
hold on; fplot(abs(Fw),[-1.5,1.5])
axis tight
```

```
syms t w v real; O=N/T;
Fw=fourier(sym(pf));
Fv=subs(Fw,w,2*pi*v); omega=2*pi*v
hold on; fplot(abs(Fv),[-O/2,O/2])
```

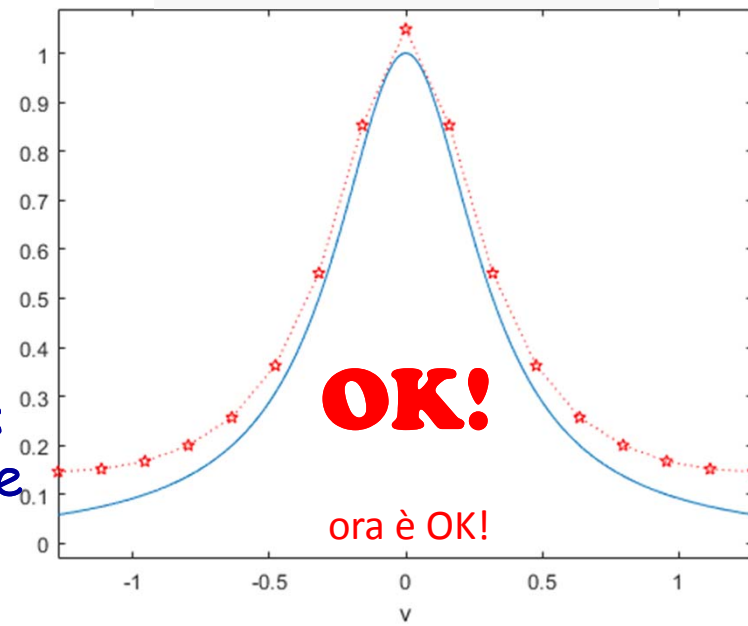
Spettro di Fourier



la FT numerica
usa la freq.
circolare

Attenzione:
 ω e v diverse

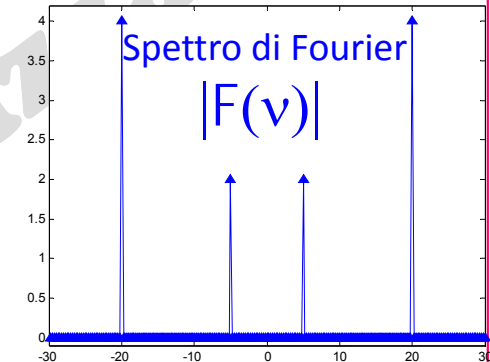
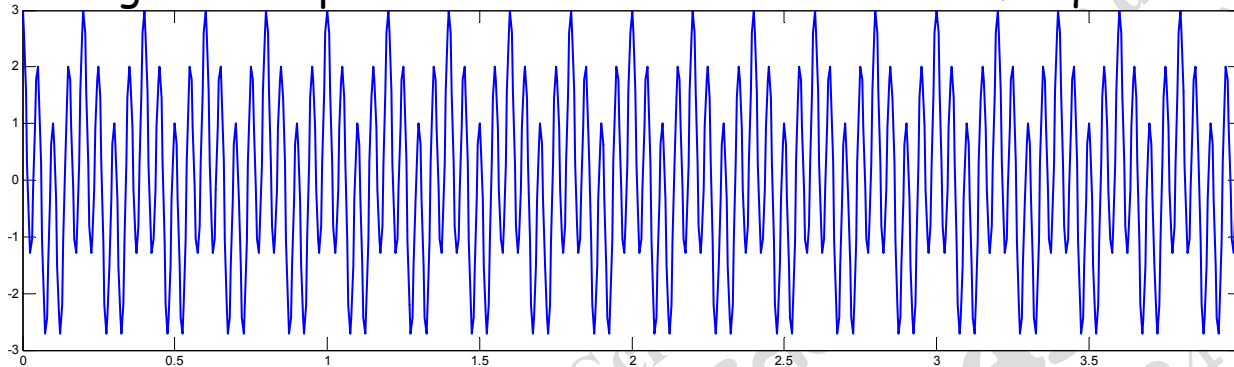
Spettro di Fourier



Applicazioni esempio 1: filtro ideale

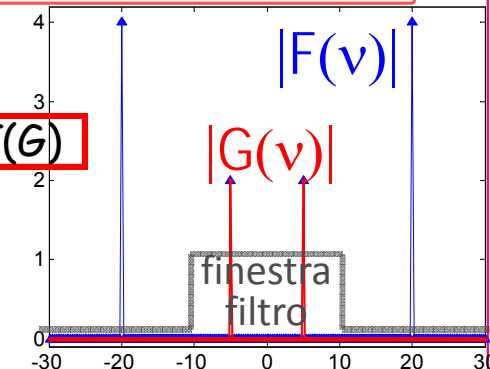
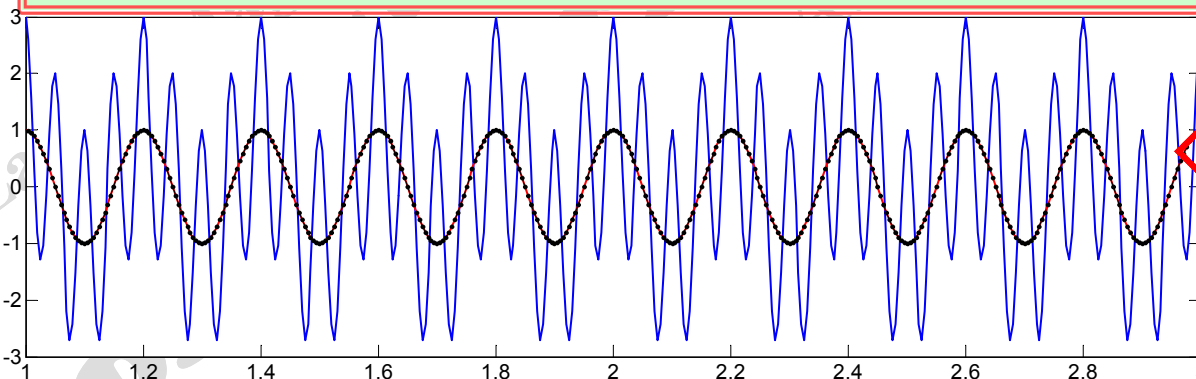
```
dt=.005; t=(0:dt:4)'; N=numel(t)-1; T=4;
fj=cos(2*pi*5*t)+2*cos(2*pi*20*t); plot(t,fj); axis([0 4 -3 3]);
f=[.5*(fj(1)+fj(end));fj(2:end-1)];
F=fftshift(fft(f));F=[F;F(1)]*T/N; F(2:2:end)=-F(2:2:end);
nu=(-N/2:N/2)'/T;
figure; plot(nu,abs(F),'^-'); axis([-30 30 -.1 4.2])
```

Il segnale di input contiene 2 onde elementari di frequenze rispettive 5 e 20



Si applica un "filtro passa-basso", cioè si annullano le freq. $v : |v| > W/2 = 10$

```
G=zeros(size(F)); k=find(abs(nu)<10); G(k)=F(k); hold on; plot(nu,abs(G),'r.-')
H=G(1:end-1); H(2:2:end)=-H(2:2:end);
h=ifft(fftshift(H)); h=[h;h(1)]/T*N;
figure; plot(t,fj,t,real(h),'r', t,cos(2*pi*5*t),'.k--'); axis([1 3 -3 3])
```



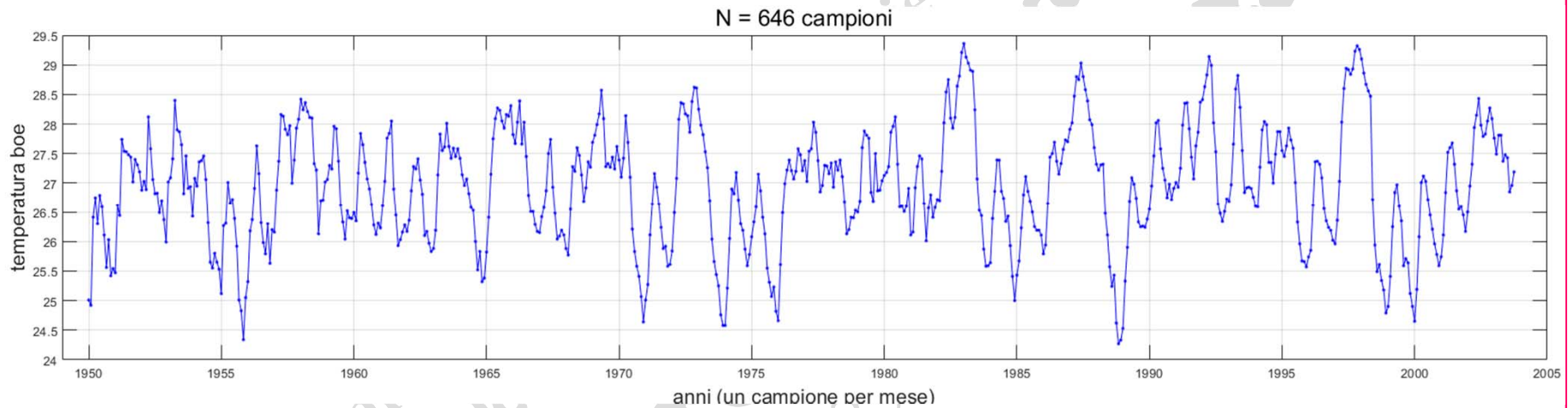
I due segnali $IFT(G)$ e $\cos(2\pi 5t)$ si sovrappongono perfettamente.
Il "rumore" (noise) $2\cos(2\pi 20t)$ è stato completamente rimosso.

Applicazioni esempio 2

Determinare la possibile periodicità di dati equispaziati:
come trovare il periodo di "El Ninho"?

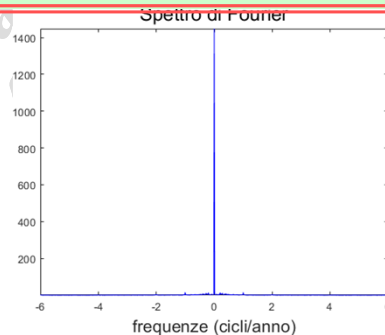
ACS2_13.49

```
load ninho; N=numel(fj);                                download ninho.mat
tj=(0:N-1)'/12 + 1950; % tempo in anni
plot(tj,fj,'b'); ylabel('temperatura boe'); xlabel('anni (un campione per mese)')
```

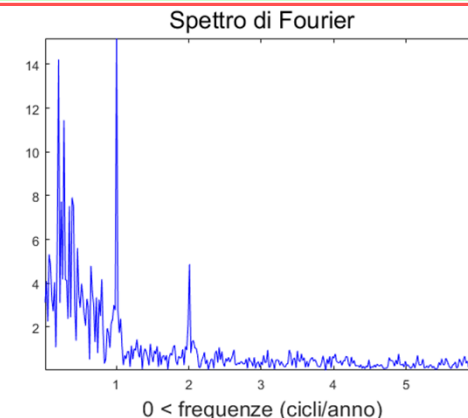


```
T=tj(end)-tj(1); Dt=T/N; % circa 12 campioni per anno
Dnu=1/T; nu=(-N/2:N/2)'*Dnu;
F=fftshift(fft(fj)); F=[F; F(1)]*T/N;
F(1:2:end)=-F(1:2:end);
plot(nu,abs,'b'); axis tight
title('Spettro di Fourier')
xlabel('frequenze (cicli/anno)')
```

```
mid=N/2+2; plot(nu(mid:end),abs(F(mid:end)),'b')
axis tight; title('Spettro','FontSize',18)
xlabel('0 < frequencies (cycles/year)', 'FontSize',16)
```



solo frequenze positive



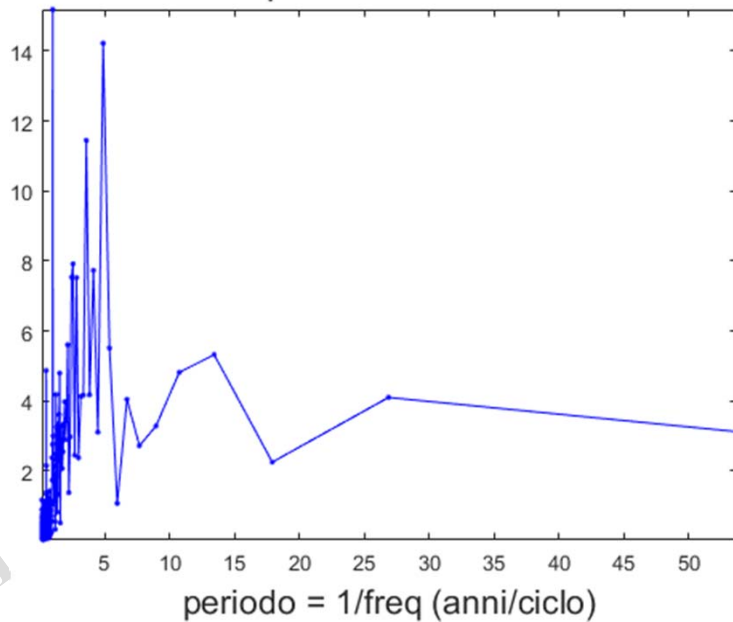
Trasformata di Fourier

(prof. M. Rizzardi)

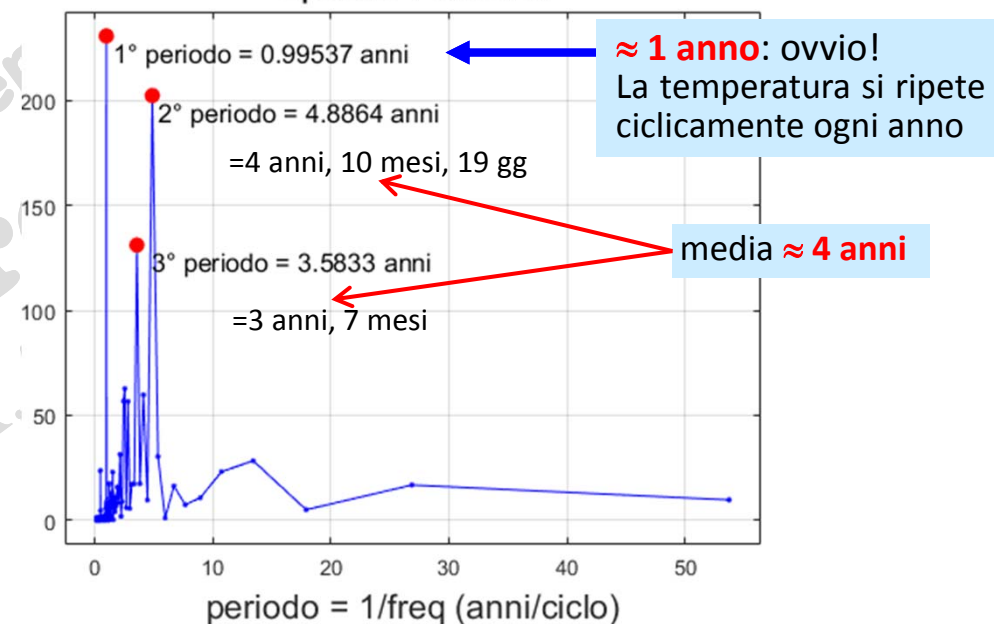
periodo di "El Ninho"

```
mid=N/2+2; % solo freq > 0
period=1./nu(mid:end); % invece delle frequenze, sulle ascisse si usano i periodi (in anni)
plot(period,abs(F(mid:end)),'b'); axis tight
xlabel('period=1/freq (years/cycle)', 'FontSize',16)
title('Spettro di Fourier', 'FontSize',18)
power=abs(F(mid:end)).^2; % Spettro Potenza =  $\{|F_k|^2\}_k$ 
plot(period,power,'b'); axis tight
title('Spettro Potenza', 'FontSize',18); xlabel(...); hold on
```

Spettro di Fourier



Spettro Potenza



```
% trova l'indice del 1° massimo nello Spettro Potenza
index=find(power == max(power)); % 1°
p1=period(index); plot(p1,power(index),'r.', 'MarkerSize',25)
text(period(index),power(index),[' 1° periodo = ' num2str(period(index)) ' anni'])
```

Applicazioni
esempio 3

Tastierino multi-frequenza (DTMF) del telefono

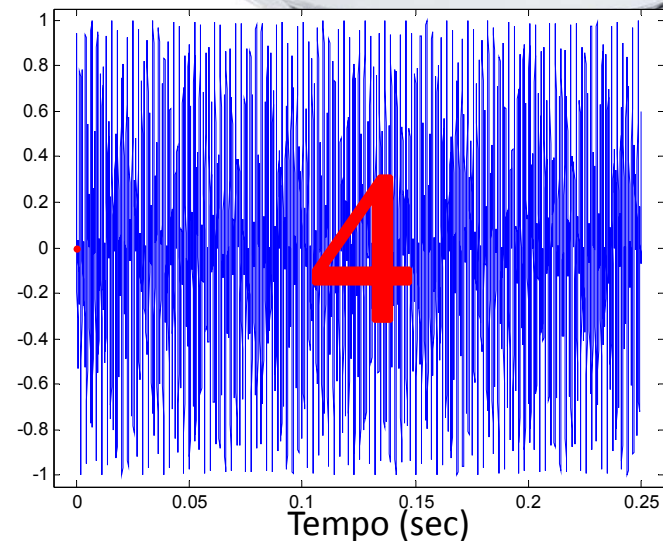
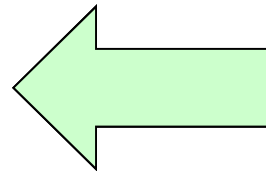
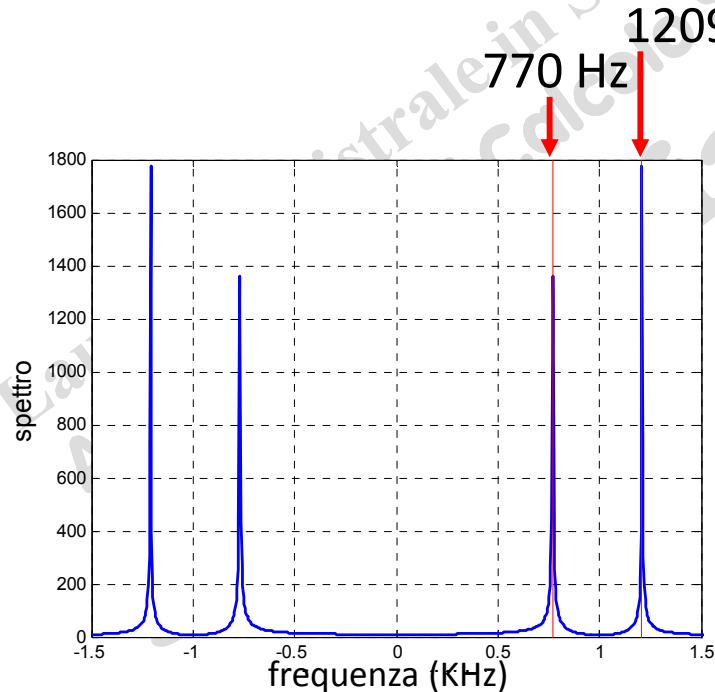
Il suono y di ogni tasto è la somma di due "ton", cioè due sinusoidi di frequenze opportune:

$$y = \frac{\sin(2\pi\phi_{\text{row}}t) + \sin(2\pi\phi_{\text{col}}t)}{2}$$

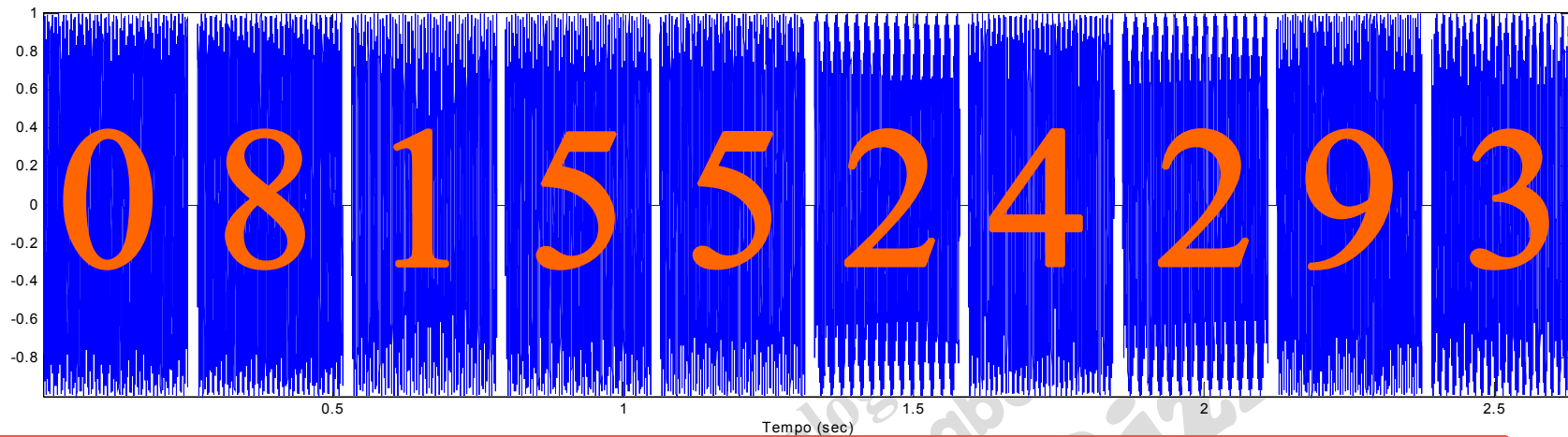
basse frequenze ϕ_{row}

alte frequenze ϕ_{col}

Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#



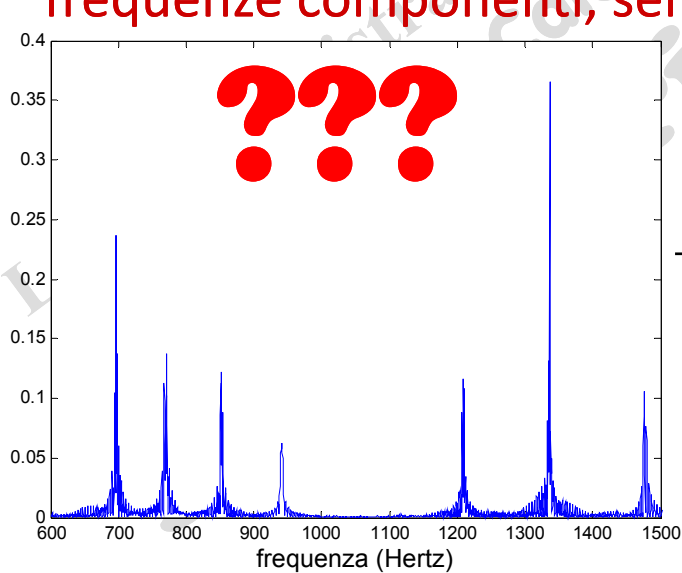
esempio 3



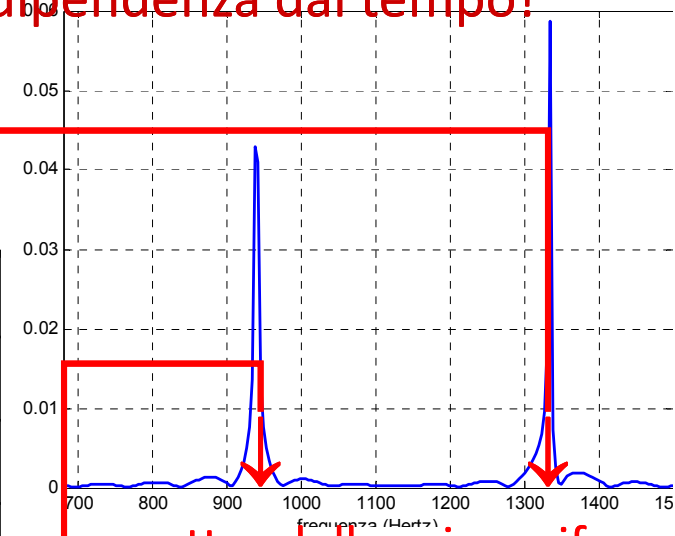
```

info=audioinfo('PhoneNumber.wav')
[y,fs]=audioread('PhoneNumber.wav'); sound(y,fs) % fs: frequenza di campionamento
N=numel(y); Dt=1/fs; tj=Dt*(1:N)'; T=N*Dt;
figure(1); plot(tj,y,'b'); axis tight; xlabel('Tempo (sec)')
Y=fftshift(fft(y)); Y=[Y;Y(1)]*T/N; Dnu=1/T; nuk=(-N/2:N/2)'/T;
figure(2); plot(nuk,abs(Y),'b');
xlabel('frequency (Hertz)'); ylabel('Spectrum of the whole phone number')
    
```

Il suono varia col tempo: lo spettro dell'intero segnale contiene tutte le frequenze componenti, senza mostrare la sua dipendenza dal tempo!



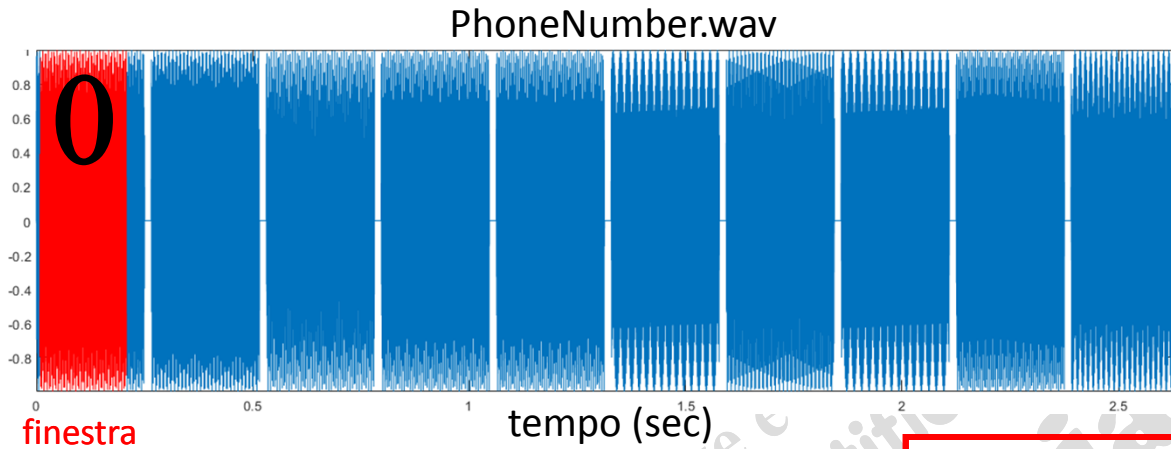
Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#



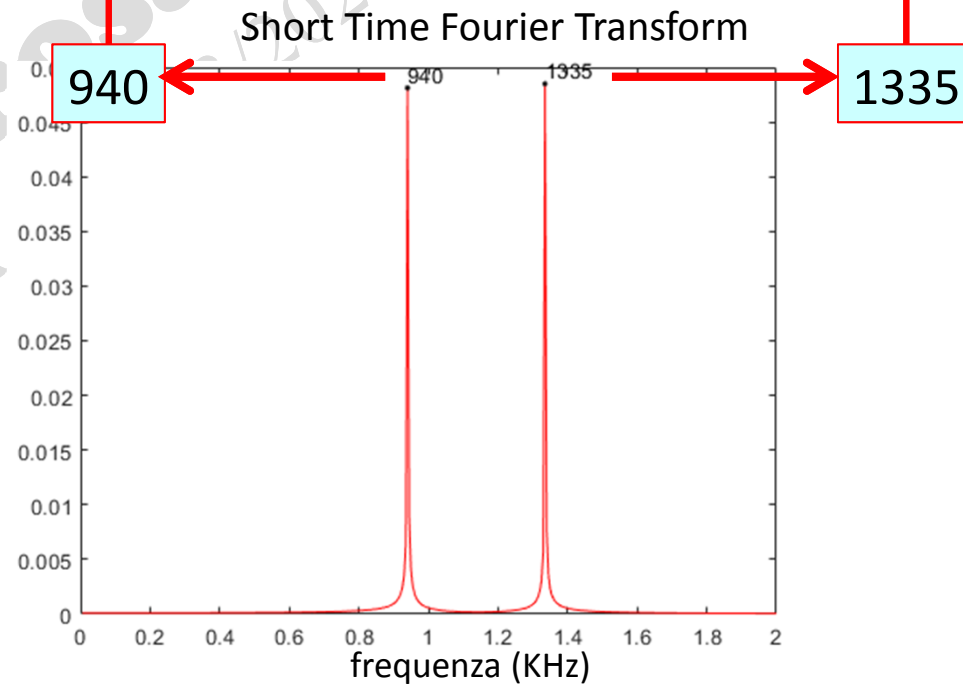
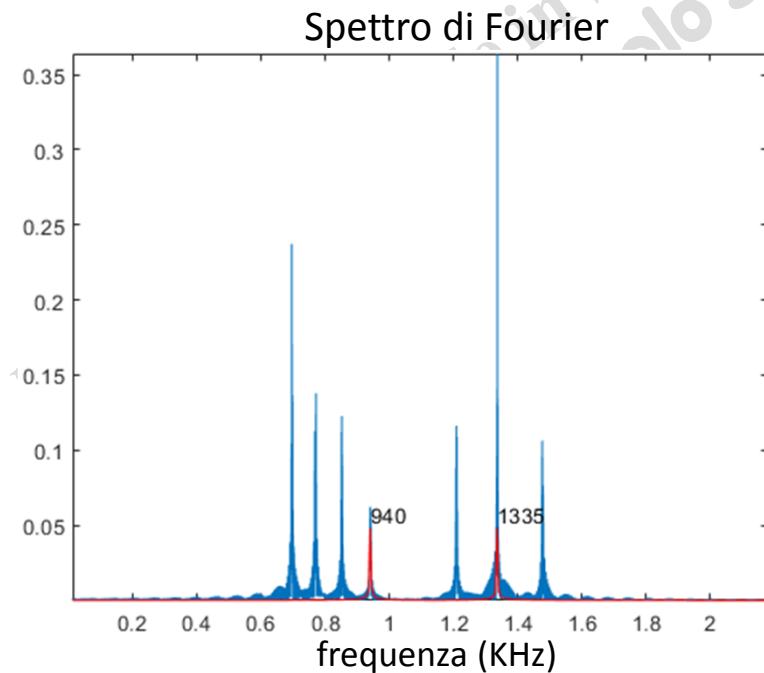
spettro della prima cifra

Si dovrebbe applicare una **finestra mobile** al segnale:
 "Short Time Fourier Transform (STFT)"

Download
 STFT.p
 e PhoneNum.zip

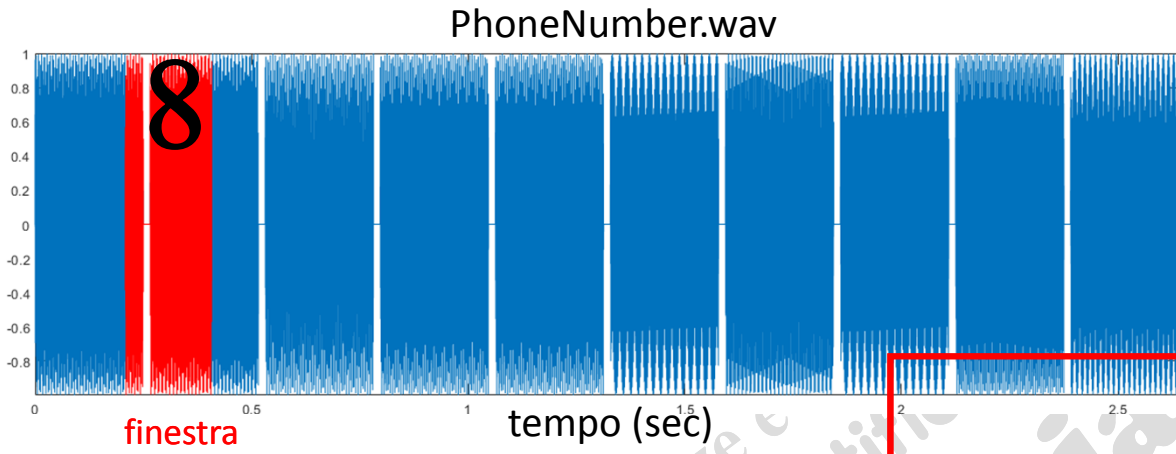


Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#

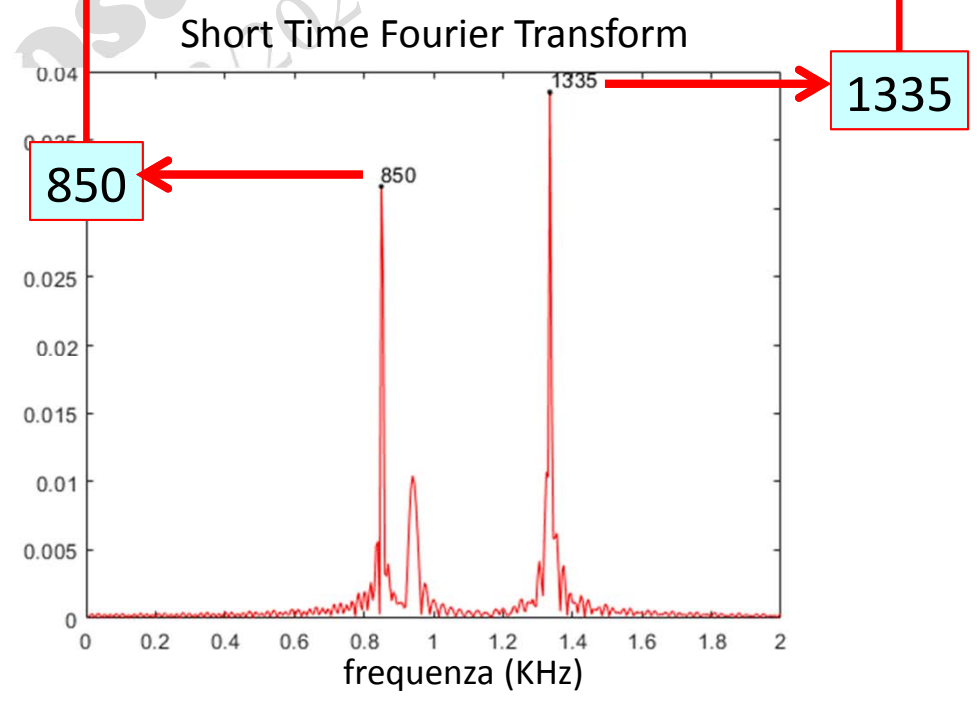
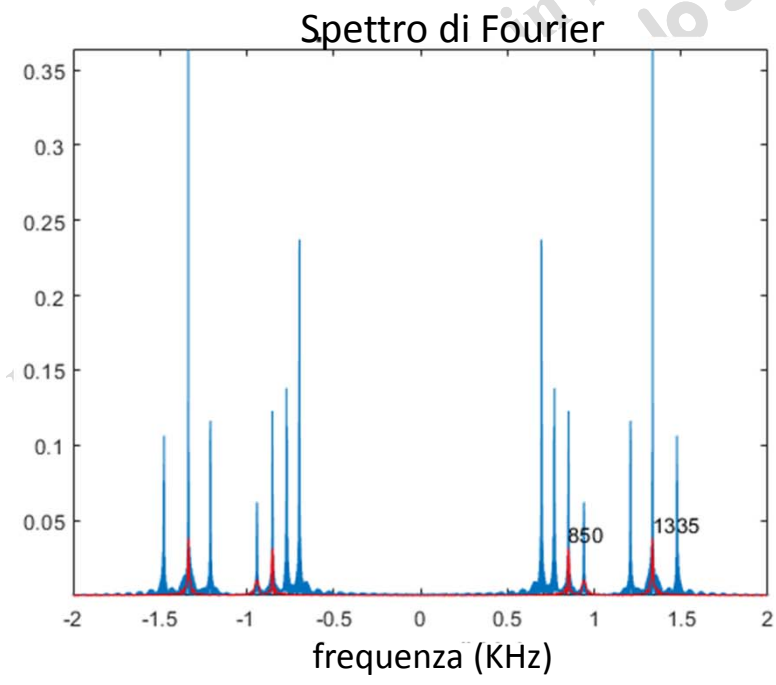


Si dovrebbe applicare una **finestra mobile** al segnale:
 "Short Time Fourier Transform (STFT)"

Download
[STFT.p](#)
 and PhoneNum.zip

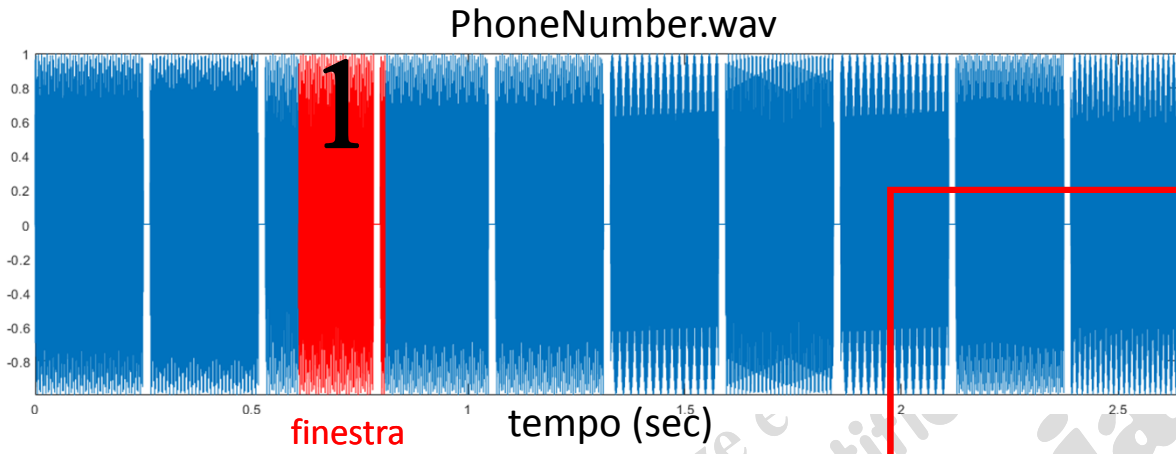


Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#

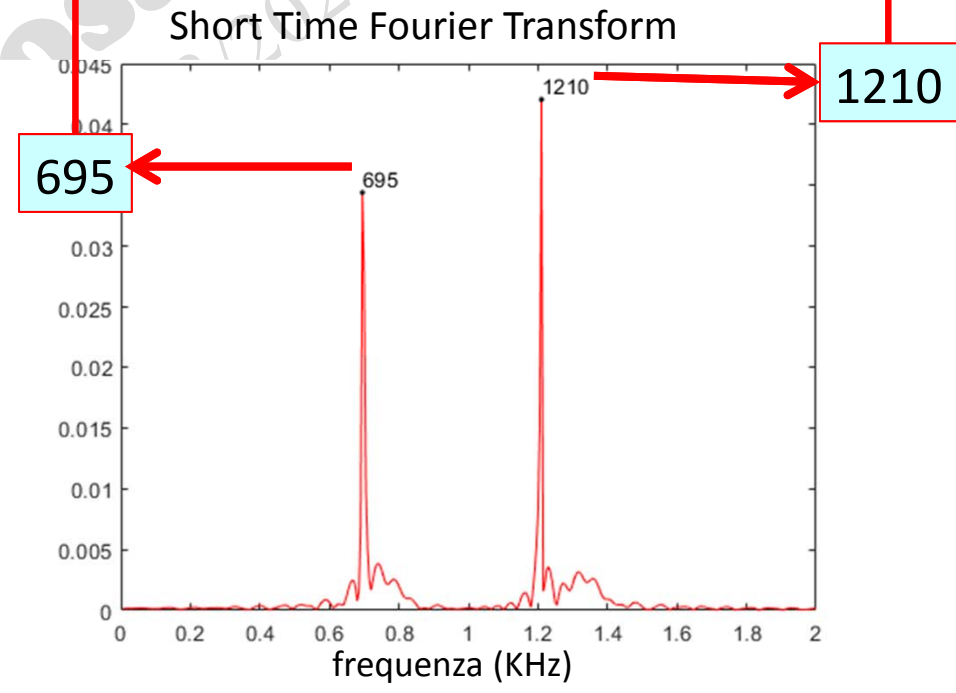
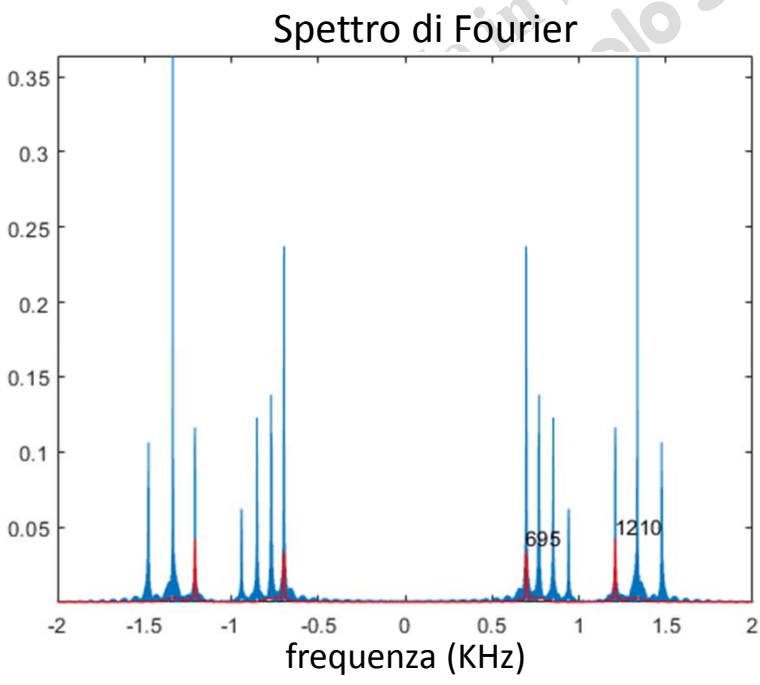


Si dovrebbe applicare una **finestra mobile** al segnale:
 "Short Time Fourier Transform (STFT)"

Download
[STFT.p](#)
 and PhoneNum.zip



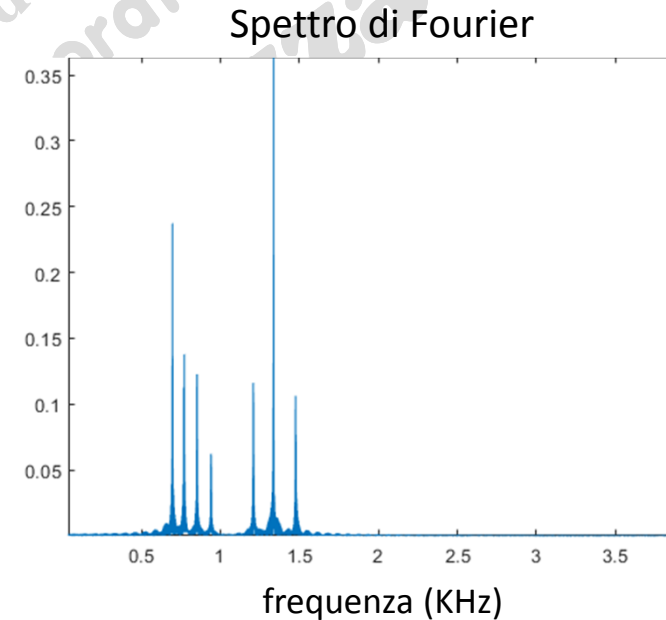
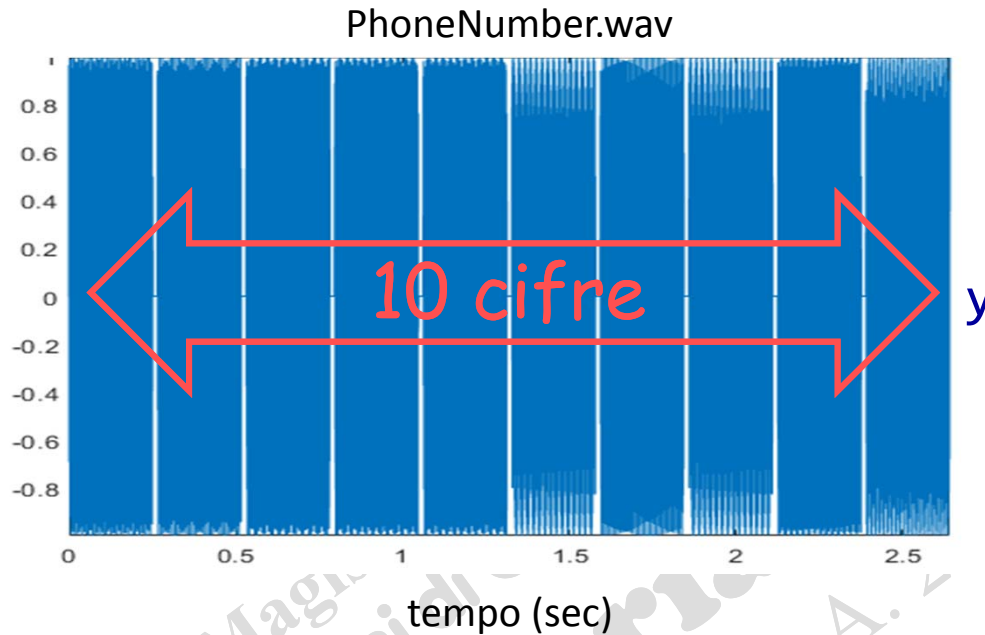
Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#



Si dovrebbe applicare una **finestra mobile** al segnale:
"Short Time Fourier Transform (STFT)"

Download
STFT.p
and PhoneNum.zip

Mettere il codice **STFT.p** nella stessa cartella dei file **PhoneNum.zip**



Eeguire **STFT.p** e rispondere alle domande come segue

```
Total Duration (sec) = 2.6409
Reduce the window? [y/n]: y
T0: origin of the new window (0 <= t0 < 2.6409) = 0
Width T of the new window = numel(y)/10*dt ←
```

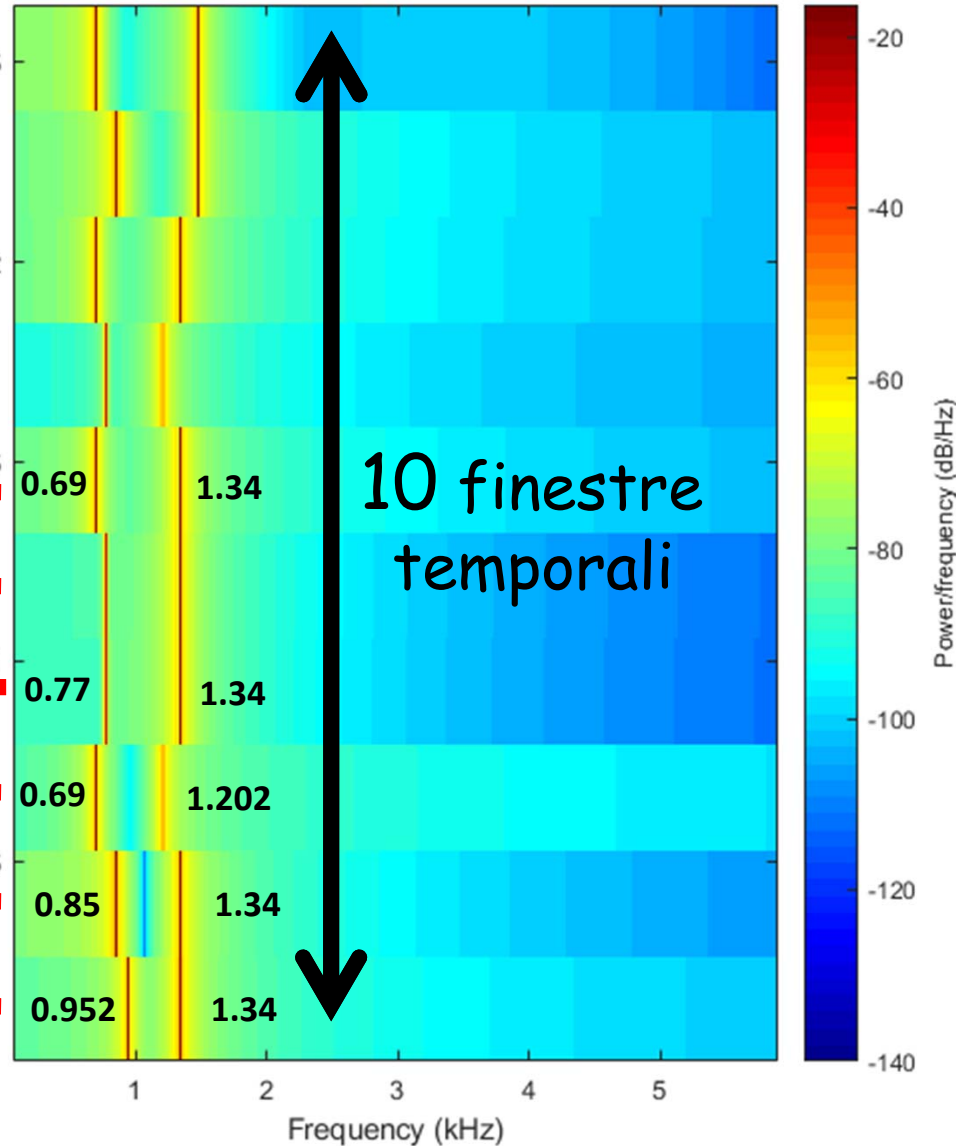
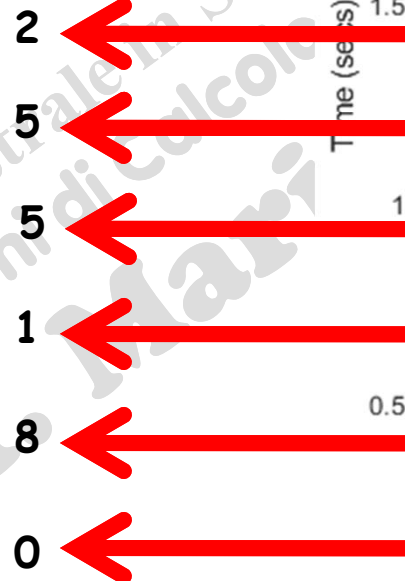
la migliore
risposta

STFT in MATLAB

```
[y,fs]=audioread('PhoneNumber.wav');
M=fix(numel(y)/10);
spectrogram(y,M,0,[ ],fs); colormap('jet')
```

in Signal Processing Toolbox

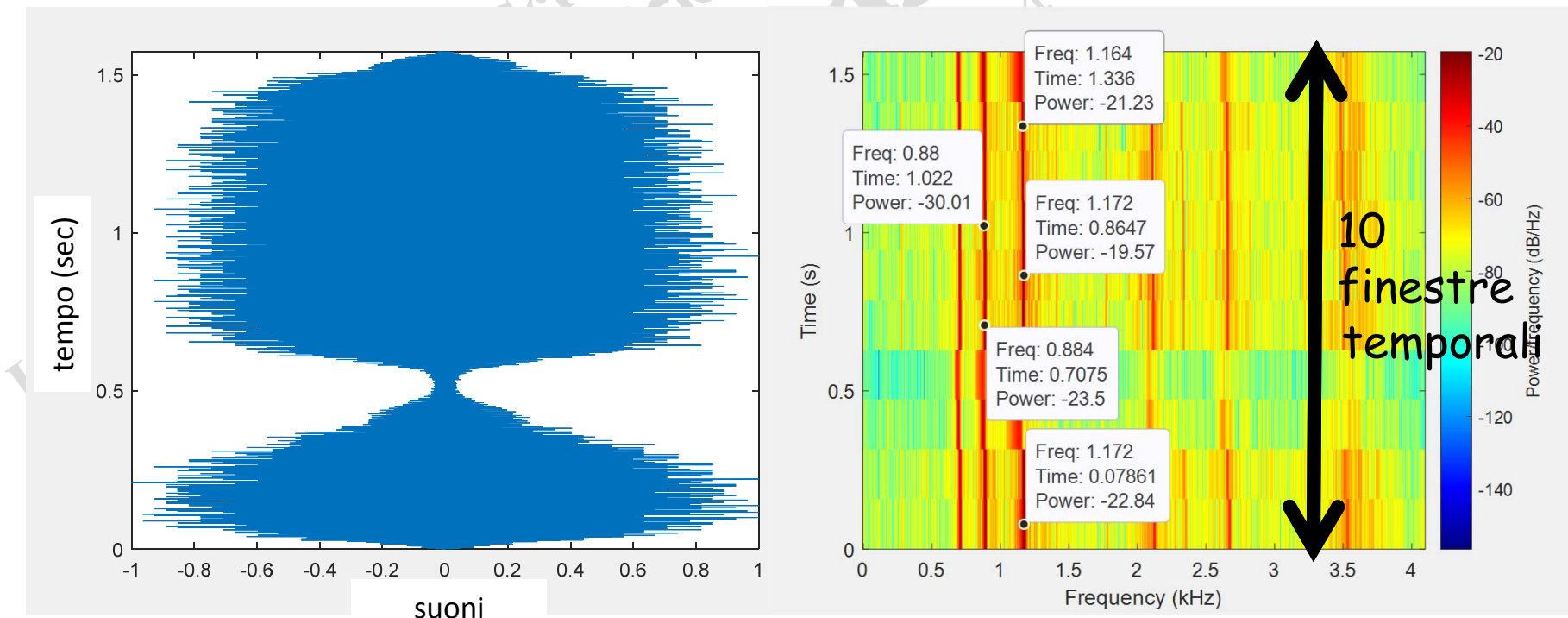
Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#



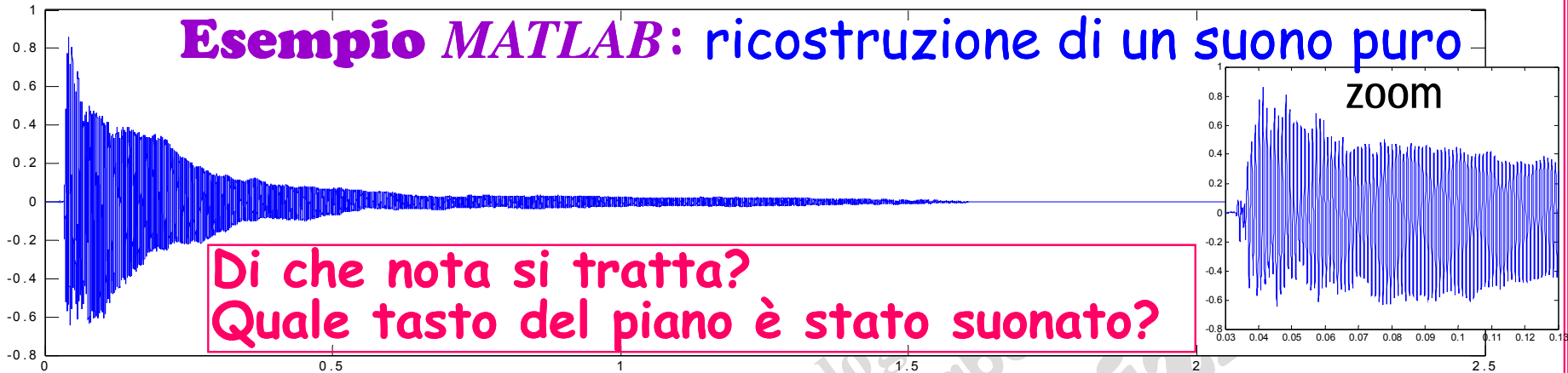
STFT in MATLAB

```
load train; sound(y,Fs) % [y: campioni, Fs: frequenza di campionamento]
Dt=1/Fs                % Periodo = 1/frequenza
Duration=Dt*numel(y);  % durata (tempo)
tj=linspace(0,Duration,numel(y))';
plot(y,tj); axis tight
M=fix(numel(y)/10); spectrogram(y,M,0,[ ],Fs); colormap('jet')
```

Confronta con la tabella di frequenze nel file: `Musical_Note_Frequencies.pdf`



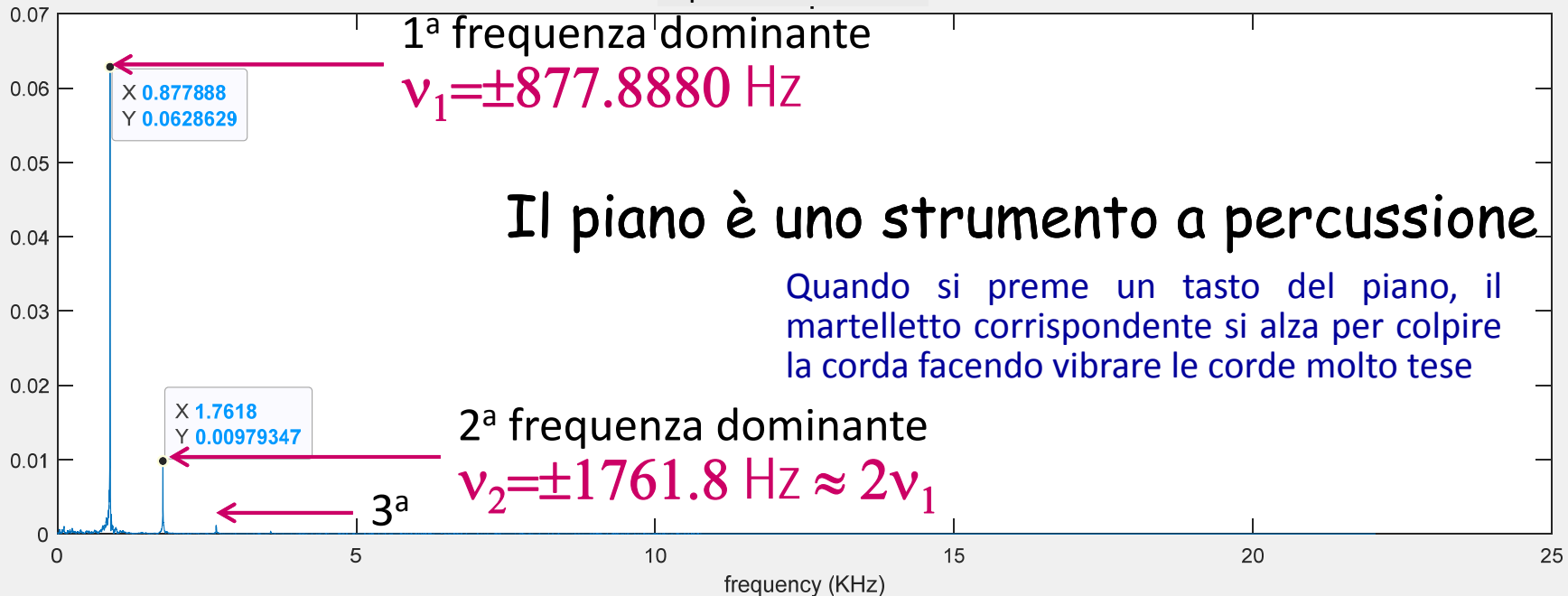
Esempio MATLAB: ricostruzione di un suono puro



Di che nota si tratta?
Quale tasto del piano è stato suonato?

```
[y,fs]=audioread('PIANO.wav'); sound(y,fs)
N=numel(y); Dt=1/fs; tj=Dt*(1:N)'; T=N*Dt; Dnu=1/T;
figure(1); plot(tj,y); xlabel('Time (sec)')
Y=fftshift(fft(y)); Y=[Y;Y(1)]*T/N; nu=(-N/2:N/2)'/T;
figure(2); plot(1e-3*nu,abs(Y)) % KHz
xlabel('frequency (KHz)'); title('Fourier Spectrum')
```

Spettro di Fourier



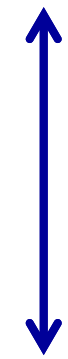
frequenze e note musicali

Navigazione
 Laboratorio di ACS
 Rizzardi

DO5	C5	523 Hz
DO#5	C#5	554 Hz
RE5	D5	587 Hz
RE#5	D#5	622 Hz
MI5	E5	659 Hz
FA5	F5	698 Hz
FA#5	F#5	740 Hz
SOL5	G5	784 Hz
SOL#5	G#5	831 Hz
LA5	A5	880 Hz
LA#5	A#5	932 Hz
SI5	B5	988 Hz
DO6	C6	1046 Hz
DO#6	C#6	1109 Hz
RE6	D6	1175 Hz
RE#6	D#6	1245 Hz
MI6	E6	1319 Hz
FA6	F6	1397 Hz
FA#6	F#6	1480 Hz
SOL6	G6	1568 Hz
SOL#6	G#6	1661 Hz
LA6	A6	1760 Hz
LA#6	A#6	1865 Hz
SI6	B6	1976 Hz

$v=877.8880$ Hz

≈ 880 Hz



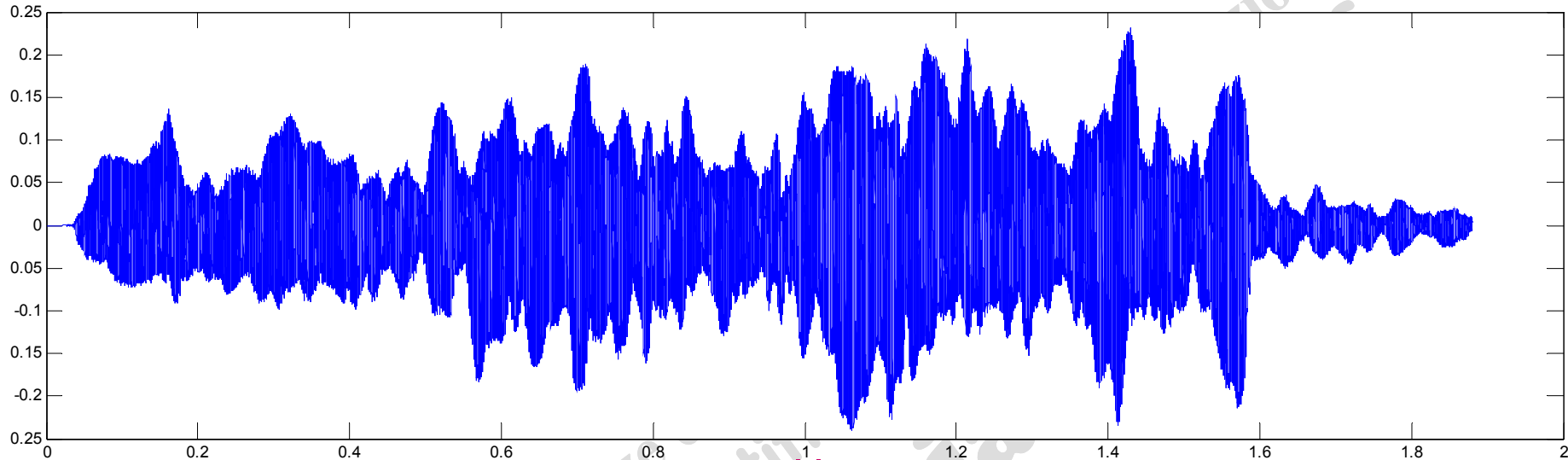
1 ottava

$\approx 1760 = 2 \times 880$

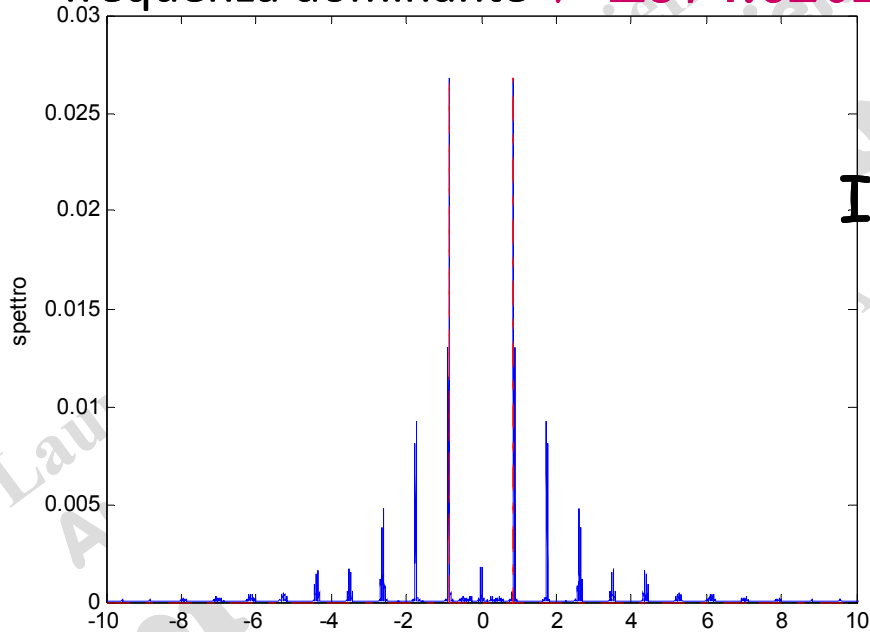
$v=1761$ Hz



Se si ripete l'esperimento con un violino ... (file "VIOLIN.wav")



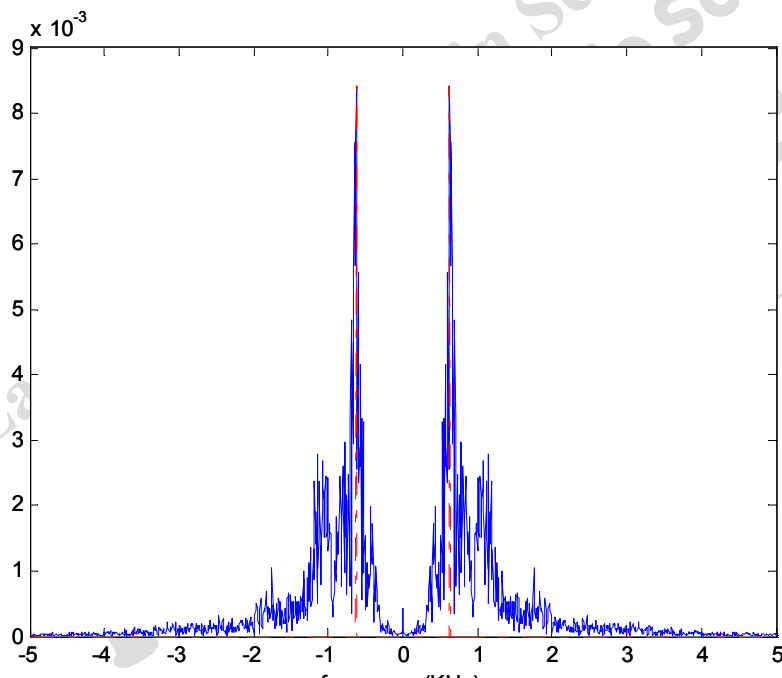
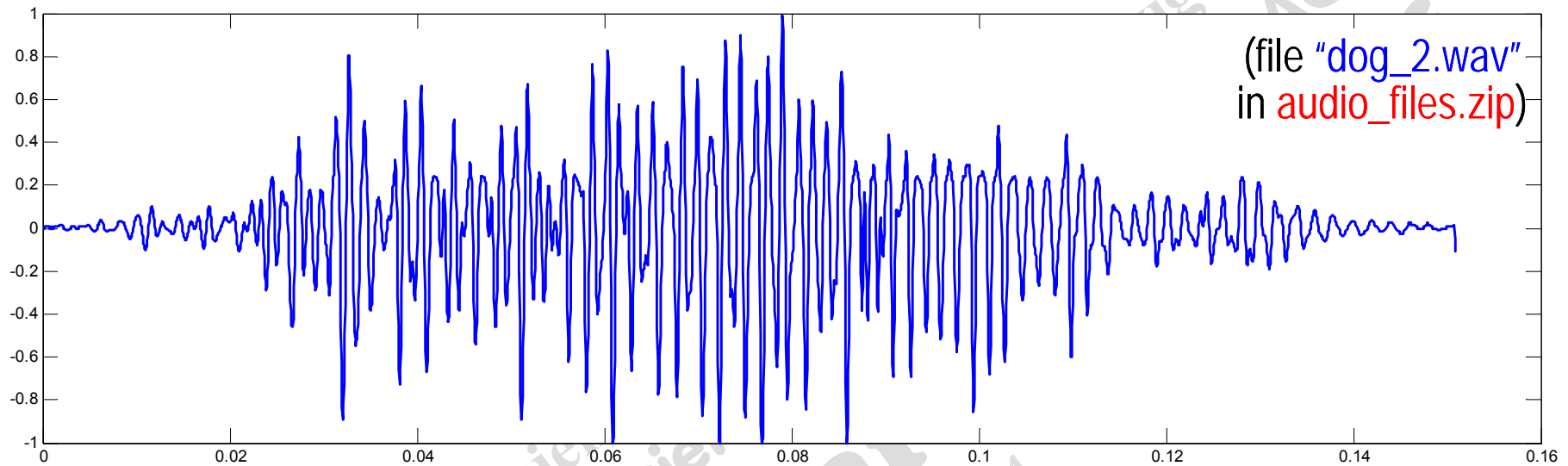
frequenza dominante $\nu = \pm 874.6202$ Hz



Il violino è uno strumento a corda

Una data nota su un violino avrà diverse frequenze che vibrano contemporaneamente, poiché l'archetto del violino tocca più corde.

Se si ripete l'esperimento con un suono non periodico (rumore)

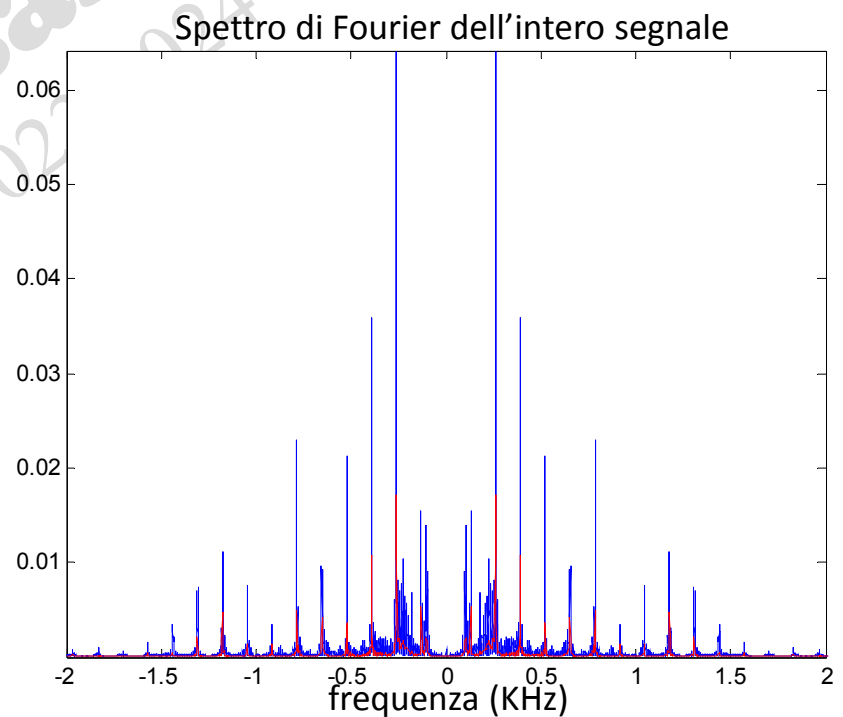
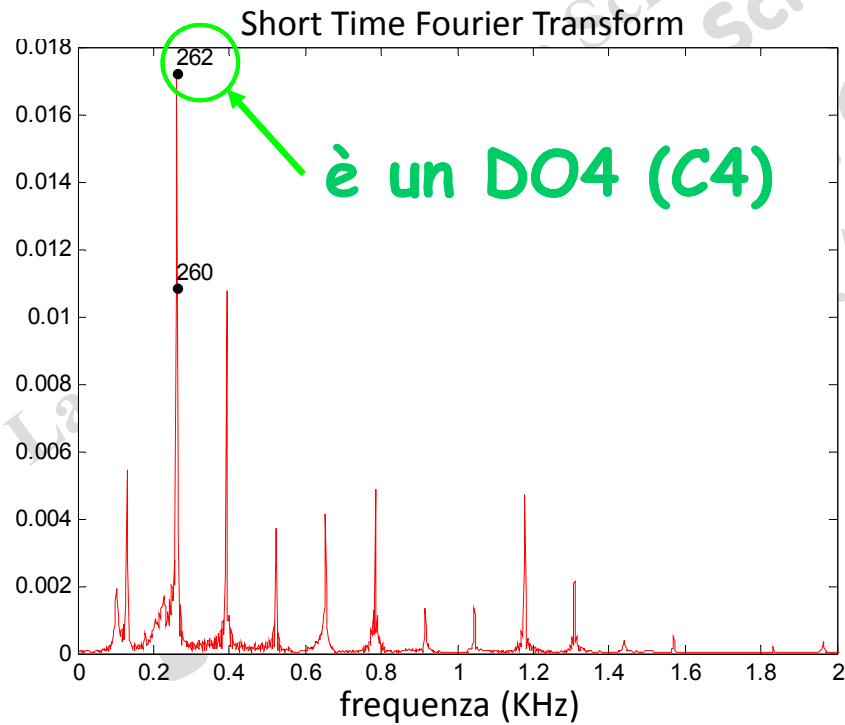
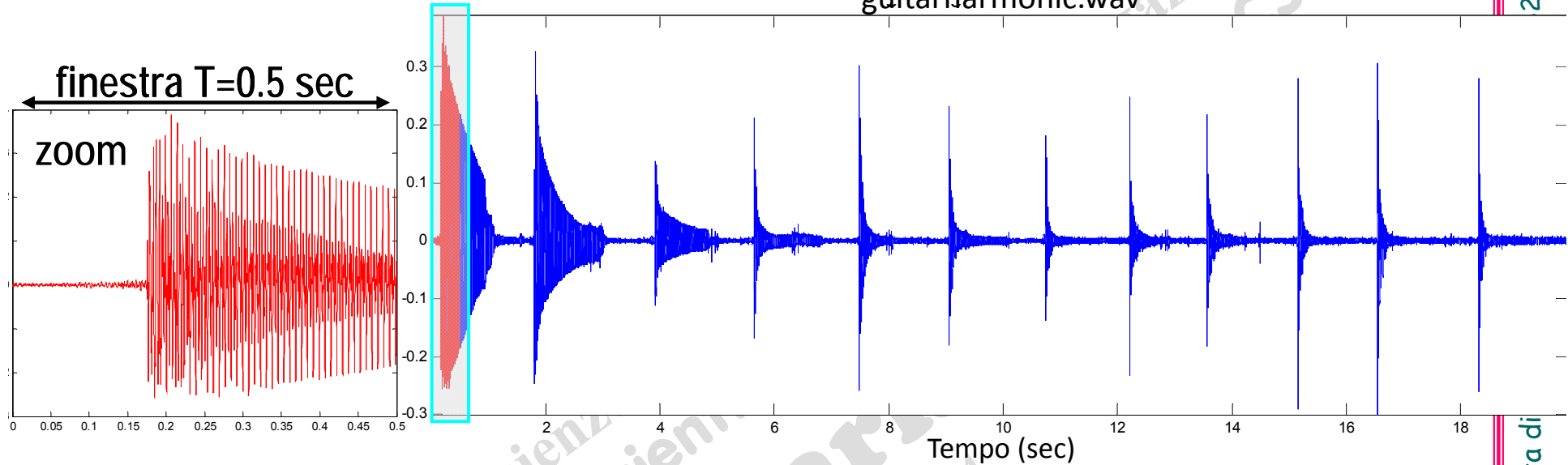


Lo spettro di un suono non periodico contiene infinite frequenze

mediante la Short Time Fourier Transform ...

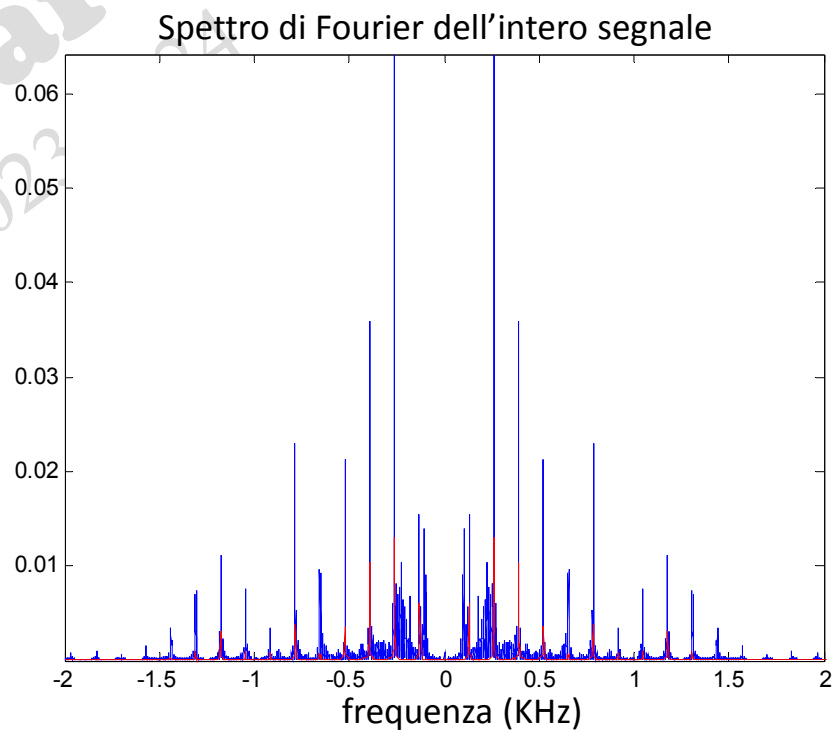
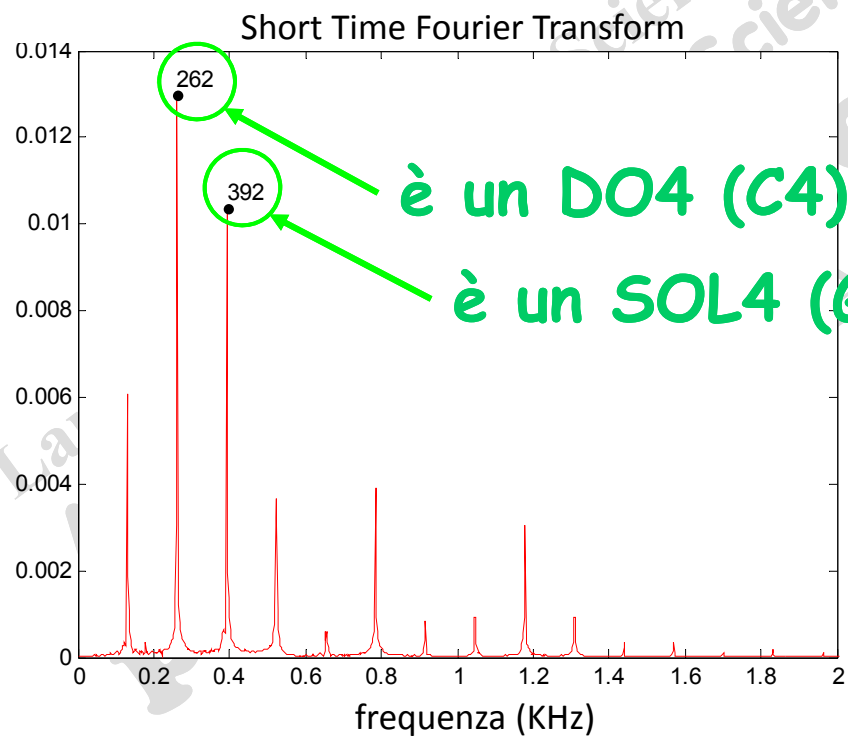
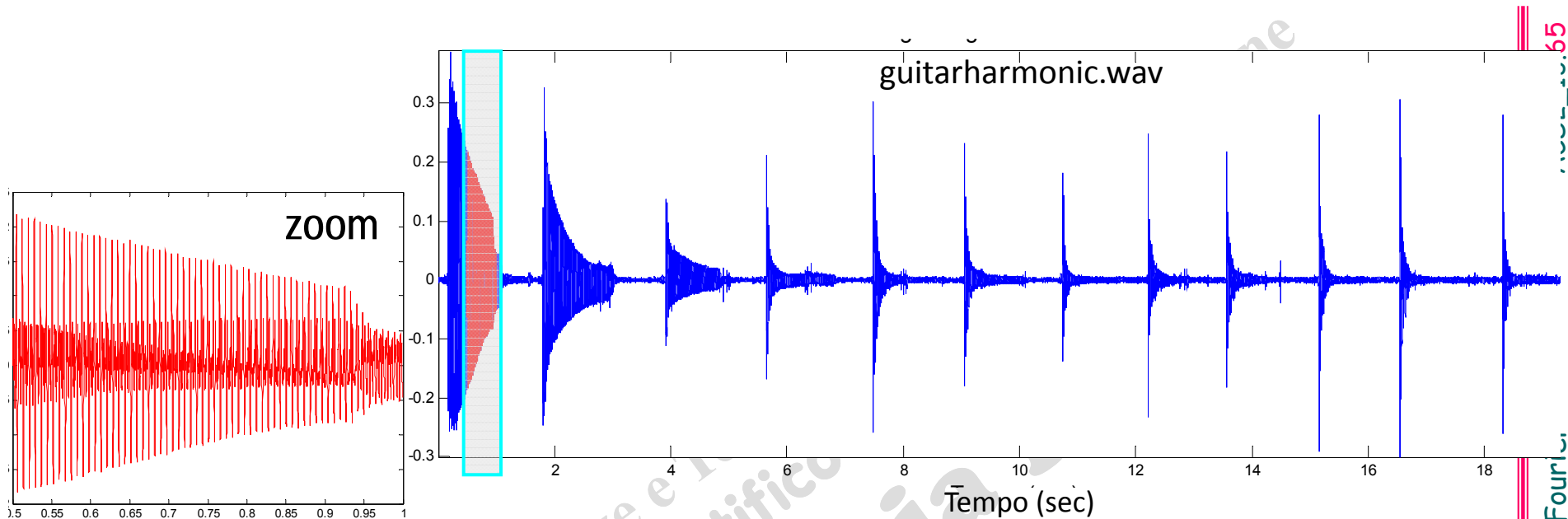
2_13.64

guitarharmonic.wav



Trasformata di

(prof. M. Rizzardi)



Trasformata di Fourier

(prof. M. Rizzardi)

