



SIS Scuola Interdipartimentale
delle Scienze, dell'Ingegneria
e della Salute



Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS (12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4

stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano

tel.: 081 547 6545

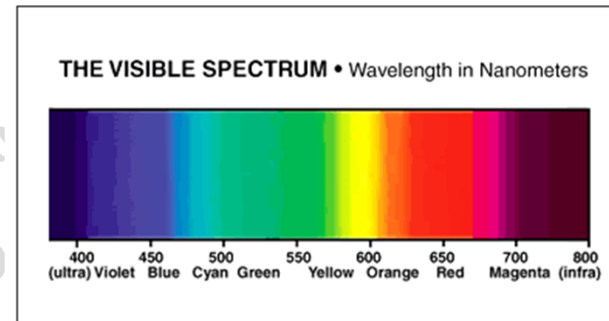
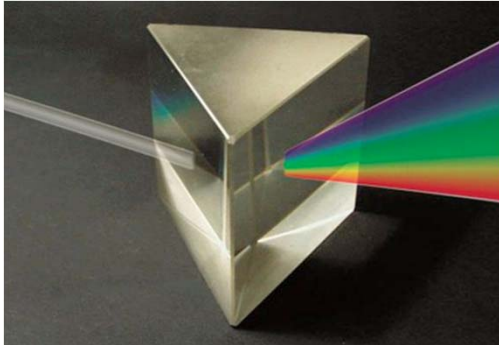
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_12a

Argomenti trattati

- **Esempi di funzioni sommabili ed a quadrato sommabile.**
- **Serie di Fourier (FS).**
- **Esempi.**

Un raggio di luce (come onda elettromagnetica) è formato da "luci" di differenti colori o frequenze, che possono essere separate da un **prisma ottico**. Ogni componente è una luce monocromatica con andamento sinusoidale di una certa frequenza.



Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768 - 1830)

Idea di Fourier

Fourier sosteneva che qualsiasi funzione di una variabile reale, sia essa continua o discontinua, può essere espansa in una serie di funzioni seno di multipli della variabile. Sebbene questo risultato non sia corretto senza condizioni aggiuntive, l'osservazione di Fourier secondo cui alcune funzioni discontinue sono la somma di serie infinite è stata una svolta.

continua $f(x) = \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots$

discontinua $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots \right]$

Già visto

?... cosa si può dire
sulla convergenza in $\|\cdot\|_2$
per gli Spazi a ...

dimensione infinita

???

Già visto

Si dimostra che le *funzioni trigonometriche* $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_k$, o equivalentemente le *funzioni esponenziali* $\{e^{ikx}\}_k$, costituiscono un **sistema ortogonale* completo** rispetto alla $\|\cdot\|_2$ nello Spazio di Hilbert $L^2([-\pi, +\pi])$ delle funzioni a quadrato sommabile su $[-\pi, +\pi]$.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Nello Spazio di Hilbert $L^2([-\pi, +\pi])$ è garantita la **convergenza in $\|\cdot\|_2$** della Serie di Fourier.

* I corrispondenti **sistemi ortonormali** sono dati rispettivamente da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}_k \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_k$$

La **sommabilità** di una funzione $\varphi(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è una proprietà più generale dell'**integrabilità di Riemann*** perché, anche se la funzione non è continua, garantisce l'esistenza e la finitezza dell'integrale, cioè:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| dx = \lim_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |\varphi(x)| dx < \infty$$

* L'integrale di Riemann è il limite delle somme di Riemann

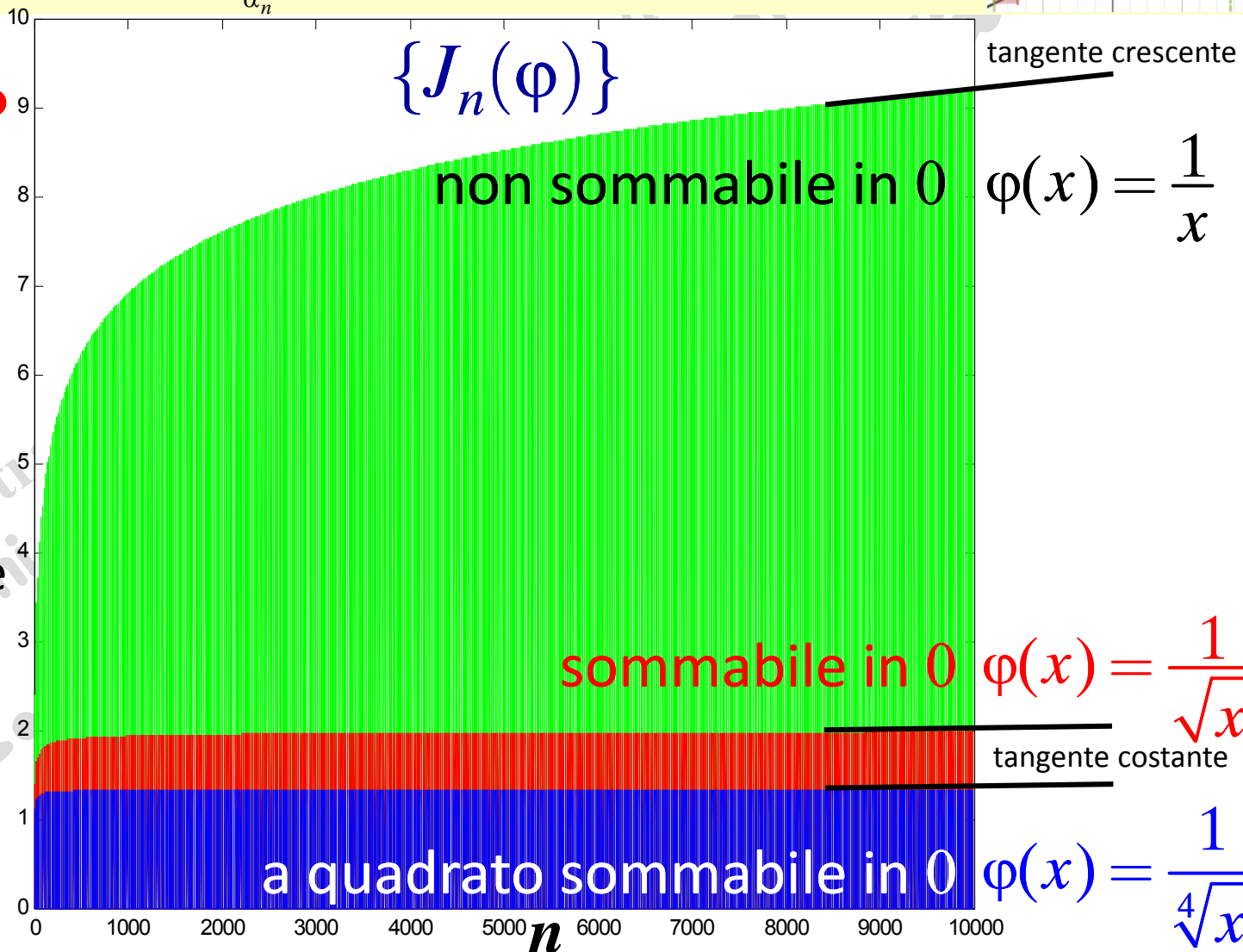


Esempio

grafici della successione $\{J(n)\}$

$$J(n) = \int_{1/n}^1 \varphi(x) dx$$

per l'integrale $\int_0^1 \varphi(x) dx$



Esempi: funzioni sommabili e non

$$\int_0^1 \varphi(x) dx$$

```
syms x n positive; f0=1/x;
J0=int(f0,1/n,1)           {J_n(f)}
J0 =
log(n)
[int(f0,0,1) limit(J0,n,inf)]
ans =
[ Inf, Inf ]
fplot(J0,[1,1000],'Color','g')
```

non sommabile in 0 a quadrato sommabile in 0

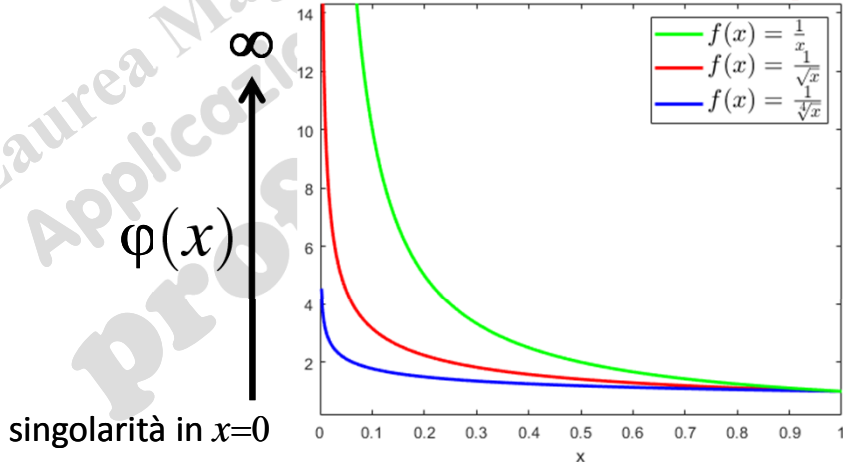
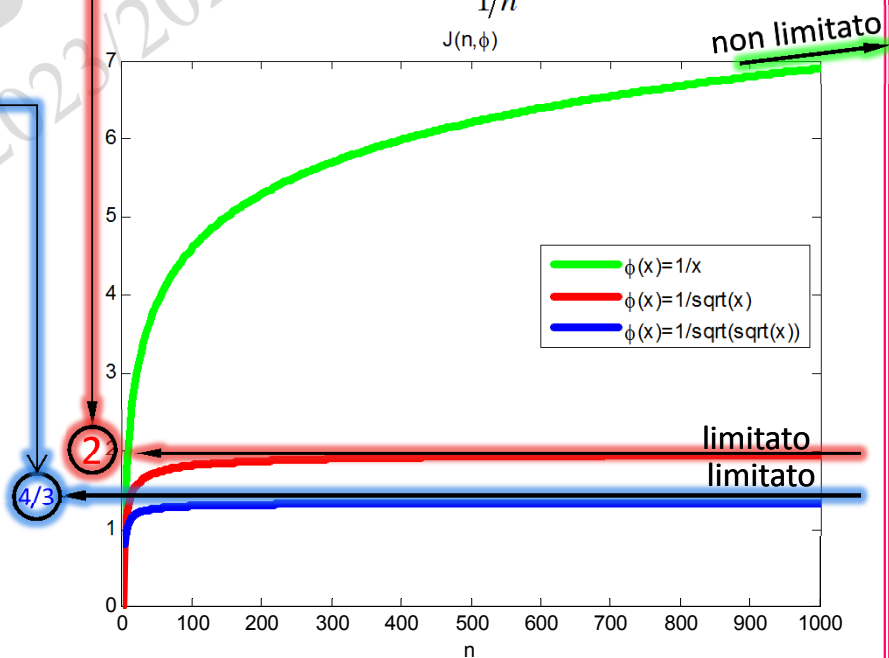
```
syms x n positive; f1=1/sqrt(x);
J1=int(f1,1/n,1)           {J_n(f)}
J1 =
2 - 2/n^(1/2)
[int(f1,0,1) limit(J1,n,inf)]
ans =
[ 2 2 ]
fplot(J1,[1,1000],'Color','r')
```

sommabile in 0

```
syms x n; f2=1/sqrt(sqrt(x));
J2=int(f2,1/n,1)           {J_n(f)}
J2 =
4/3 - 4/(3*n^(3/4))
[int(f2,0,1) limit(J2,n,inf)]
ans =
[ 4/3, 4/3 ]
fplot(J2,[1,1000],'Color','b')
```

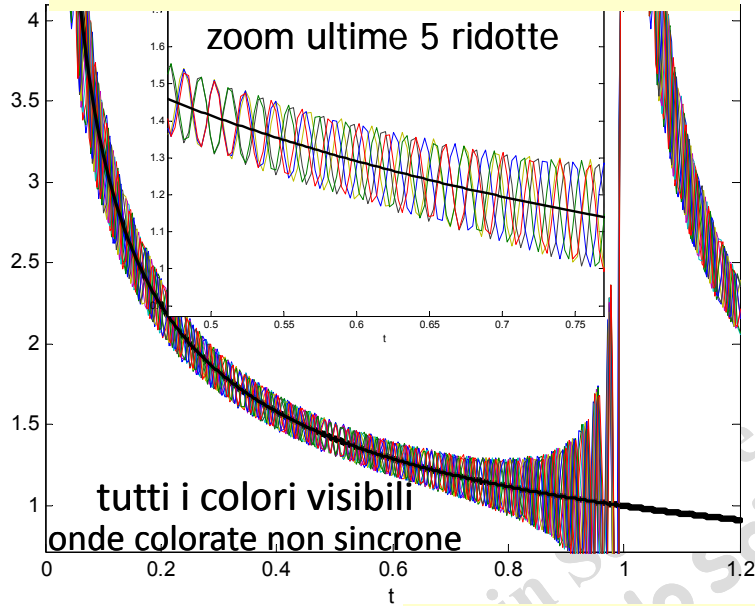
a quadrato sommabile in 0

$$J(n) = \int_{1/n}^1 \varphi(x) dx$$

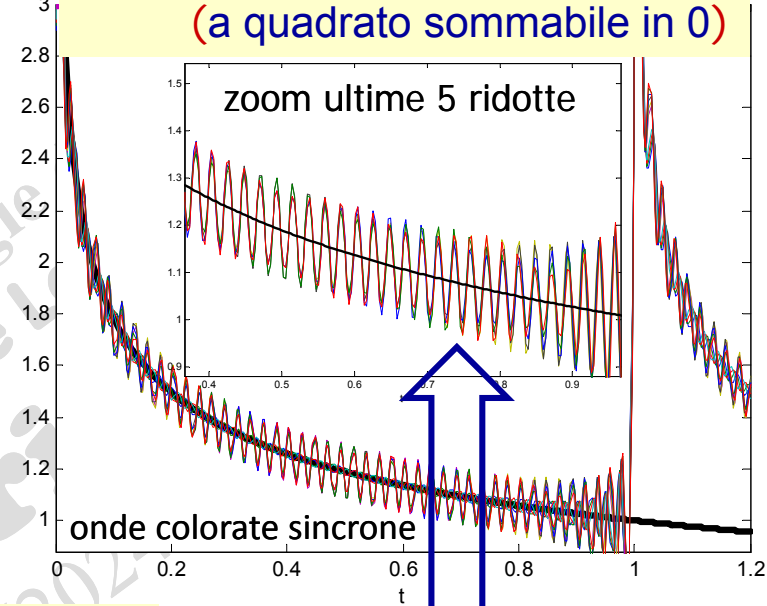


Esempi: ridotte della Serie di Fourier in $[0,1]$ di ...

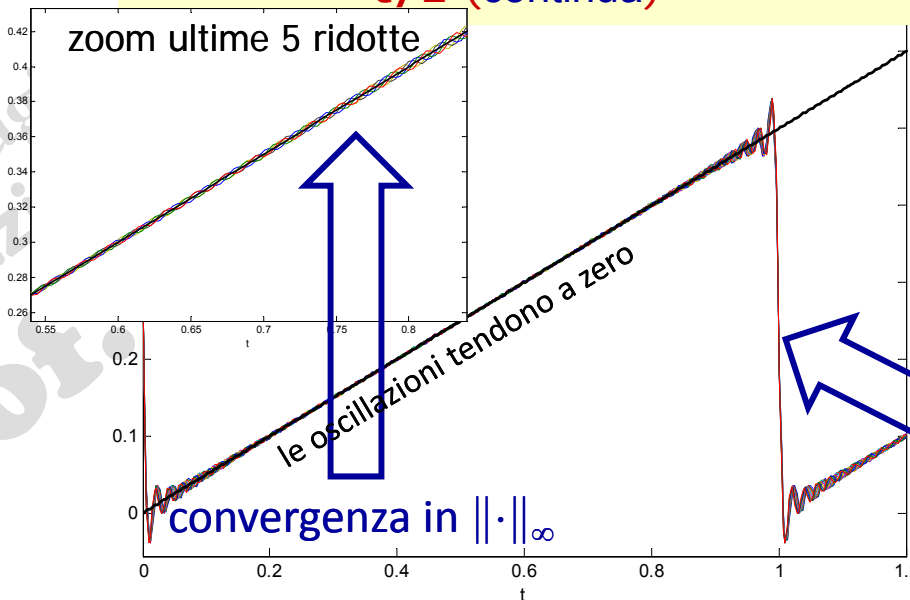
$1/\sqrt{t}$ (sommabile in 0)



$1/\sqrt{t}$ (a quadrato sommabile in 0)



$t/2$ (continua)



convergenza in $\|\cdot\|_2$

convergenza puntuale
tutte le ridotte passano per la
media dei limiti sinistro e destro

Serie di Fourier (FS) di f in $[-\pi, +\pi]$

Una generica serie trigonometrica

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)] \quad (\text{forma reale})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ikx} \quad (\text{forma complessa})$$

Ridotta di ordine (N+1)
(polinomio trigonometrico di grado N)

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)]$$

$$\sum_{k=-N/2}^{+N/2} \gamma_k e^{ikx}$$

N dev'essere pari

è detta **Serie di Fourier** di $f(x)$ in $[-\pi, +\pi]$, **per definizione**, se i suoi coefficienti sono definiti come:

⟨·,·⟩: prodotto scalare

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\langle f, \cos kx \rangle}{\|\cos kx\|_2^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \\ \beta_k &= \frac{\langle f, \sin kx \rangle}{\|\sin kx\|_2^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \\ \gamma_k &= \frac{\langle f, e^{-ikx} \rangle}{\|e^{-ikx}\|_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \end{aligned} \right.$$

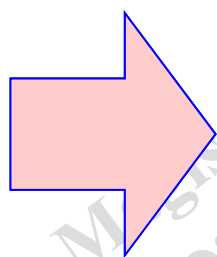
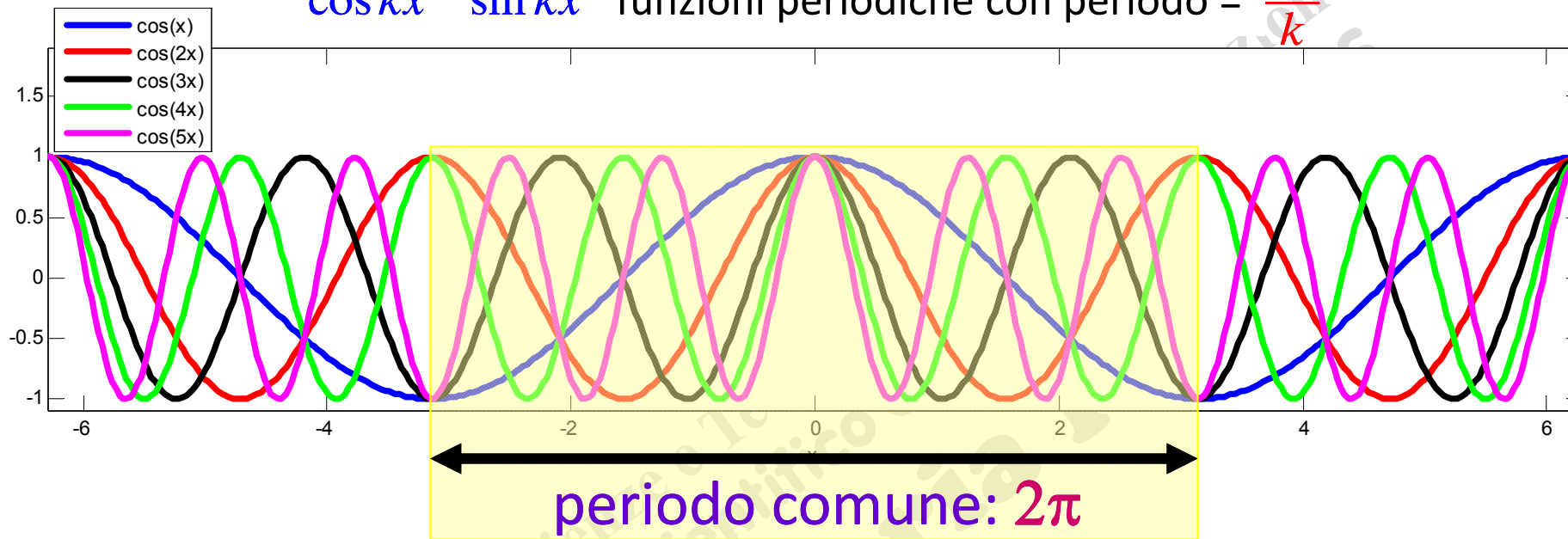
collegamento tra coefficienti
reali e complessi

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\alpha_0}{2} \\ \gamma_k &= \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} \\ \gamma_{-k} &= \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, +\infty$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= 2\gamma_0 \\ \alpha_k &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\ \beta_k &= -i(\gamma_{-k} - \gamma_k) \end{aligned} \right.$$

Esercizio: Verificare mediante il Symbolic Math Toolbox le relazioni tra coefficienti di Fourier reali e complessi

$\cos kx$ $\sin kx$ funzioni periodiche con periodo = $\frac{2\pi}{k}$



$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx]$$

onde elementari

Una **serie trigonometrica**, se convergente, ha sempre una somma continua e periodica di periodo 2π .

Le ridotte di una serie trigonometrica sono **polinomi trigonometrici**

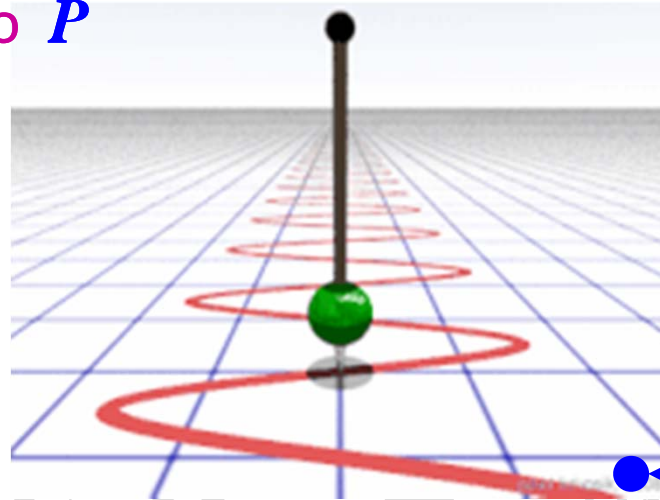
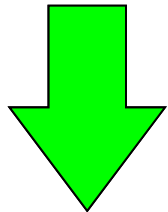
Interpretazione fisica: richiami

onde elementari

moto armonico semplice

periodico di periodo P

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$x(t) = A \sin[\alpha + \omega t]$$

o equivalentemente

$$x(t) = A \cos[\alpha + \omega t]$$

↑
ampiezza

↑
fase

← fase iniziale

frequenza $\nu = \frac{1}{P}$ Se il periodo P è misurato in **secondi**, allora la frequenza ν è misurata in **Hertz = cicli sec^{-1}**

frequenza circolare ν

Hz = cicli sec^{-1}

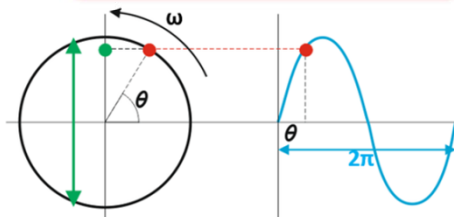
frequenza angolare ω

radianti sec^{-1}

$$\omega = 2\pi\nu$$

frequenza ν :

numero di cicli completi o oscillazioni per unità di tempo



frequenza ω :

velocità angolare, cioè la velocità di cambiamento dell'angolo

Già visto

Polinomi Trigonometrici di periodo 2π

Polinomio algebrico di grado N ($N+1$ coefficienti)

$$P_N(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_N x^N$$

Polinomio trigonometrico di grado N ($N+1$ coefficienti)
funzione periodica di periodo 2π

$$S_N(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \dots \\ \dots + \alpha_{\frac{N}{2}} \cos \frac{N}{2} x + \beta_{\frac{N}{2}} \sin \frac{N}{2} x$$

forma reale

Serie di Fourier

ACS2_12.11

forma complessa

(prof. M. Rizzardi)

$S_N(x) \in \mathbb{R}$, coefficienti reali

sostituendo: $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$; $\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

... diventa:

$$T_N(x) = \gamma_{-\frac{N}{2}} e^{-i\frac{N}{2}x} + \dots + \gamma_{-2} e^{-i2x} + \gamma_{-1} e^{-ix} + \gamma_0 + \\ + \gamma_1 e^{ix} + \gamma_2 e^{i2x} + \dots + \gamma_{+\frac{N}{2}} e^{+i\frac{N}{2}x}$$

$T_N(x) \in \mathbb{C}$, coefficienti complessi

N pari

$+i\frac{N}{2}x$

Già visto

Polinomi Trigonometrici

Un particolare **polinomio trigonometrico** $Q(x)$ con $N+1$ coefficienti è il seguente:

$$Q(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{i2x} + c_3 e^{i3x} + \dots + c_N e^{iNx}$$

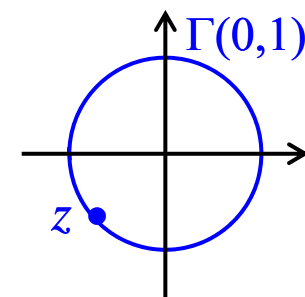
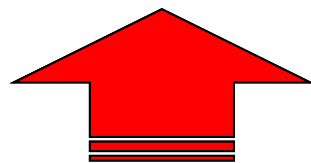
in **complex form** ($Q(x) \in \mathbb{C}$)

$Q(x)$ è un particolare **polinomio trigonometrico** di **grado $2N$** con N coefficienti nulli (quelli con indici negativi)

Q è una funzione **periodica** di periodo 2π

Con la sostituzione $z = e^{ix}$, per $x \in \mathbb{R}$, Q diventa

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_N z^N$$



Q sembra un **polinomio algebrico** di **grado N** , calcolato in $z = e^{ix} \in \Gamma(0,1)$ (cioè sulla circonferenza unitaria di centro \mathbf{O}): z è **periodica**

Già visto

Relazione tra polinomi trigonometrici ed algebrici

N pari

In generale, se si scrive

$$T_N(x) = \gamma_{-\frac{N}{2}} e^{-i\frac{N}{2}x} + \dots + \gamma_{-2} e^{-i2x} + \gamma_{-1} e^{-ix} + \gamma_0 + \gamma_1 e^{ix} + \gamma_2 e^{i2x} + \dots + \gamma_{+\frac{N}{2}} e^{+i\frac{N}{2}x}$$

come

$$T_N(x) = e^{-i\frac{N}{2}x} \left(\gamma_{-\frac{N}{2}} + \gamma_{-\frac{N}{2}+1} e^{ix} + \gamma_{-\frac{N}{2}+2} e^{i2x} + \dots + \gamma_0 e^{i\frac{N}{2}x} + \gamma_1 e^{i(\frac{N}{2}+1)x} + \gamma_2 e^{i(\frac{N}{2}+2)x} + \dots + \gamma_{+\frac{N}{2}} e^{iNx} \right)$$

posto $z = e^{ix}$, per $x \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$T_N(z) = z^{-\frac{N}{2}} \left(\gamma_{-\frac{N}{2}} + \gamma_{-\frac{N}{2}+1} z + \gamma_{-\frac{N}{2}+2} z^2 + \dots + \gamma_0 z^{\frac{N}{2}} + \gamma_1 z^{\frac{N}{2}+1} + \gamma_2 z^{\frac{N}{2}+2} + \dots + \gamma_{+\frac{N}{2}} z^N \right)$$

$$e^{-i\frac{N}{2}x}$$

$$T_N(z) = z^{-\frac{N}{2}} Q(z) \quad \leftarrow Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_N z^N$$

Già visto

N qualsiasi

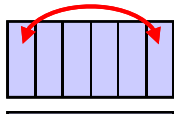
Come valutare un polinomio trigonometrico in MATLAB

$$Q(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{i2x} + \dots + c_N e^{iNx}$$

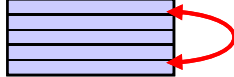
$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N \quad \leftarrow z = e^{ix}$$

```
z=exp(i*x); Q=polyval(fliplr(c), z);
```

flip left right



flip up down



fliplr(A): perché $c=[c_0, c_1, c_2, \dots, c_M]$ è un vettore riga,
flipud(A): se c è un vettore colonna,
flip(A,dim): funziona come **flipud()** se **dim=1**; come **fliplr()** se **dim=2**.

$$T_N(z) = z^{-\frac{N}{2}} \left(\gamma_{-\frac{N}{2}} + \gamma_{-\frac{N}{2}+1} z + \gamma_{-\frac{N}{2}+2} z^2 + \dots + \gamma_0 z^{\frac{N}{2}} + \gamma_1 z^{\frac{N}{2}+1} + \gamma_2 z^{\frac{N}{2}+2} + \dots + \gamma_{+\frac{N}{2}} z^N \right)$$

N pari

$$T_N(z) = z^{-\frac{N}{2}} \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_N z^N \right) \quad \leftarrow z = e^{ix}$$

Q(z)

```
z=exp(i*x); T_N = z.^(-N/2) .* polyval(fliplr(c), z);
```

Esempio di Serie di Fourier in $[-\pi, +\pi]$

$$\phi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx],$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos(kt) dt \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \sin(kt) dt \end{aligned} \right.$$

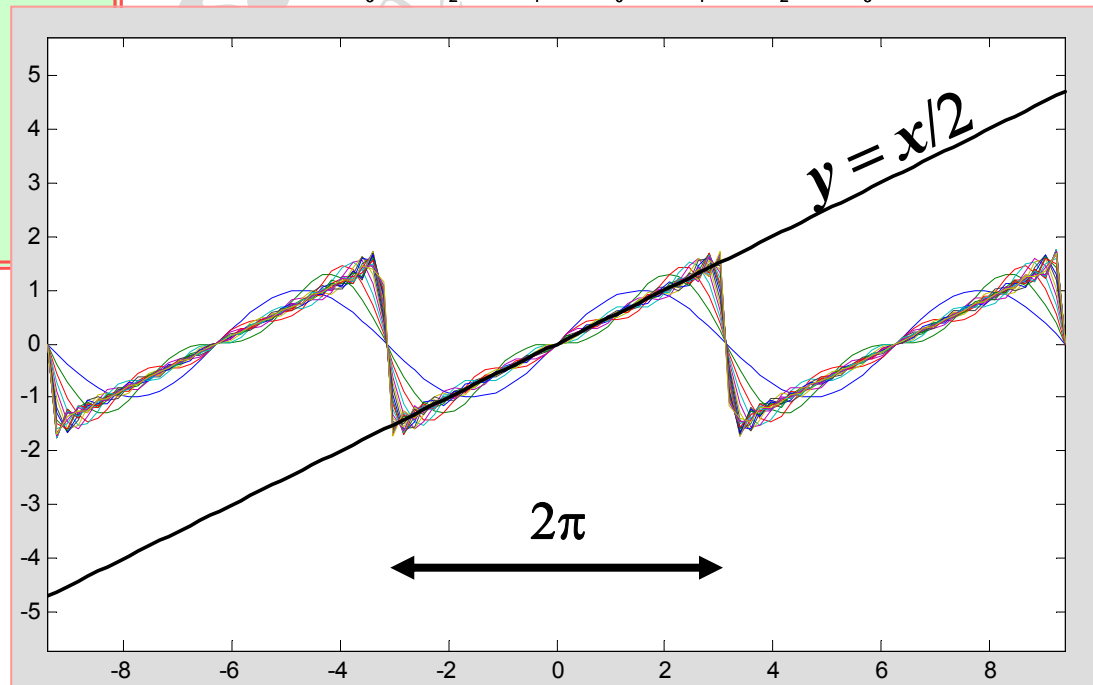
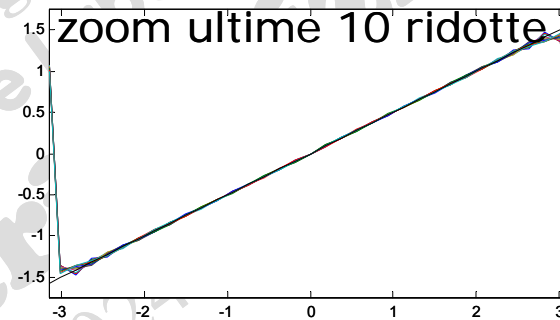
$$\phi(x) = \frac{1}{2}x \sim \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

ordine ridotte

```
syms t; f = t / 2; k=(0:60)';
a(1+k)=1/pi*int(f.*cos(k*t),t,-pi,pi);
b(1+k)=1/pi*int(f.*sin(k*t),t,-pi,pi);
double([a' b'])
```

```
ans =
    0         0
    0         1
    0        -0.5
    0     0.3333
    0     -0.25
    0         0.2
    ...
```

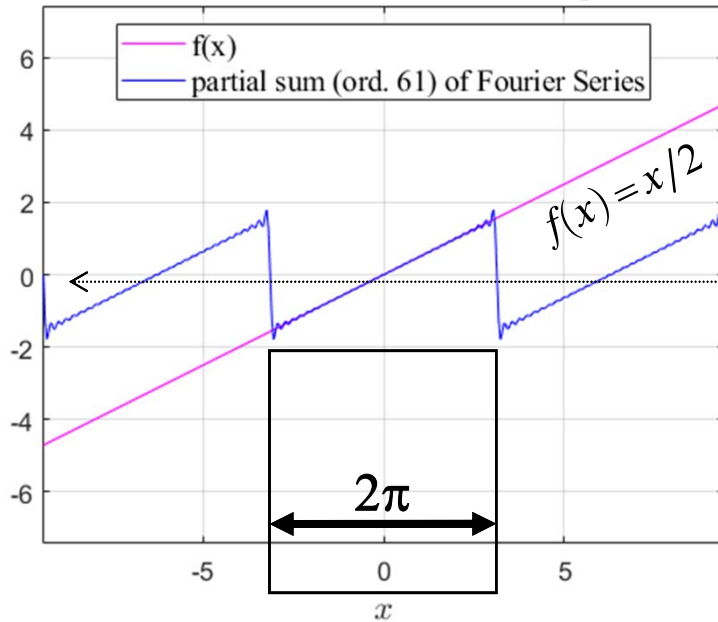
1
-1/2
1/3
-1/4
1/5



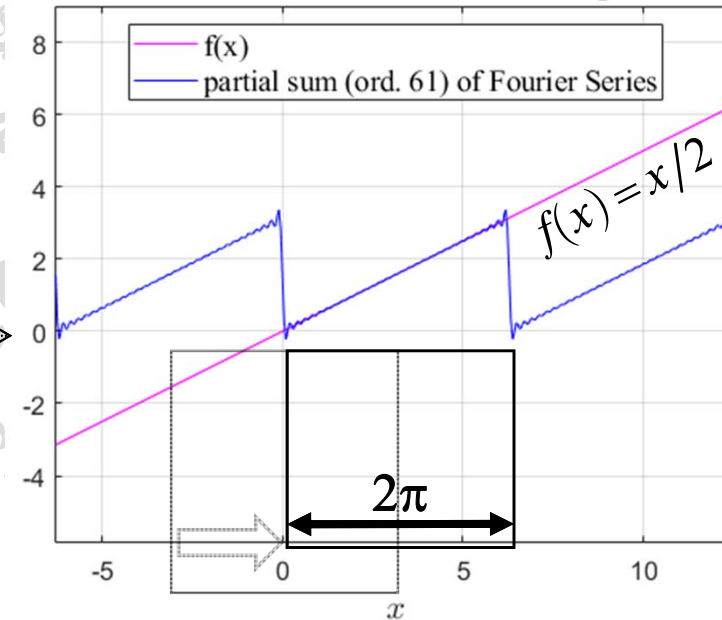
Esempio di Serie di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x \sim \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots$$

Approximation of the function $f(x) = \frac{x}{2}$ in $[-\pi, +\pi]$

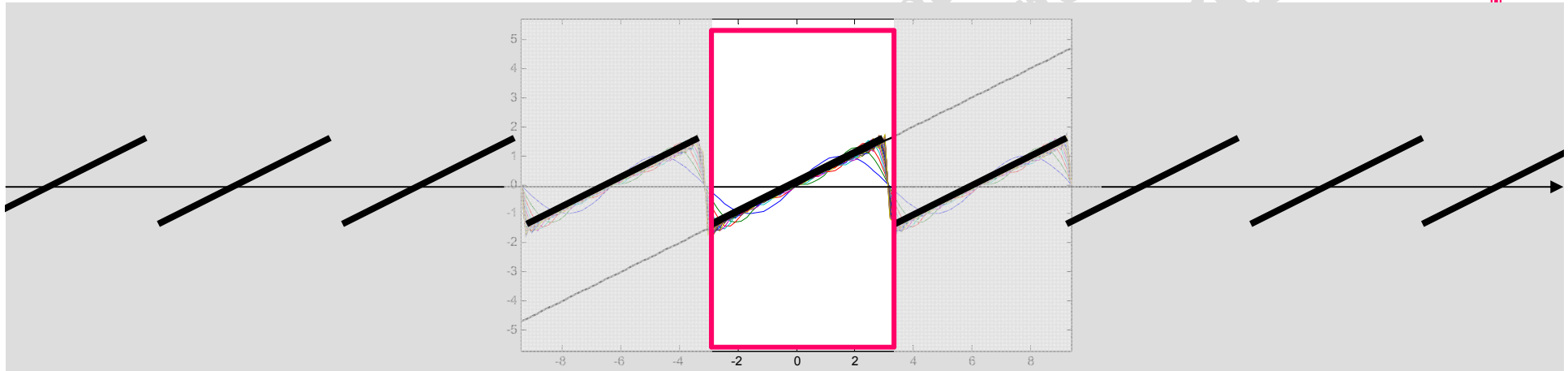


Approximation of the function $f(x) = \frac{x}{2}$ in $[0, +2\pi]$



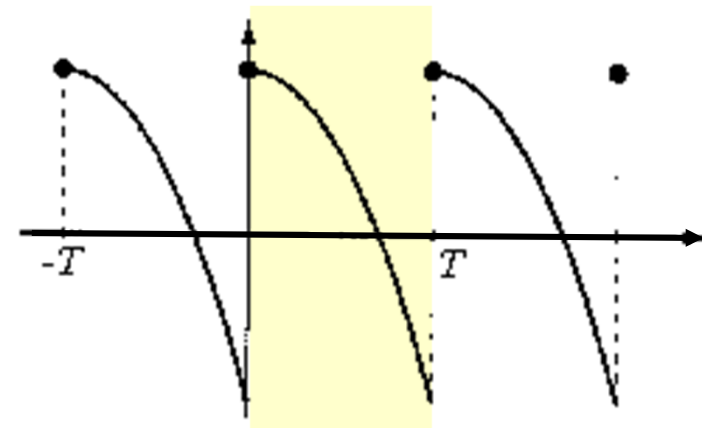
La Serie di Fourier si adatta all'andamento della **restrizione della funzione $f(x)$** all'intervallo dove viene costruita, per poi ripetersi periodicamente.

La Serie di Fourier di $\phi(t)$ in un intervallo di ampiezza T descrive la **ripetizione periodica** (o **estensione periodica**) di $\phi_T(t)$, dove $\phi_T(t)$ è la **restrizione di $\phi(t)$ all'intervallo**.



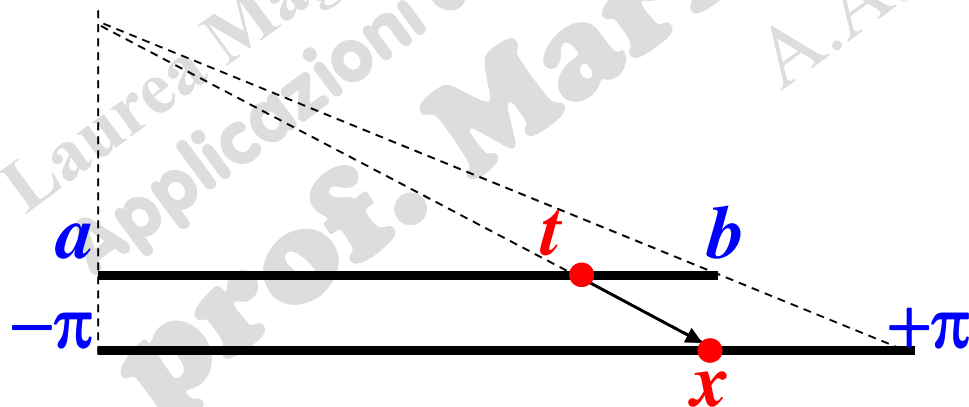
In generale la **ripetizione periodica** di $\phi_T(t)$ di periodo T nell'intervallo $[0, T]$ è definita come

$$\tilde{\phi}_T(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [0, T[\\ \tilde{\phi}_T(t - T) & t \in [T, +\infty[\\ \tilde{\phi}_T(t + T) & t \in]-\infty, 0[\end{cases}$$



Ovviamente, nella precedente definizione della Serie di Fourier, l'intervallo $[-\pi, +\pi]$ (o $[0, +2\pi]$) e il periodo 2π non costituiscono una limitazione. Infatti mediante la seguente **affinità** si può scrivere una **Serie di Fourier** relativamente ad un generico intervallo $[a, b]$ e di periodo $b - a$:

$$t \in [a, b] \longrightarrow x = \frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \in [-\pi, +\pi]$$



Di quali trasformazioni affini elementari si compone?

Serie di Fourier (FS) di f in $[a, b]$ di periodo $b-a$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)]$$

$$t \in [a, b] \longrightarrow x = \frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \in [-\pi, +\pi]$$



$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \cos \left[k \left[\frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \right] \right] + \beta_k \sin \left[k \left[\frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \right] \right] \right\}$$

forma reale

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\tau) \cos \left[k \left[\frac{2\pi}{b-a}(\tau-a) - \pi \right] \right] d\tau \\ \beta_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\tau) \sin \left[k \left[\frac{2\pi}{b-a}(\tau-a) - \pi \right] \right] d\tau \end{cases}$$

coefficienti reali

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik \left[\frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \right]}$$

forma complessa

$$\gamma_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau) e^{-ik \left[\frac{2\pi}{b-a}(\tau-a) - \pi \right]} d\tau$$

coefficienti complessi

caso particolare

Serie di Fourier (FS) di f con periodo T in $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \cos \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) + \beta_k \sin \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) \right]$$

← forma reale

$$t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \longrightarrow x = \frac{2\pi}{T} t \in [-\pi, +\pi]$$

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \cos \left(\frac{2k\pi}{T} \tau \right) d\tau \\ \beta_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) \sin \left(\frac{2k\pi}{T} \tau \right) d\tau \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}$$

← forma complessa

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau$$

Esempio di Serie di Fourier in $[a,b]$

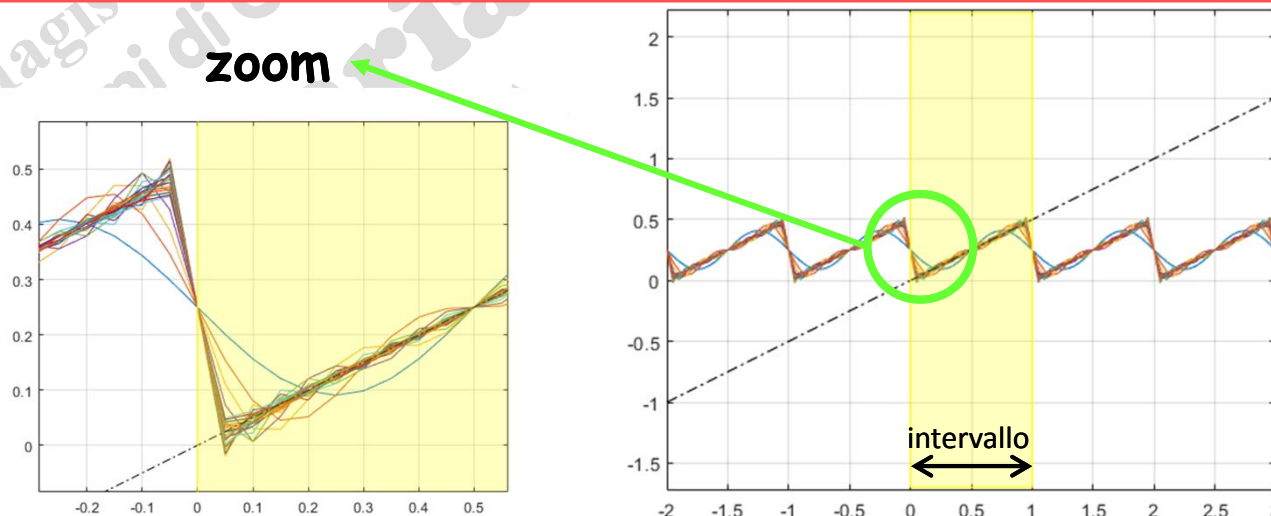
in forma complessa

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik \left[\frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \right]}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-ik \left[\frac{2\pi}{b-a}(t-a) - \pi \right]} dt$$

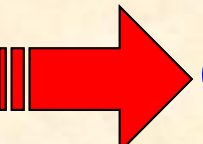
disegna tutte le ridotte

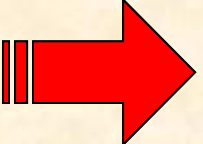
```
f=@(tau)tau/2; a=0; b=1; T=b-a;
syms t real
Nmez=30; k=(-Nmez:Nmez)'; m=Nmez+1; % indice centrale dei coefficienti
c(m+k)=double(1/T*int(f(t).*exp(-1i*k*(2*pi/T*(t-a)-pi)), t,a,b));
c=flipr(c); % per polyval
t=linspace(a-2,b+2,101); x=2*pi/T*(t-a)-pi; % proietta da [a,b] in [-pi,+pi]
z=exp(1i*x); % sostituzione
S=zeros(numel(t),Nmez); % matrice delle ridotte valutate in t
for k=1:Nmez
    S(:,k)=z.^(-k).*polyval(c(m-k:m+k),z); % ridotta di ordine 2*k+1
end
figure; plot(t,real(S)',t,f(t),'-.k'); axis equal; grid
```



Esistenza e convergenza della Serie di Fourier (condizioni sufficienti)

$f(x) \in L^1[a,b]$
(f sommabile)  la **Serie di Fourier** di f esiste

$f(x) \in L^2[a,b]$
(f a quadrato sommabile)  la **Serie di Fourier** di f converge a f in media quadratica ($\|\cdot\|_2$)

$f(x) \in L^2[a,b]$
e f soddisfa le condizioni di Dirichlet  la **Serie di Fourier** di f converge puntualmente a f ed uniformemente ($\|\cdot\|_\infty$) dove f è continua

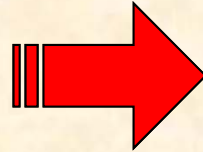
condizioni di Dirichlet

- f è una funzione limitata in $[a,b]$;
- esiste una decomposizione finita di $[a,b]$:
 $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$
tale che f sia monotona in ogni $[x_i, x_{i+1}]$.

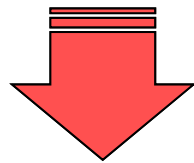
cioè: f è limitata e con sole discontinuità di 1^a specie

Convergenza della Serie di Fourier (condizioni sufficienti)

Teor.: $f(x) \in L^2[a,b]$
e soddisfa le condizioni di Dirichlet



la **Serie di Fourier** di f converge puntualmente a f ed uniformemente ($\|\cdot\|_\infty$) dove f è continua



più precisamente:

la **Serie di Fourier** di f converge puntualmente in $[a,b]$:

la sua **somma** è uguale a

➤ $f(x)$ se f è continua in x ;

➤ $\frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$ se f è discontinua in x ;

attorno ad un salto di discontinuità, essa mostra il fenomeno di Gibbs.

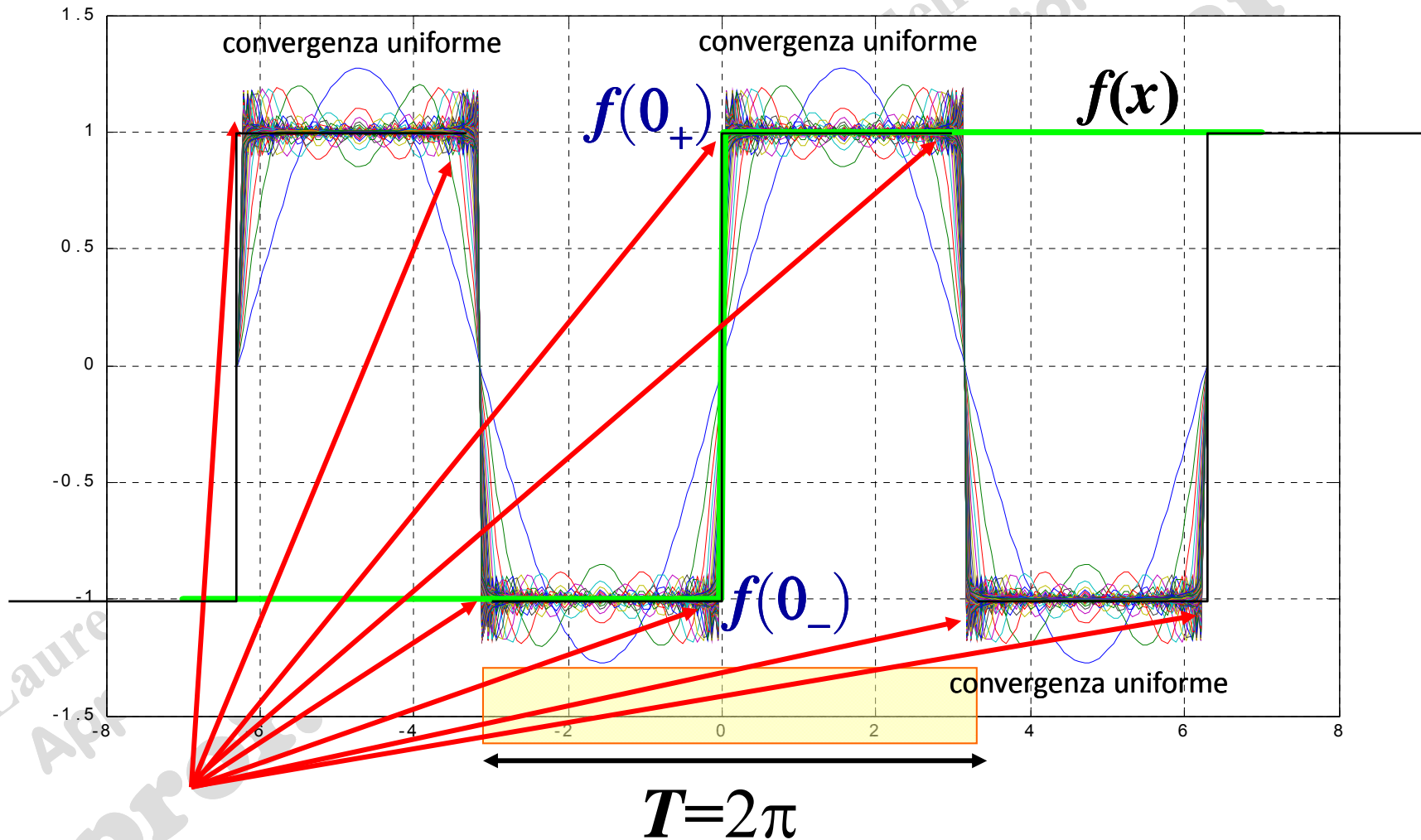
Inoltre, la **convergenza è uniforme** in ogni sottointervallo di $[a,b]$ dove f è continua.



f è sviluppabile in Serie di Fourier

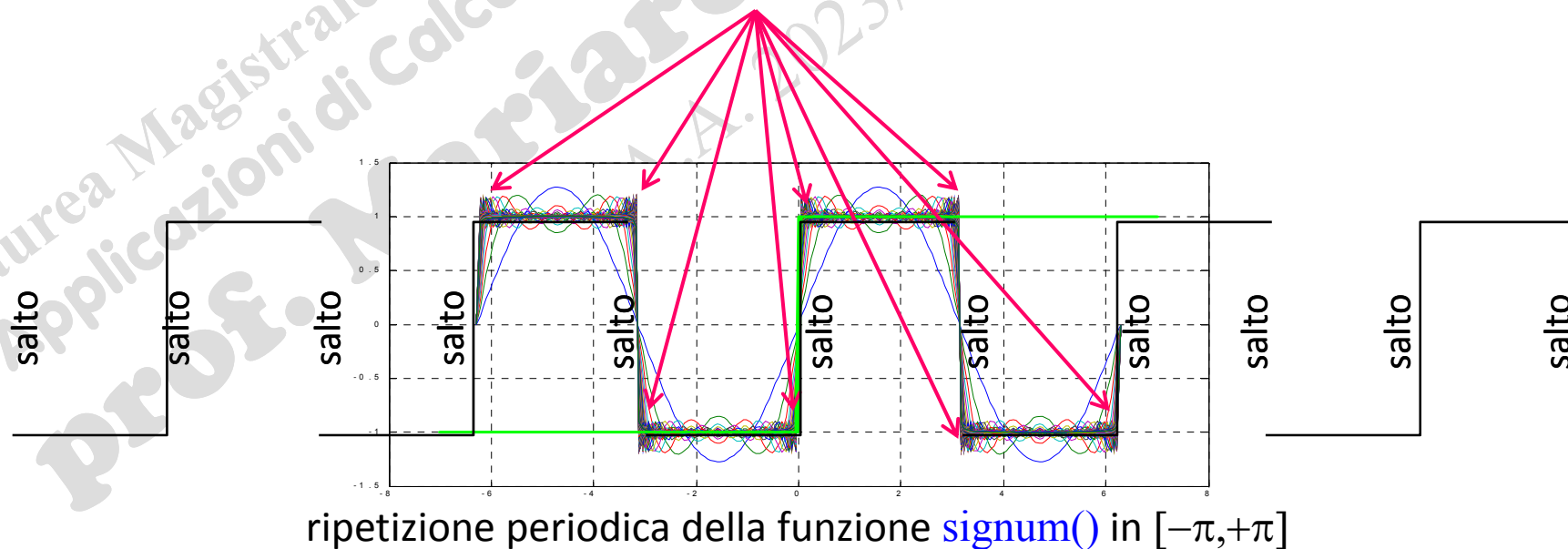
Esempio: funzione sviluppabile in Serie di Fourier

$$x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \text{signum}(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$



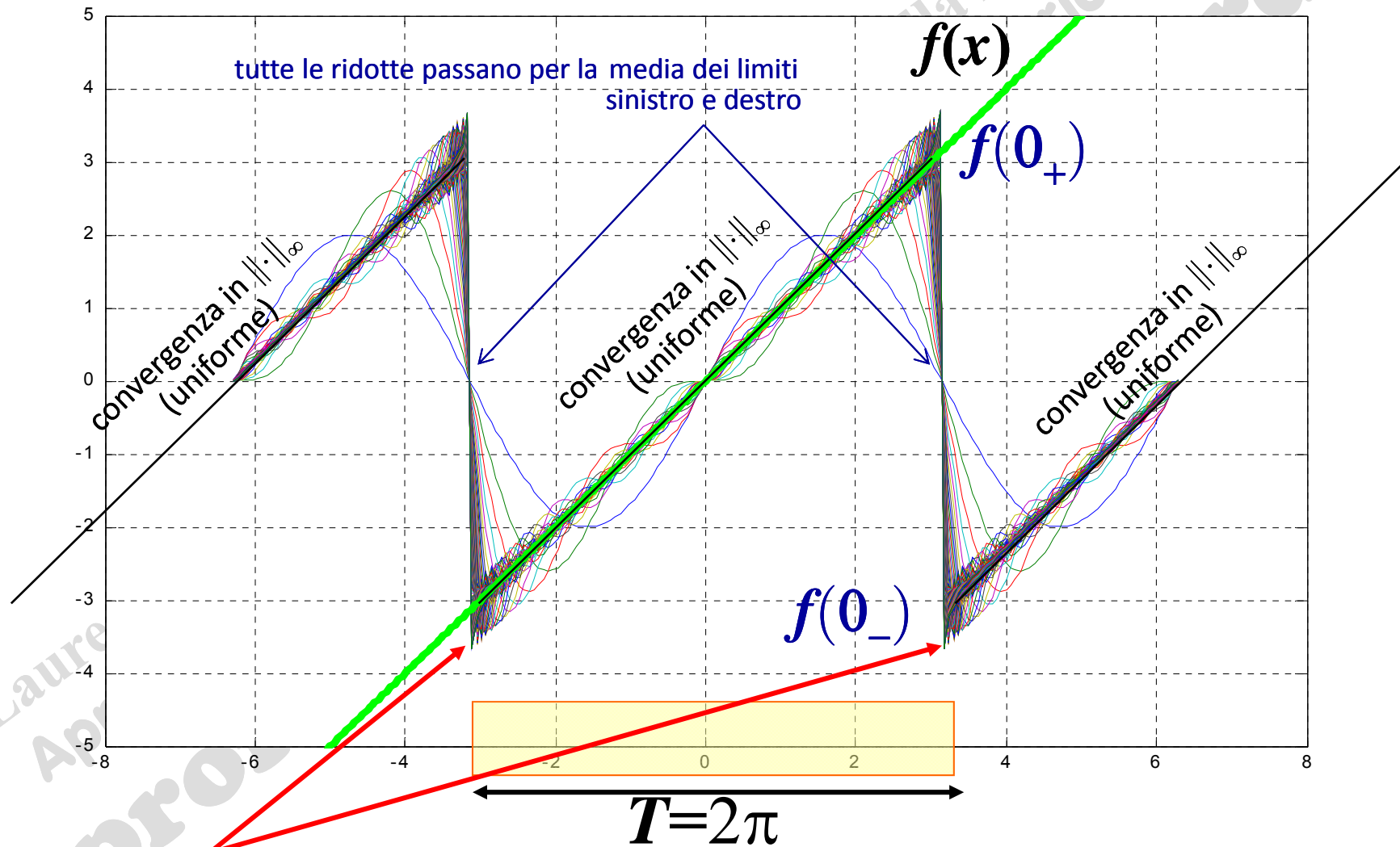
fenomeno di Gibbs in ogni salto di discontinuità

Vicino ai punti dove la ripetizione periodica di $f(x)$ presenta un salto di discontinuità, le somme parziali della FS mostrano delle oscillazioni spurie che, al crescere dell'ordine N della ridotta, non si riducono in ampiezza anche se si presentano in intervalli sempre più stretti. Tale fenomeno è chiamato **fenomeno di Gibbs**.



Esempio: funzione sviluppabile in Serie di Fourier

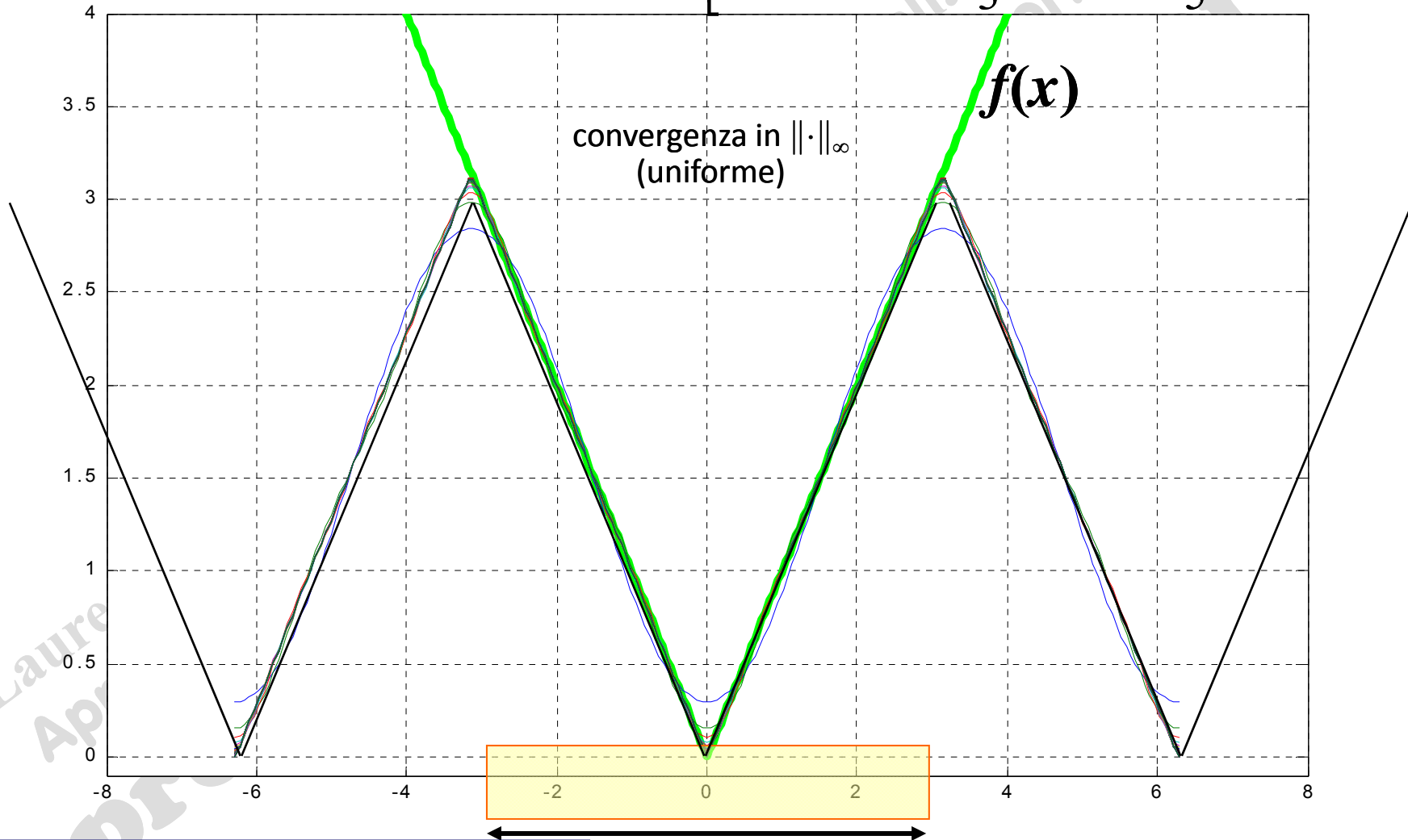
$$x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = x = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right]$$



fenomeno di Gibbs in ogni salto di discontinuità

Esempio: funzione sviluppabile in Serie di Fourier

$$x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$



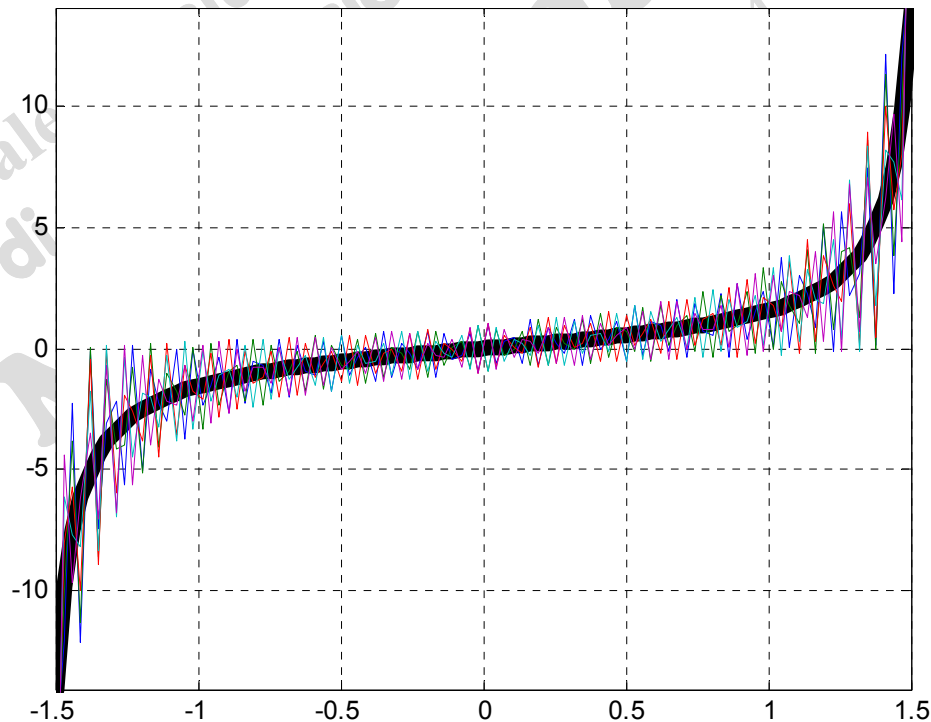
Nessun fenomeno di Gibbs

Esempio: funzione non sviluppabile in Serie di Fourier

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[\quad \tan(x) \sim 2[\sin(2x) - \sin(4x) + \sin(6x) - \sin(8x) + \dots]$$

si dimostra che la Serie di Fourier **esiste**,
ma **non converge** in nessun punto (tranne 0) alla funzione!

Ridotte di ord. 146-150 della FS della tangente



Esempio: funzione non sviluppabile in Serie di Fourier

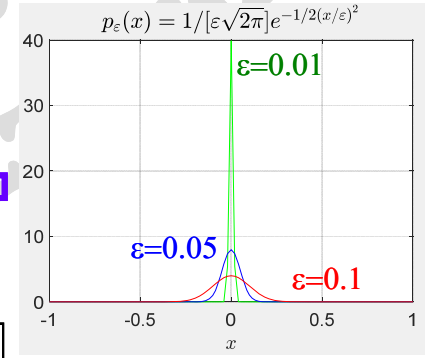
distribuzioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

la funzione delta δ di Dirac* $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-c) dx = f(c)$
 (sifting property - filtraggio)

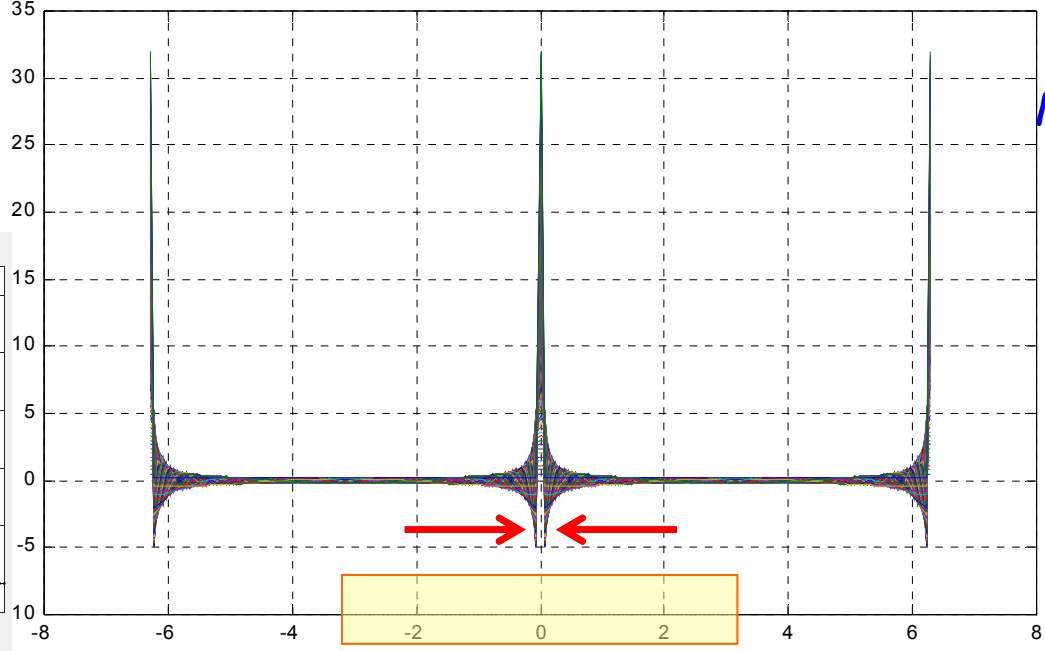
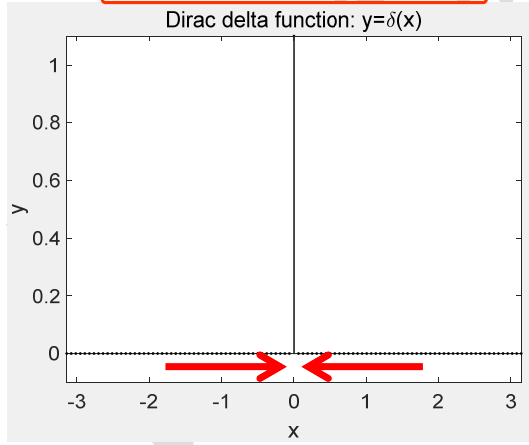
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\varepsilon})^2}}{\varepsilon \sqrt{2\pi}}$$

distribuzione Normale $\mathcal{N}(0, \varepsilon)$



$x \in]-\pi, +\pi[$ $\delta(x) \sim \frac{1}{2\pi} [1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + 2 \cos 3x + \dots]$

```
a=-pi; b=pi; N=101;
maxY=1.1;
x=linspace(a,b,N)';
y=dirac(x);
idx=y == Inf;
y(idx)=maxY;
stem(x,y, '.k')
```



* Paul Adrien Maurice Dirac



Premio Nobel in Fisica nel 1933 con Erwin Schroedinger

La FS esiste, ma non converge in $x=0$ a $\delta(x)$

Comb function di Dirac (o treno di impulsi o sampling function)

La Serie di Fourier di $\delta(t)$, nell'intervallo $[-T/2, T/2]$, è:

$$\delta(t) \sim \frac{1}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2k\pi}{T} t \right] \quad \text{forma reale}$$
$$\sim \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2k\pi}{T} t} \quad \text{forma complessa}$$

e si assume che definisca una funzione periodica di periodo T , $\delta_T(t)$, detta *funzione impulsiva periodica* (o *treno d'impulsi* o *Dirac comb*):

convergenza in distribuzione

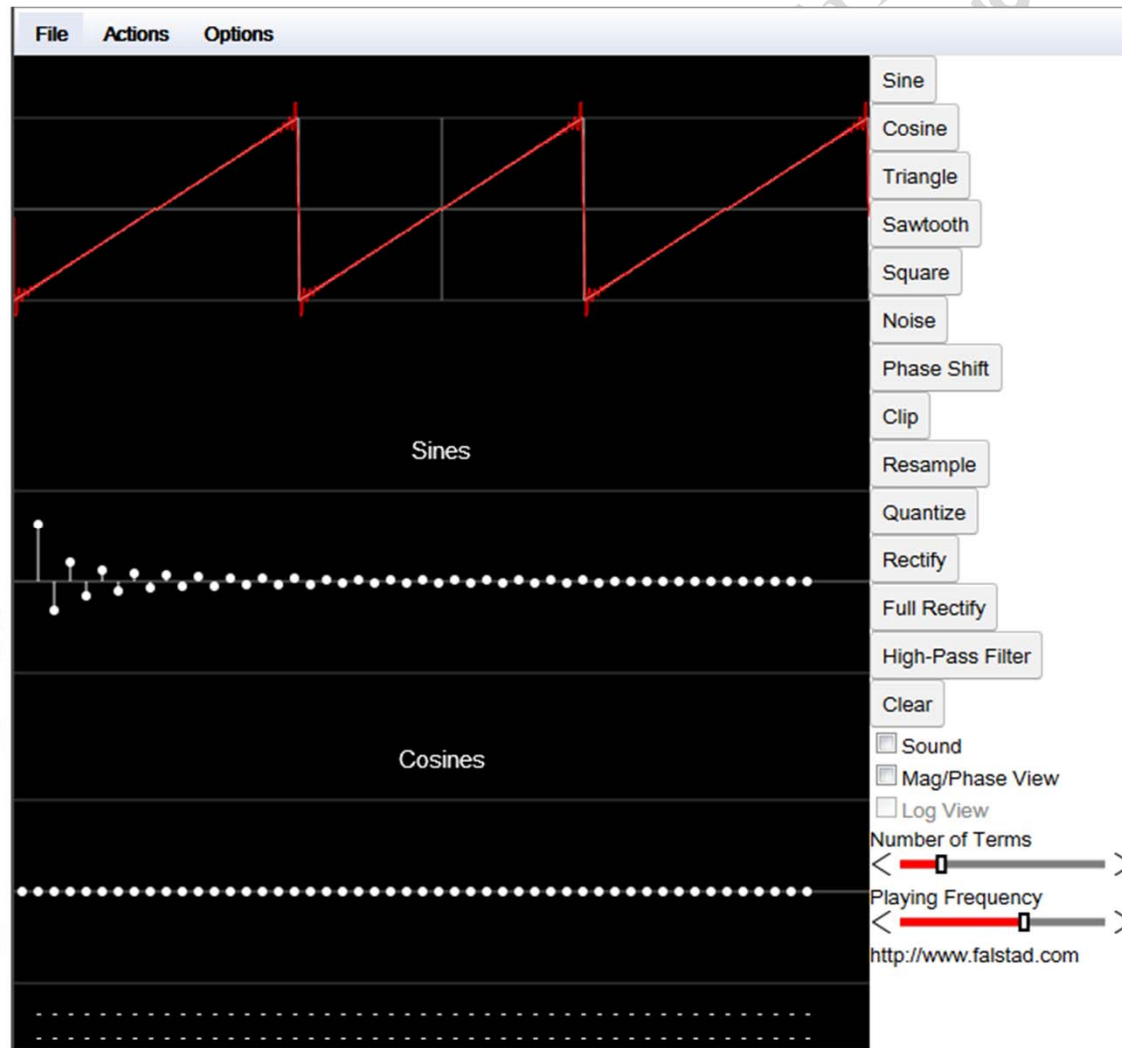
$$\delta_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2k\pi}{T} t}$$

di solito è usata nelle applicazioni per descrivere il campionamento

Per enfatizzare la sua caratteristica di essere per convenzione una ripetizione periodica della δ di *Dirac*, tale funzione è anche denotata come

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Fourier Series Applet



<https://www.falstad.com/fourier/>

ACS parte 2: ACS_12b

Argomenti trattati

- **Proprietà dei coefficienti di Fourier.**
- **Esempi.**

Principali proprietà dei coefficienti di Fourier [1]

Sia \mathcal{F} la trasformazione che associa ad una funzione $f(x)$ i suoi coefficienti di Fourier $\{\text{FC}_k[f]\}_k$ reali $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_k$ o complessi $\{\gamma_k\}_k$

$$\mathcal{F} : f \longrightarrow \mathcal{F}[f] = \{\text{FC}_k[f]\}_k \quad \text{FC: Fourier Coefficients}$$

- $\mathcal{F}[f]$ è *lineare*.
- Se f è una *funzione pari*, allora $\beta_k = 0 \forall k$, cioè la FS è una serie di soli coseni.
- Se f è una *funzione dispari*, allora $\alpha_k = 0 \forall k$, cioè la FS è una serie di soli seni.
- Se f è a *valori reali*, allora $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_{+k}}$.
- **Proprietà dello Shift:** alla traslazione $x-h$ corrisponde una rotazione del k^{esimo} coefficiente di un angolo $-kh$, cioè

$$\text{FC}_k[f(x-h)] = e^{-ikh} \text{FC}_k[f(x)] \quad \forall k$$

- **Derivazione:** se anche $f'(x)$ è sviluppabile in FS, allora la sua FS si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier di $f(x)$, cioè

$$\text{FC}_k[f'(x)] = ik \text{FC}_k[f(x)]$$

Usata in ACS1_04f per la derivazione numerica

Principali proprietà dei coefficienti di Fourier [2]

- **Proprietà della convoluzione:** al prodotto usuale di due funzioni $f \cdot g$ corrisponde il prodotto di convoluzione $*$ dei loro coefficienti di Fourier e viceversa, cioè:

$$\text{FC}[f \cdot g] = \text{FC}[f] * \text{FC}[g] \quad \text{e} \quad \text{FC}[f * g] = \text{FC}[f] \cdot \text{FC}[g]$$

dove

$$\begin{aligned} \text{FC}[f] = \{\gamma_k\} \\ \text{FC}[g] = \{\mu_h\} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \text{FC}[f \cdot g] = \{\varepsilon_n\} : \varepsilon_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k \mu_{n-k} \\ \text{FC}[f * g] = \{a_n\} : a_n = \gamma_n \mu_n \end{aligned}$$

e la **convoluzione** $*$ tra due funzioni $f, g \in L^1([-\pi, +\pi])$ è definita come

$$[f * g](\tau) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) g(\tau - t) dt$$

- **Uguaglianza di Parseval**

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2$$

esprime l'energia di un segnale mediante i suoi coefficienti di Fourier

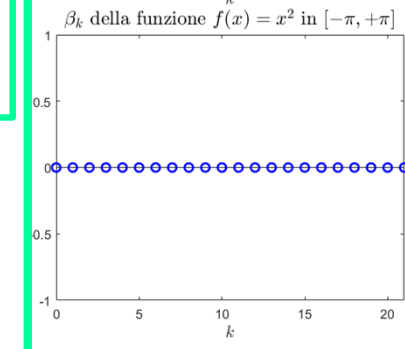
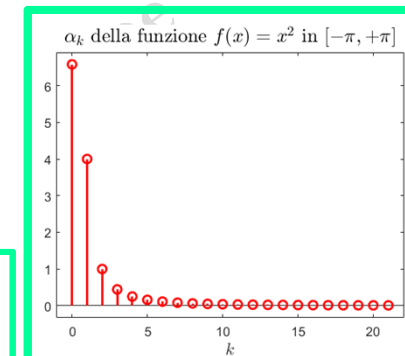
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)]$$

Proprietà dei FC: esempi

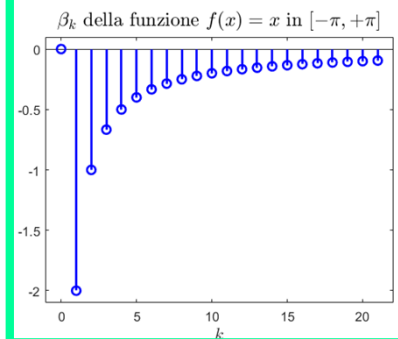
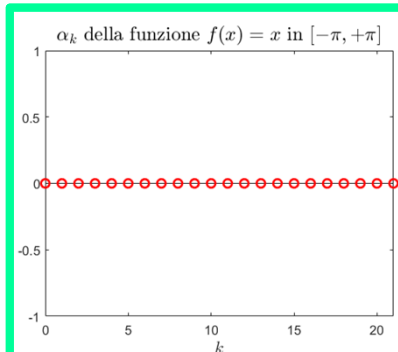
Se f è **funzione pari**, allora la sua FS è una serie di soli coseni. Cioè $\forall k \beta_k = 0$.

Esempio: $f(x) = x^2$ \Rightarrow



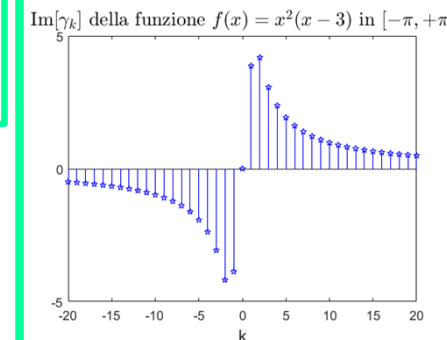
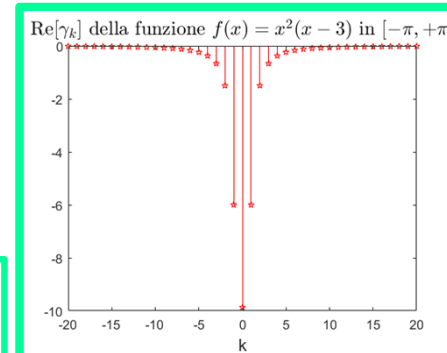
Se f è **funzione dispari**, allora la sua FS è una serie di soli seni. Cioè $\forall k \alpha_k = 0$.

Esempio: $f(x) = x$ \Leftarrow



Se f è **funzione a valori reali**, allora i suoi FC sono complessi e risulta $\gamma_{-k} = \bar{\gamma}_k$.

Esempio: $f(x) = x^2(x-3)$ \Rightarrow



Applicazione della **Proprietà dello shift**

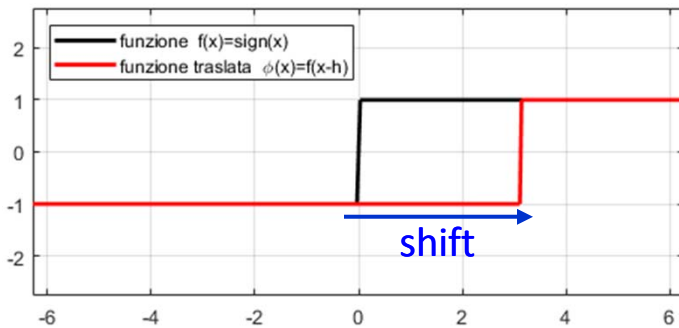
Avendo già calcolato i coefficienti di $f(x)$ in $[-\pi, +\pi]$, si può determinare lo sviluppo in Serie di Fourier della **funzione traslata** $f(x-h)$, $h=\pi$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$ o in qualsiasi intervallo di ampiezza 2π :

$$FC_k[f(x-h)] = e^{-ihk} FC_k[f(x)]$$

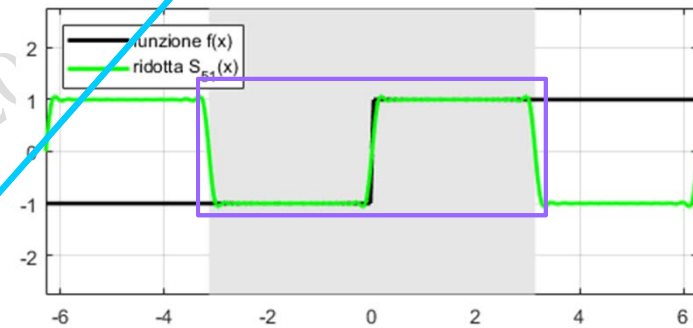
↑ in $[-\pi+h, \pi+h]$
↑ in $[-\pi, +\pi]$
→
in $[0, 2\pi]$
in $[-\pi, +\pi]$

$$FC_k[f(x-\pi)] = e^{-i\pi k} FC_k[f(x)]$$

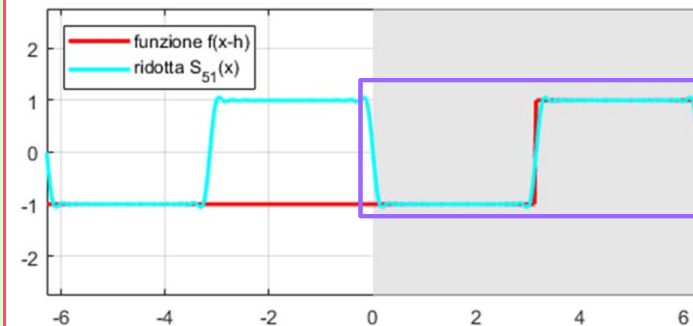
Funzione $\phi(x) = f(x - \pi)$



Serie di Fourier in $[-\pi, +\pi]$



Serie di Fourier in $[0, 2\pi]$

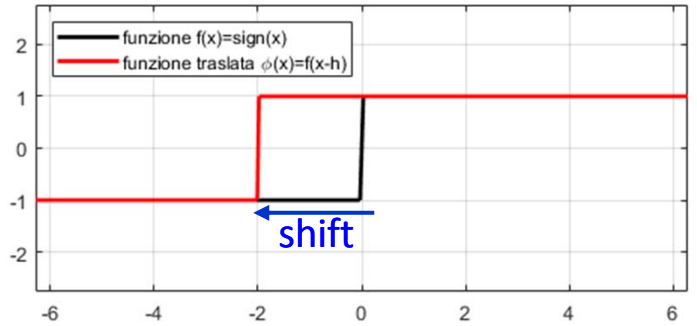


```
pf=@sign; T=2*pi; N=60;
... c: (vettore colonna) FCs in [-pi,+pi]
cT: FCs della funzione traslata
ST: ridotta della FS della funzione traslata
h=pi; k=(-N/2:N/2)'; cT=exp(-1i*h*k).*c;
ST=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(flipud(cT),exp(2i*pi/T*x));
```

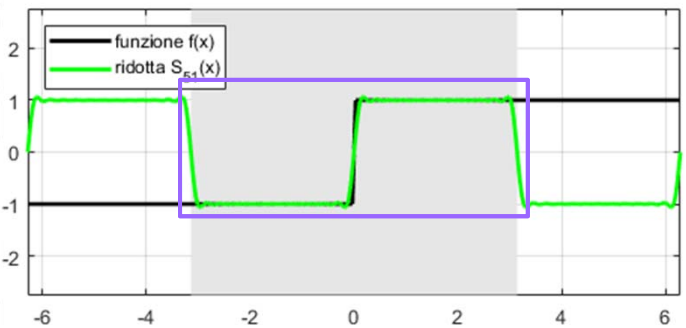
$$\begin{aligned}
 & \text{FC}_k[f(x-h)] = e^{-ikh} \text{FC}_k[f(x)] \\
 & \quad \uparrow \text{in } [-\pi+h, \pi+h] \qquad \quad \uparrow \text{in } [-\pi, +\pi]
 \end{aligned}
 \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \text{FC}_k[f(x+2)] = e^{+2ik} \text{FC}_k[f(x)] \\
 & \quad \text{in } [-\pi-2, \pi-2] \qquad \quad \text{in } [-\pi, +\pi]
 \end{aligned}$$

$h=-2$

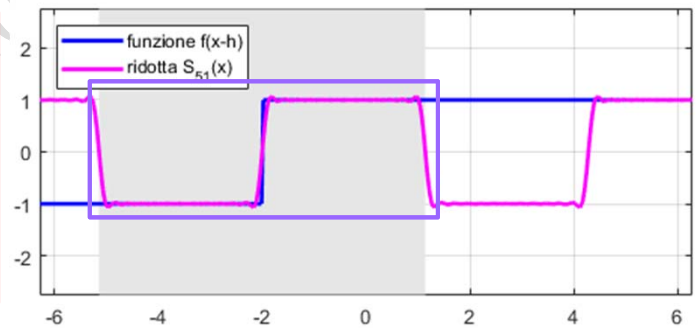
Funzione $\phi(x) = f(x+2)$



Serie di Fourier in $[-\pi, +\pi]$



Serie di Fourier in $[-\pi-2, +\pi-2]$



```

pf=@sign; T=2*pi; N=60;
... c: (vettore colonna) FCs in [-pi,+pi]
cT: FCs della funzione traslata
ST: ridotta della FS della funzione traslata
h=-2; k=(-N/2:N/2)'; cT=exp(-1i*h*k).*c;
ST=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(flipud(cT),exp(2i*pi/T*x));
    
```

Esercizio

Ritrovare l'algoritmo per approssimare i FC nell'intervallo $[0, 2\pi]$ come applicazione della Proprietà dello Shift ai FC nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$. Analogamente per l'intervallo $[0, T]$ rispetto a $[-T/2, +T/2]$.

Proprietà dei FC: esempi

Derivazione: Se anche f' è sviluppabile in FS, allora la sua Serie di Fourier si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier di $f(x)$, cioè

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ikx} \quad \longrightarrow \quad \text{FC}_k[f'(x)] = ik \text{FC}_k[f(x)]$$

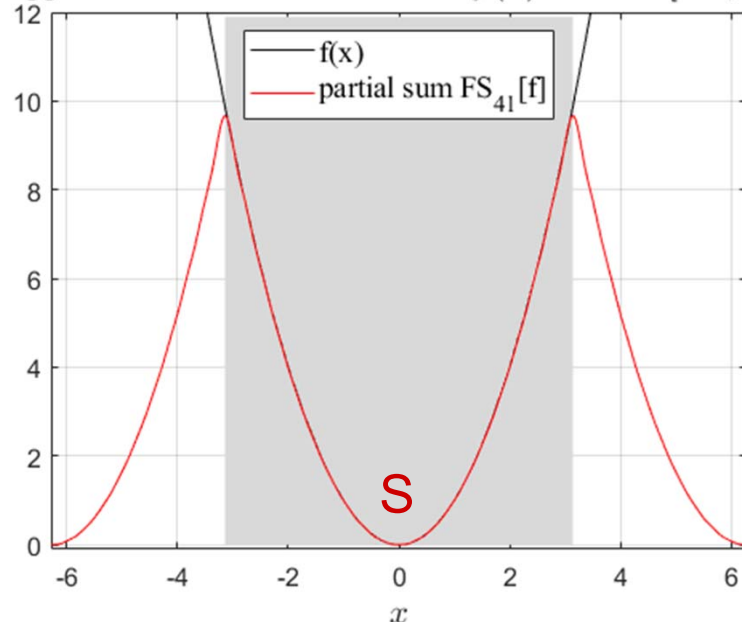
Esempio

$$f(x) = x^2$$

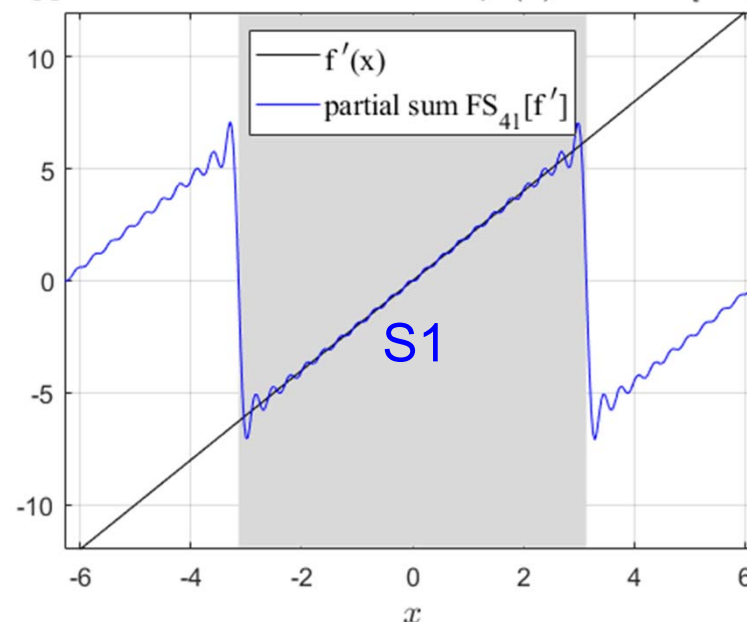
$$f'(x) = 2x$$

```
fun=@(x) x.^2; fun1=@(x) 2*x; T=2*pi; N=50;
% ... c, S: coefficienti e ridotta della Serie di Fourier di fun in [-pi,+pi]
k=(-N/2:N/2)'; c1=i*k.*c; % coefficienti della serie derivata
S1=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(flipud(c1),exp(2i*pi/T*x));
```

Approximation of the function $f(x) = x^2$ in $[-\pi, +\pi]$



Approximation of the function $f'(x) = 2x$ in $[-\pi, +\pi]$



Proprietà dei FC: esempi

Derivazione: Se anche f' è sviluppabile in FS, allora la sua Serie di Fourier si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier di $f(x)$, cioè

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ikx} \quad \longrightarrow \quad \text{FC}_k[f'(x)] = ik \text{FC}_k[f(x)]$$

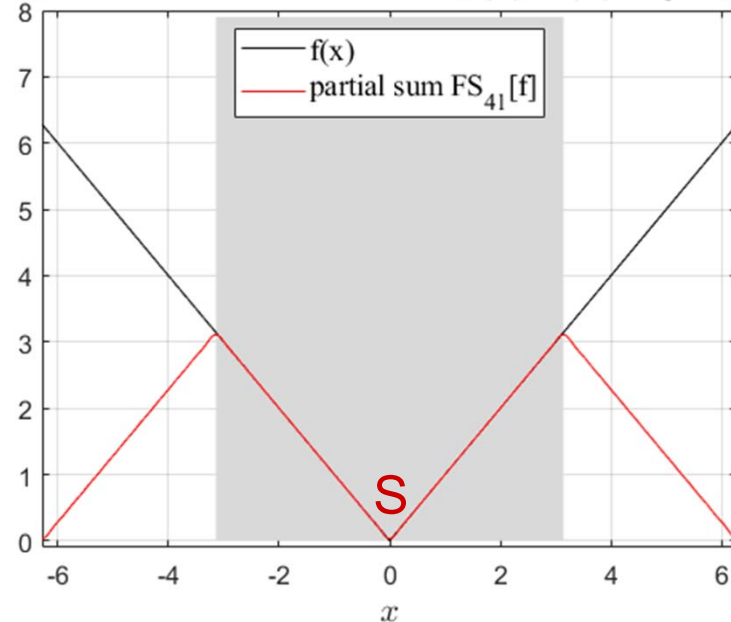
Esempio

$$f(x) = |x|$$

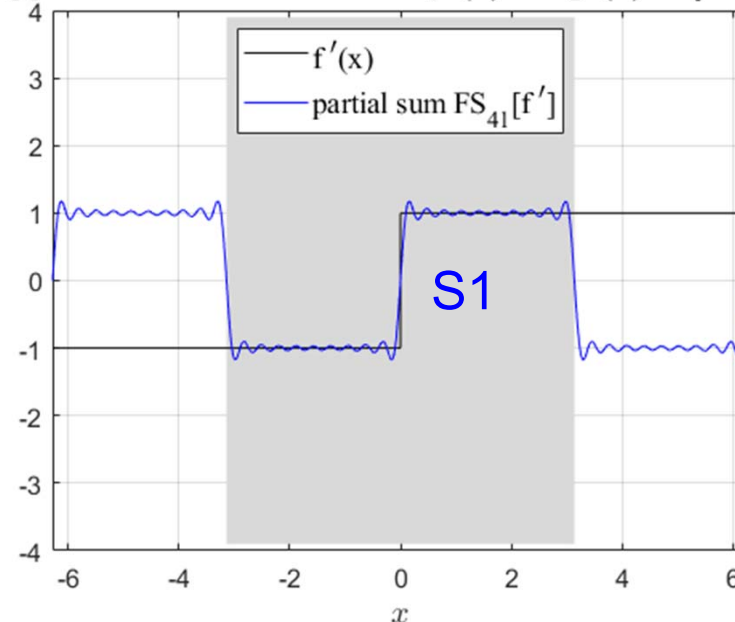
$$f'(x) = \text{signum}(x)$$

```
fun=@abs; fun1=@sign; T=2*pi; N=50;
% ... c, S: coefficienti e ridotta della Serie di Fourier di fun in [-pi,+pi]
k=(-N/2:N/2)'; c1=i*k.*c; % coefficienti della serie derivata
S1=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(flipud(c1),exp(2i*pi/T*x));
```

Approximation of the function $f(x) = |x|$ in $[-\pi, +\pi]$



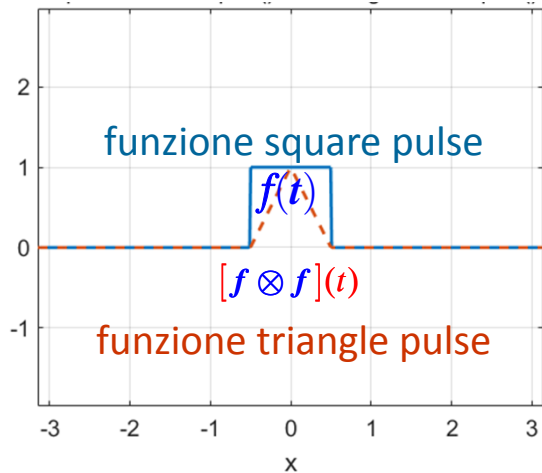
Approximation of the function $f'(x) = \text{sign}(x)$ in $[-\pi, +\pi]$



Proprietà dei FC: esempi

Proprietà della convoluzione: al prodotto usuale di due funzioni $f \cdot g$ corrisponde il prodotto di convoluzione $*$ dei loro coefficienti di Fourier e viceversa, cioè: $FC[f \cdot g] = FC[f] * FC[g]$ e $FC[f * g] = FC[f] \cdot FC[g]$

onda quadra `rectpuls()` e onda triangolare `tripuls()`



Esempio

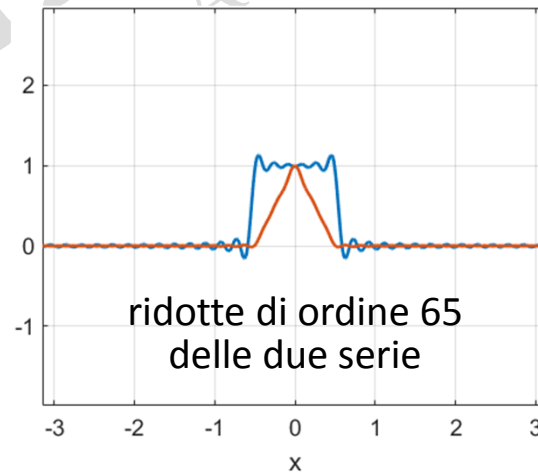
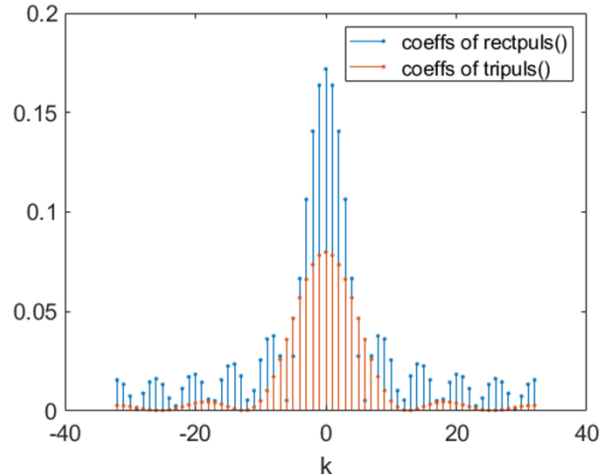
La convoluzione di due *square pulse* è un *triangle pulse*

in **Signal Processing Toolbox** (num)

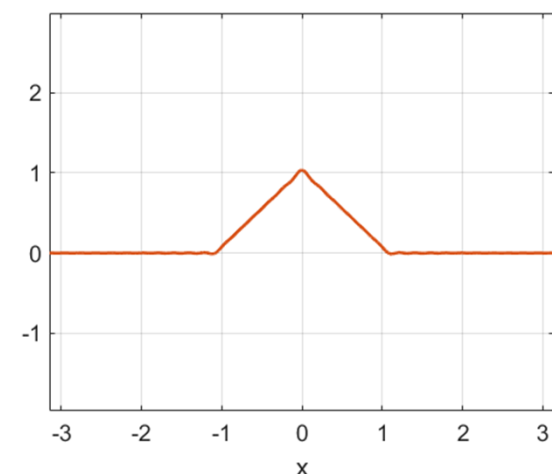
Calcola N+1 coefficienti di F. di *square pulse* (**rectpuls()**): F1
 Calcola N+1 coefficienti di F. di *triangle pulse* (**tripuls()**): F2
 Esegue il prodotto di Hadamard dei coefficienti: $F = F1 \cdot F1$
 Valuta la ridotta S della serie di coefficienti F
 Produce il grafico della ridotta S

i coefficienti di F. vanno calcolati numericamente

modulo dei 65 coeff. di Fourier



ridotta di ordine 65 con coeffs $F1 \cdot F1$



ACS parte 2: ACS_12c

Argomenti trattati

- **Approssimazione numerica dei coefficienti di Fourier (FC):**
 - ❖ **Algoritmo sbagliato.**
 - ❖ **Algoritmo giusto.**
- **Esempi.**
- **Errori di Windowing e di Aliasing.**

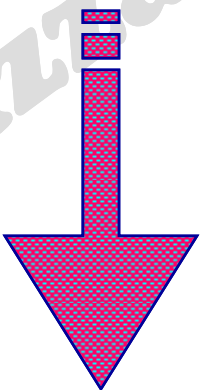
Approssimazione numerica dei Coefficienti di Fourier in $[-T/2, +T/2]$

L'idea più semplice è quella di ricorrere a **formule di quadratura**!

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \approx \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \gamma_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \quad \text{ridotta}$$

polinomio trigonometrico

$v_k = \frac{|k|}{T}$ è la frequenza circolare



$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt \approx Q_{N+1} \left[f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} \right]$$

parametri di discretizzazione: **T** e **N**

Tuttavia questo approccio si rivela **inefficiente** e soprattutto **inaccurato** rispetto all'uso della **DFT** ...


Esempio: approssimazione numerica dei coeff. di Fourier mediante quadratura numerica

Si supponga che la Serie di Fourier sia convergente. Cosa succede alle sue ridotte "numeriche" * all'aumentare dell'ordine?

* cioè i cui coefficienti sono approssimati mediante quadratura numerica

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \approx \underbrace{S_{N+1}(x)}_{\text{ordine}} = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \quad \widetilde{\gamma}_k = \underbrace{Q_{m+1}[f(t)e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}]}_{\text{formula di quadratura}}$$

3 ridotte

$$\left\{ \begin{aligned} \widetilde{S}_{21}(x) &= \sum_{k=-10}^{+10} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \\ \widetilde{S}_{41}(x) &= \sum_{k=-20}^{+20} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} = \sum_{k=-20}^{-11} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} + \underbrace{\sum_{k=-10}^{+10} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x}}_{\widetilde{S}_{21}(x)} + \sum_{k=+11}^{+20} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \\ \widetilde{S}_{61}(x) &= \sum_{k=-30}^{+30} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} = \sum_{k=-30}^{-21} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} + \underbrace{\sum_{k=-20}^{+20} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x}}_{\widetilde{S}_{41}(x)} + \sum_{k=+21}^{+30} \widetilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \end{aligned} \right.$$


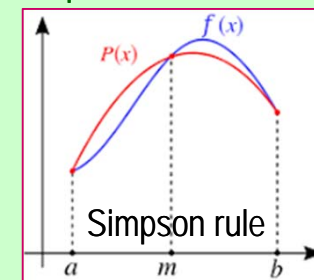
Per ottenere le tre ridotte, si calcolano i coefficienti di quella di ordine massimo; poi per le altre si selezionano opportunamente i coefficienti simmetricamente rispetto all'indice centrale.

Esempio: approssimazione numerica dei coeff. di Fourier mediante quadratura numerica

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) e^{-ik\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau$$

```
T=4; Nmax=60; fun=@sign; x=linspace(-T/2,T/2,401); ytrue=feval(fun,x);
qfun=@(X,K) fun(X).*exp(-2i*pi/T*K*X); % funzione integranda
coef=[]; Nfun=0; % Nfun: numero di valutazioni della funzione integranda nella quadratura num.
```

```
for k = -Nmax/2 : Nmax/2
    [Q,fcnt] = quad(@(X)qfun(X,k),-T/2,T/2); % quad è una funzione di quadratura (Simpson rule)
    Nfun=Nfun+fcnt; coef=[coef Q/T]; % coef: vettore riga
end
calcola tutti i 61 coefficienti
```

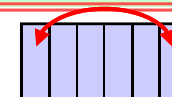


```
m=Nmax/2+1; % indice centrale
N1=Nmax/3; % 21
S1=exp(-i*N1*pi/T*x).*polyval(fliplr(coef(m-N1/2:m+N1/2)),exp(2i*pi/T*x));
N2=Nmax*2/3; % 41
S2=exp(-i*N2*pi/T*x).*polyval(fliplr(coef(m-N2/2:m+N2/2)),exp(2i*pi/T*x));
N3=Nmax; % 61
S3=exp(-i*N3*pi/T*x).*polyval(fliplr(coef(m-N3/2:m+N3/2)),exp(2i*pi/T*x));
plot(x,ytrue,'k',x,real(S1),'b',x,real(S2),'r',x,real(S3),'g')
```

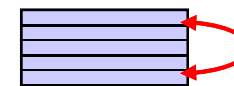
coefficienti simmetrici rispetto all'indice centrale



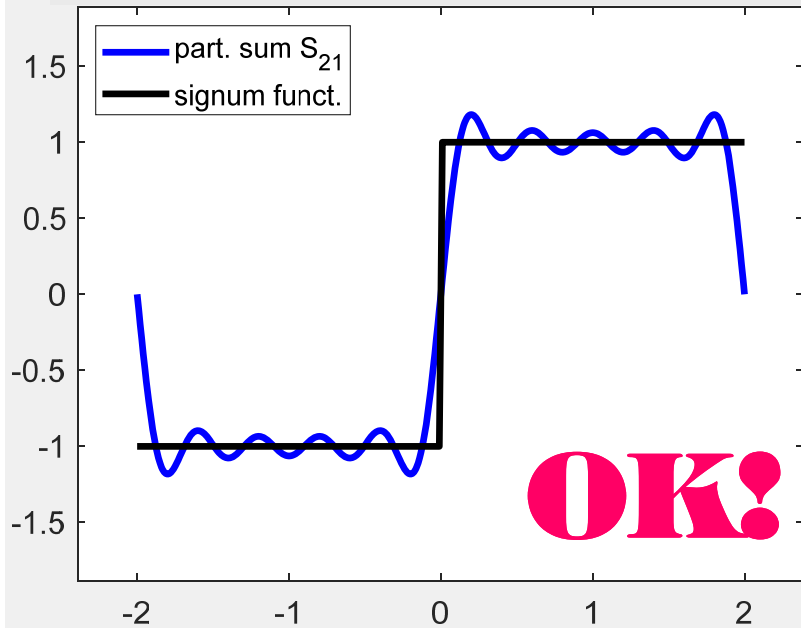
fliplr(A) flip left right: ribalta l'array orizzontalmente



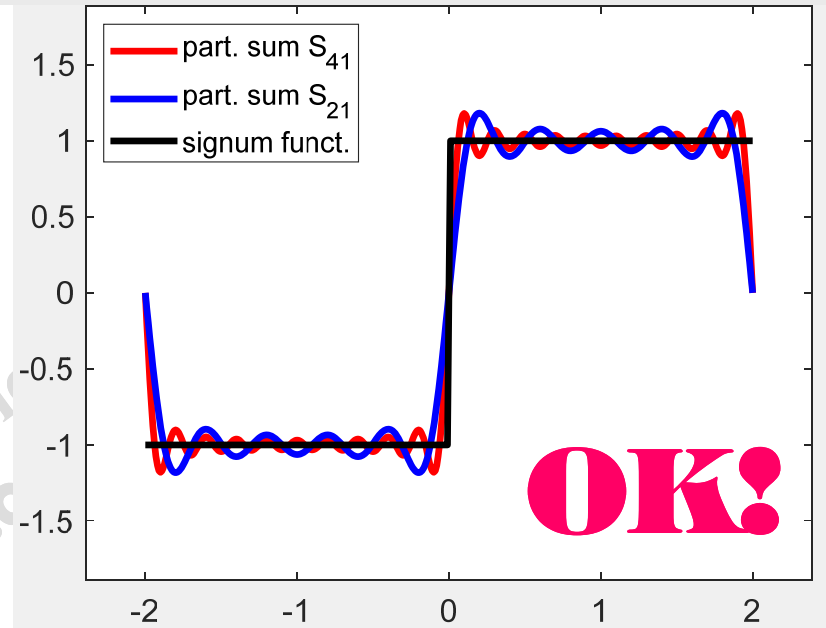
flipud(A) flip up down: ribalta l'array verticalmente



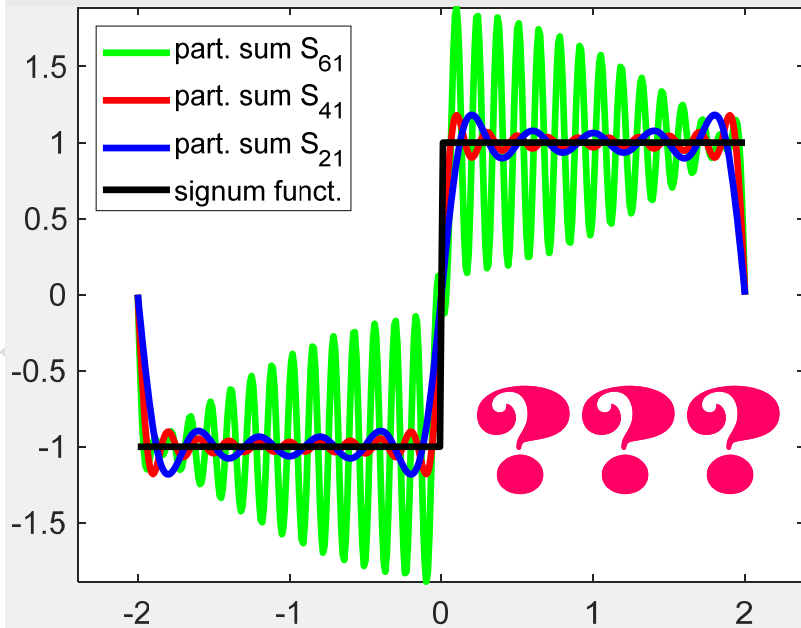
Ridotta di ordine 21 mediante quadratura



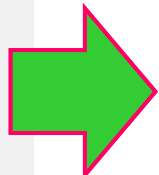
Ridotte di ordine 21 e 41 mediante quadratura



Ridotte di ordine 21, 41 e 61 mediante quadratura



Nfun numero di valutazioni di funzione
 Nfun = 34857 **INEFFICIENTE!**

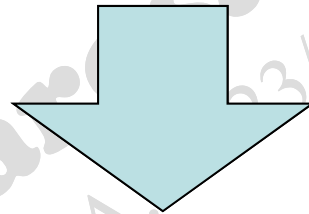


INSTABILE (amplifica l'errore di roundoff)

Anche usando una funzione MATLAB più accurata [quadl(), quadg()], questo effetto si presenta comunque in seguito!

Approssimazione numerica dei coeff. di Fourier mediante quadratura numerica

Se, invece dell'espressione della funzione $f(x)$ (come nell'esempio precedente), si hanno solo dei suoi campioni, (x_i, y_i) , per poter usare una funzione di quadratura, è necessario creare una funzione interpolante o approssimante $f^* \approx f$ da passare come parametro alla funzione di quadratura.



In tal modo si introduce, in più, un errore di approssimazione.

I risultati saranno peggiori dei precedenti!

ALGORITMO DA NON USARE!

Esempio: approssimazione numerica dei coeff. di Fourier mediante DFT

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) e^{-ik\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau$$

```
T=4; Nmax=60; fun=@sign; x=linspace(-T/2,T/2,401); ytrue=fun(x);
tj=linspace(-T/2,T/2,Nmax+1)'; fj=fun(tj);      (tj,fj): 61 campioni di f(x)
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)];
c=fftshift(fft(f)); c=[c; c(1)]/Nmax;           c: vettore colonna
c(2:2:end) = -c(2:2:end);      algoritmo mediante DFT
```

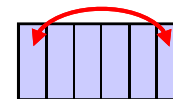
```
m=Nmax/2+1; % indice centrale
N1=Nmax/3; % 21
S1=exp(-1i*N1*pi/T*x).*polyval(flipud(c(m-N1/2:m+N1/2)),exp(2i*pi/T*x));
N2=Nmax*2/3; % 41
S2=exp(-1i*N2*pi/T*x).*polyval(flipud(c(m-N2/2:m+N2/2)),exp(2i*pi/T*x));
N3=Nmax; % 61
S3=exp(-1i*N3*pi/T*x).*polyval(flipud(c(m-N3/2:m+N3/2)),exp(2i*pi/T*x));

plot(x,ytrue,'k',x,real(S1),'b',x,real(S2),'r',x,real(S3),'g')
```

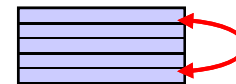
coefficienti simmetrici rispetto all'indice centrale

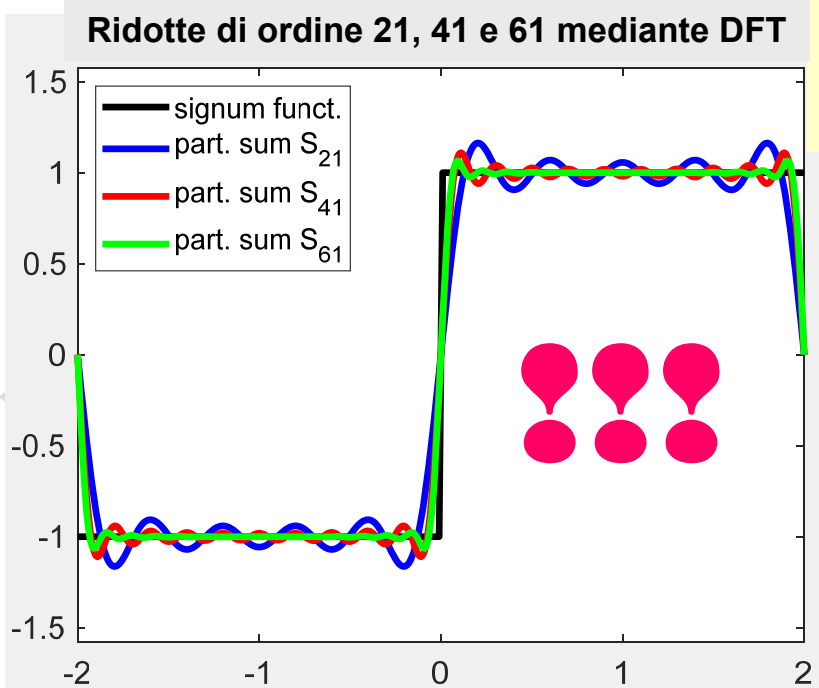
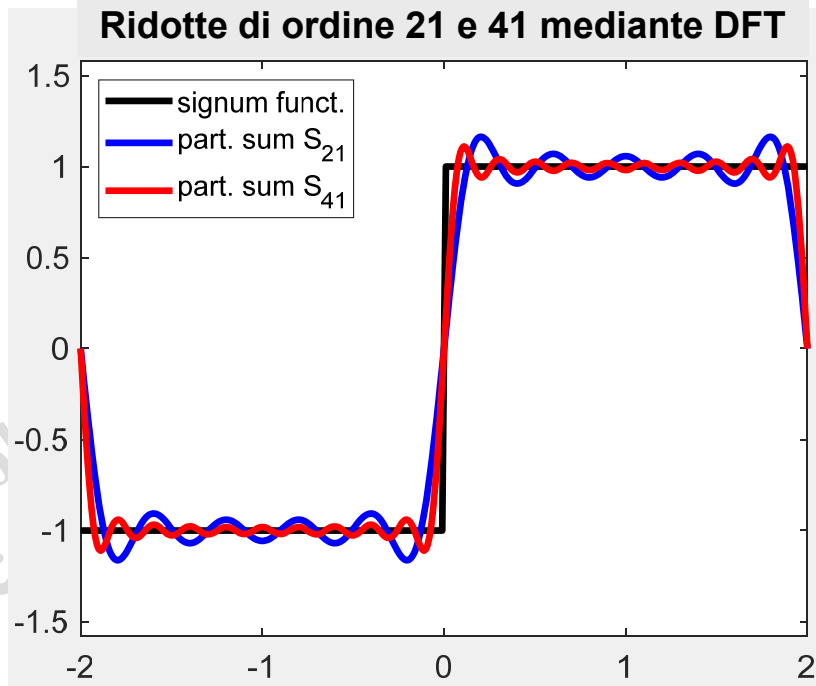
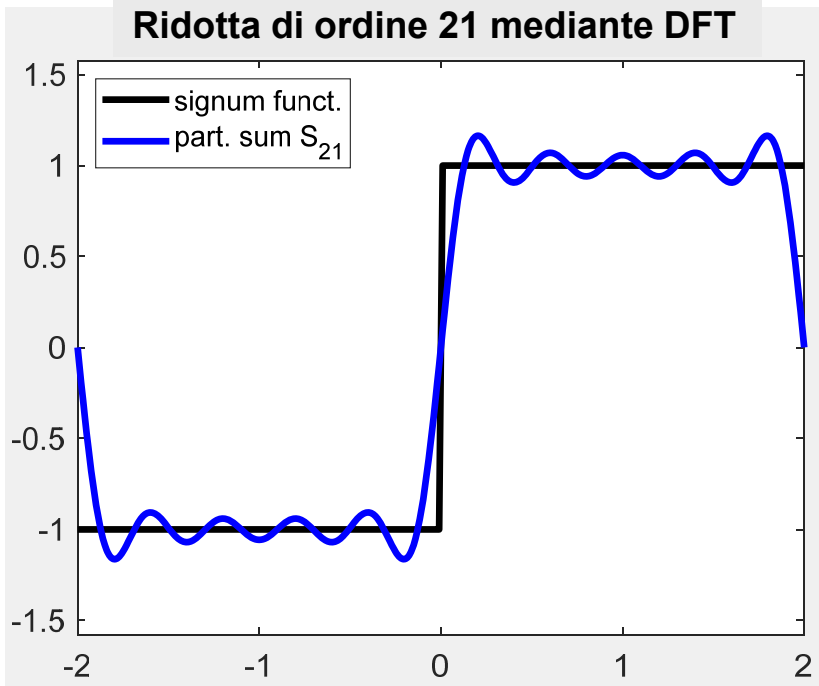


`fliplr(A)` flip left right: ribalta l'array orizzontalmente



`flipud(A)` flip up down: ribalta l'array verticalmente





numero di valutazioni di funzione
 $N_{fun}=61$ EFFICIENTE!

La DFT richiede solo i campioni di input

nessuna amplificazione
 dell'errore di roundoff
 ($cond(DFT)=1$)

La DFT, calcolata mediante l'algoritmo FFT, produce un algoritmo stabile, accurato ed efficiente

Approssimazione numerica dei coeff. di Fourier in $[-T/2, +T/2]$ mediante DFT

Mediante la DFT si possono approssimare **simultaneamente** tutti i coefficienti di una ridotta della Serie di Fourier di f

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{i \frac{2k\pi}{T} x} \approx S_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \gamma_k e^{i \frac{2k\pi}{T} x} \quad \gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} dt$$

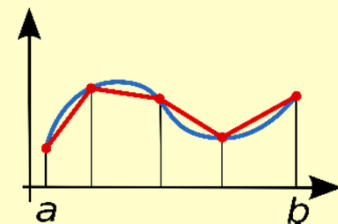
Idea dell'Algoritmo: per trovare l'algoritmo si parte applicando la Formula Trapezoidale Composita $T_{N+1}^{(*)}$ all'integrale, con $N=2m$ (pari).

Richiami

(*) Formula Trapezoidale Composita T_{N+1}
su $N+1$ nodi equispaziati

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx T_{N+1}[\varphi] = \frac{(b-a)}{N} \left\{ \frac{1}{2} [\varphi(a) + \varphi(b)] + \sum_{j=1}^{N-1} \varphi(t_j) \right\}$$

dove $t_j = a + j \frac{(b-a)}{N}$, $j = 0, 1, \dots, N$



Derivazione dell'algoritmo: applicando T_{N+1} ($N=2m$) all'integrale, si ha

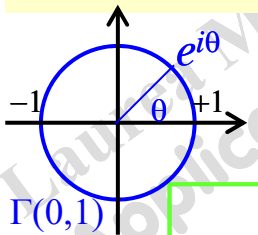
$N+1$ nodi in $[-T/2, +T/2]$: $t_j = -\frac{T}{2} + j\frac{T}{N}$, $j = 0, 1, \dots, N$

$$T_{N+1}[\varphi] = \frac{(b-a)}{N} \left\{ \frac{1}{2}[\varphi(a) + \varphi(b)] + \sum_{j=1}^{N-1} \varphi(t_j) \right\}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}}_{\varphi(t)} dt$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &\approx \tilde{\gamma}_k = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) e^{-i\frac{2k\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)} + f\left(+\frac{T}{2}\right) e^{-i\frac{2k\pi}{T}\left(+\frac{T}{2}\right)} \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{-i\frac{2k\pi}{T}\left(-\frac{T}{2} + j\frac{T}{N}\right)} \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) e^{ik\pi} + f\left(+\frac{T}{2}\right) e^{-ik\pi} \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{ik\pi + \frac{2\pi i}{N}(-kj)} \right\} = \\ &= \frac{(e^{i\pi})^k}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) e^{-ik2\pi} \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N}(-kj)} \right\} \end{aligned}$$

$e^{-i\pi} = e^{+i\pi} = -1$ $e^{-ik2\pi} = e^0 = 1$



$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$: funzione periodica di periodo = 2π
formula di Eulero

$$\gamma_k \approx \tilde{\gamma}_k = \frac{(-1)^k}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N}(-kj)} \right\}$$

approssimazione numerica del k^{esimo} coefficiente di Fourier

In particolare, il primo ed ultimo coefficiente sono **uguali**

$$\begin{aligned}
 \gamma_{-\frac{N}{2}} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{+i\pi\frac{N}{T}t} dt \\
 \gamma_{+\frac{N}{2}} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\pi\frac{N}{T}t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_{-\frac{N}{2}} &= \frac{(-1)^{-\frac{N}{2}}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N}\left(+\frac{N}{2}j\right)} \right\} = \\
 &= \frac{(-1)^{-\frac{N}{2}}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{+i\pi j} \right\} \\
 \tilde{\gamma}_{+\frac{N}{2}} &= \frac{(-1)^{+\frac{N}{2}}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N}\left(-\frac{N}{2}j\right)} \right\} = \\
 &= \frac{(-1)^{+\frac{N}{2}}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{-i\pi j} \right\}
 \end{aligned}$$

uguali

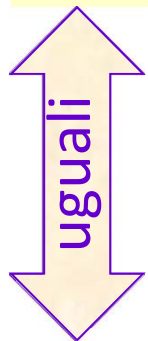
$$\gamma_k \approx \tilde{\gamma}_k = \frac{(-1)^k}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N}(-kj)} \right\}$$

per $k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ← poiché $\tilde{\gamma}_{-\frac{N}{2}} = \tilde{\gamma}_{+\frac{N}{2}}$

Allora, si calcolano N coefficienti, invece di $N+1$: $k = \left[-\frac{N}{2}\right], \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \left[+\frac{N}{2}\right]$

Infatti, dati $N+1$ campioni (N pari), si possono ottenere solo N coefficienti differenti. Se si cerca di calcolarne di più (al di fuori degli indici $\{-N/2, \dots, +N/2-1\}$) si ottengono di nuovo gli stessi coefficienti! (ciò è conseguenza della periodicità della \mathbf{DFT}_N)

$$\tilde{\gamma}_{\frac{N}{2}+1} = \frac{(-1)^{\frac{N}{2}+1}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N} \left[-\left(\frac{N}{2}+1\right)j \right]} \right\} =$$



$$\tilde{\gamma}_{-\frac{N}{2}+1} = \frac{(-1)^{-\frac{N}{2}+1}}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{i\frac{2\pi}{N} \left[-\left(-\frac{N}{2}+1\right)j \right]} \right\} =$$

$$e^{i\frac{2\pi}{N} \left[-\left(\frac{N}{2}+1\right)j \right]} = e^{-inj} e^{-i\frac{2\pi}{N}j}$$

uguali

$$e^{i\frac{2\pi}{N} \left[-\left(-\frac{N}{2}+1\right)j \right]} = e^{+inj} e^{-i\frac{2\pi}{N}j}$$

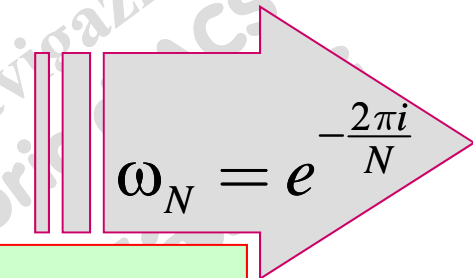
Per esempio, da 5 campioni ($N=4$) si hanno solo 5 coeff.: $\tilde{\gamma}_{-2}, \tilde{\gamma}_{-1}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{+1}, \tilde{\gamma}_{+2}$

Essi si ripetono periodicamente

$$\dots, \tilde{\gamma}_{-2}, \tilde{\gamma}_{-1}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{+1}, \tilde{\gamma}_{-2}, \tilde{\gamma}_{-1}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{+1}, \tilde{\gamma}_{-2}, \tilde{\gamma}_{-1}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{+1}, \tilde{\gamma}_{-2}, \dots$$

in $[-T/2, +T/2]$ $S_{N+1}(x) \approx \tilde{S}_{N+1}(x) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \tilde{\gamma}_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x}$

$$\gamma_k \approx \tilde{\gamma}_k = \frac{(-1)^k}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{T}{2}\right) + f\left(+\frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} \right\}$$



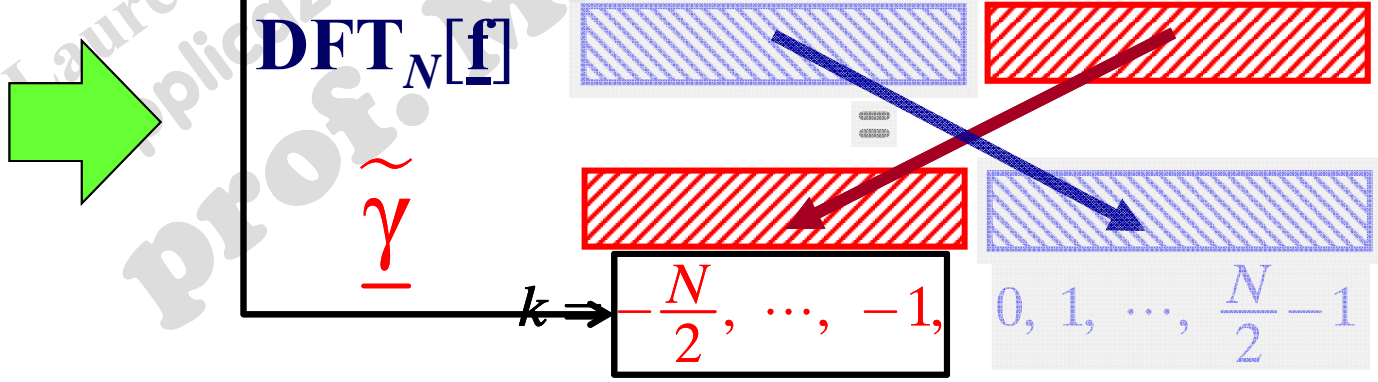
$$\tilde{\gamma}_k = \frac{(-1)^k}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega_N^{jk} \quad \text{for} \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

sembra una DFT $F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega_N^{jk}$, $k=0,1,\dots,N-1$ ma gli indici differiscono da quelli in una DFT

$$k = -\frac{N}{2}, \dots, -2, -1 \quad e^{i(-\frac{2\pi}{N}k+2\pi)j} = e^{i(2\pi\frac{N-k}{N})j} = e^{\frac{2\pi i}{N}(N-k)j} = e^{\frac{2\pi i}{N}(h)j} \quad h = N - k = \frac{N}{2}, \dots, N-2, N-1$$

Riordinamento delle componenti

$$h = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$$

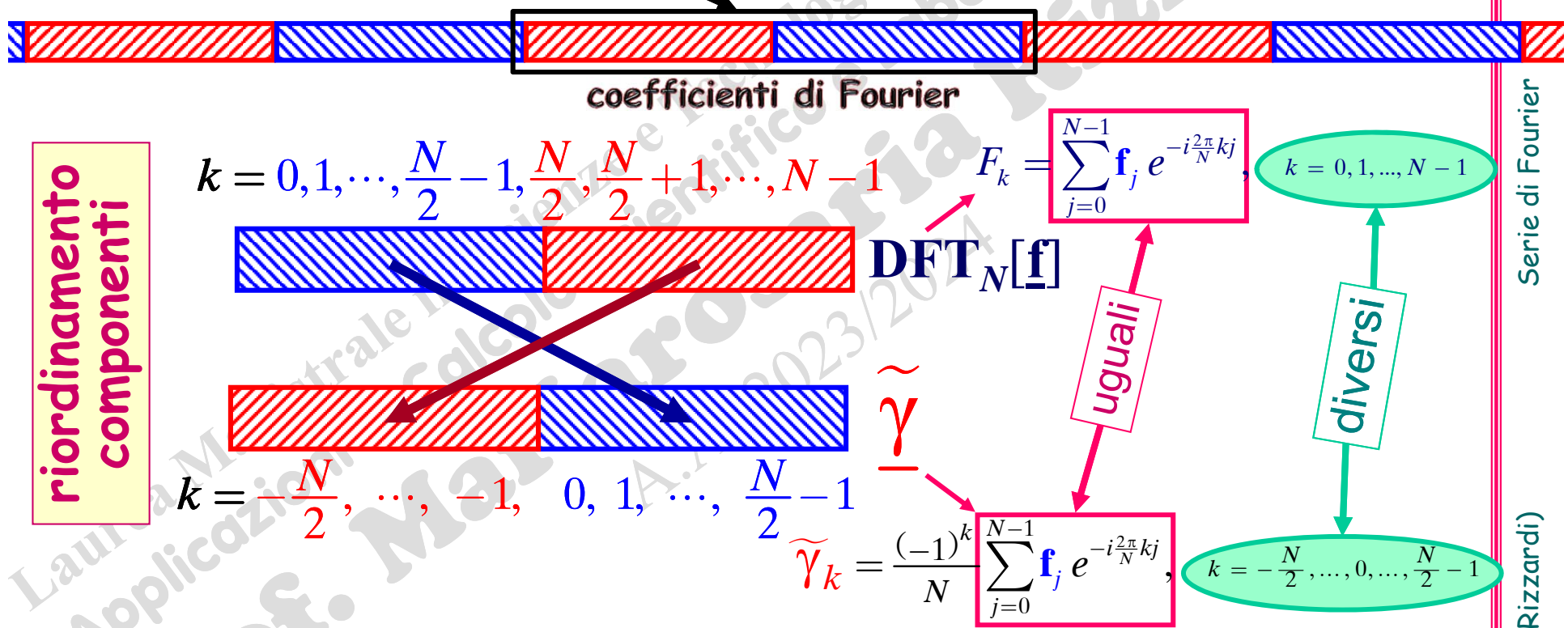


Quiz
ed in $[0, T]$?

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{(-1)^k}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{f}_j \omega_N^{jk}$$

per $k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$

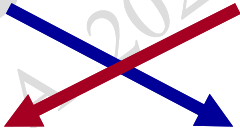
Si può calcolare la **sommatoria** mediante una **DFT_N[f]** purchè si operi un riordinamento delle N componenti (per la periodicità della DFT_N):



Infine per calcolare $\tilde{\gamma}$ si aggiunge: l'ultimo coefficiente $\tilde{\gamma}_{+\frac{N}{2}} = \tilde{\gamma}_{-\frac{N}{2}}$
 ed i fattori moltiplicativi $(-1)^k / N$, $k = -N/2, \dots, N/2$

Algoritmo per $\tilde{\gamma}_k$

Input: $N+1$ campioni equispaziati $f_j=f(t_j)$ (N pari)
in $[-T/2, +T/2]$

1. Costruzione vettore $\underline{\mathbf{f}}$:
$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 = \frac{1}{2}[f(t_0) + f(t_N)] \\ \mathbf{f}_j = f(t_j), & j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$
2. Calcolo della **DFT** (MATLAB **fft**($\underline{\mathbf{f}}$))
3. Riordinamento  (MATLAB **fftshift**())
4. Aggiunta dell'ultima componente*
e dei fattori moltiplicativi $((-1)^k/N, k = -N/2, \dots, +N/2)$.

$(-1)^k$ indica che si cambia segno alle componenti del vettore di posto pari o di posto dispari in funzione del valore di $N/2$.

Cosa cambia nell'algoritmo per i coefficienti di Fourier se calcolati in $[0, 2\pi]$ o in $[0, T]$?

Esercizio

Derivare le formule per i coefficienti di Fourier nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e in $[0, T]$ come conseguenza della Proprietà dello Shift. Che differenza c'è con gli intervalli $[-\pi, +\pi]$ e $[-T/2, +T/2]$?

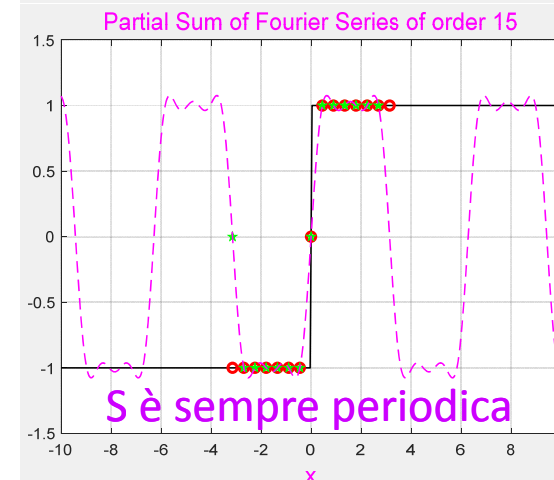
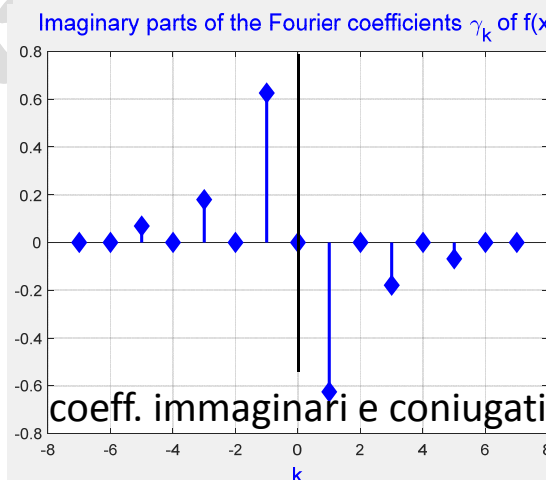
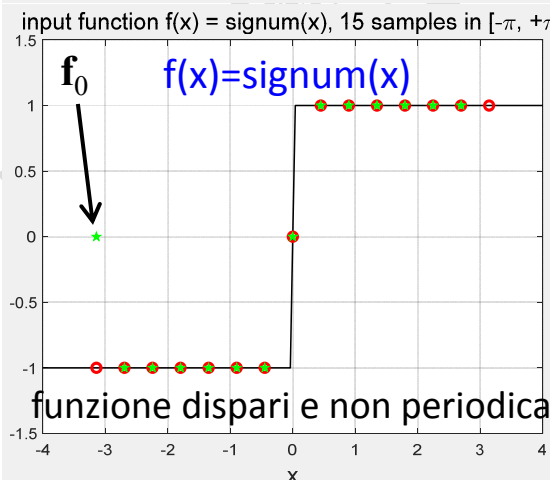
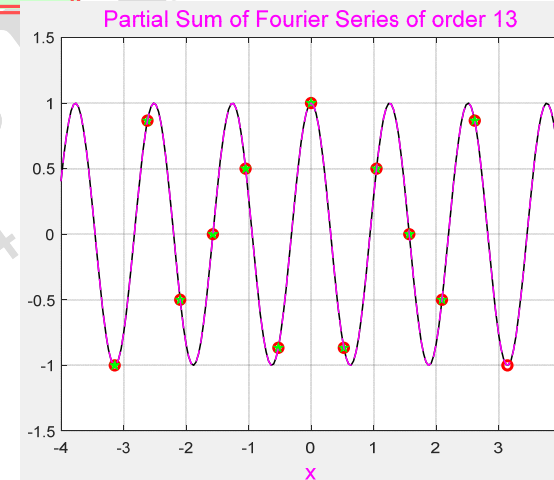
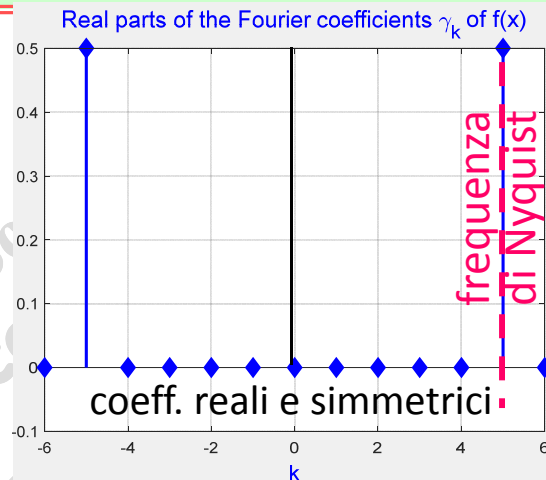
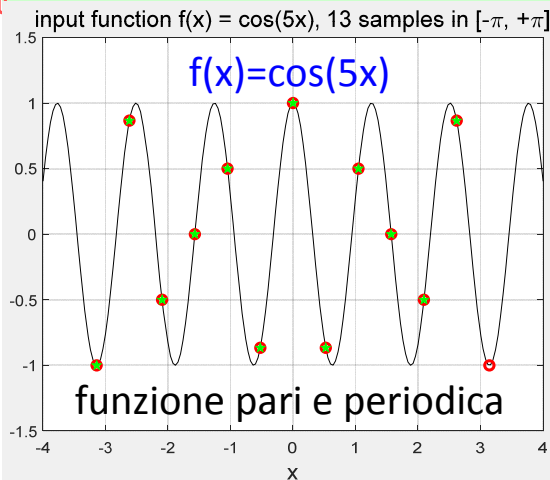
Esempi MATLAB: ridotta della Serie di Fourier

```

pf=@(x) ...; % f(x)
x=linspace(-2*pi,2*pi,499); y=pf(x); % per i grafici
N=14; T=2*pi; tj=T/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj); % campioni
f=[.5*(fj(1)+fj(end));fj(2:end-1)]; % vettore f
F=fftshift(fft(f)); F=[F;F(1)]/N; F(1:2:end)=-F(1:2:end);
plot(x,y,tj,fj,'ro',tj(1:end-1),f,'gp')
stem(-N/2:N/2,imag(F),'b-d')
S=exp(-1i*N*pi/T*x).*polyval(flipud(F),exp(2i*pi/T*x));
plot(x,y,'b',x,real(S),'r-.',tj,fj,'pr')
    
```

```

... N=12; T=2*pi; ...
... F(2:2:end)=-F(2:2:end);
    
```

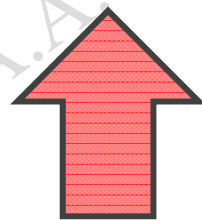


Analisi di Fourier di $f(x)$:

decomposizione in armoniche elementari

Sintesi di Fourier di $f(x)$:

ricostruzione dalle armoniche elementari



Algoritmo ???

Sintesi di Fourier in $[-\pi, +\pi]$ (ricostruzione del segnale)

$$x \in [-\pi, +\pi] \quad f(x) \approx \tilde{S}_{N+1}(x) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \tilde{\gamma}_k e^{ikx}$$

Noti i coefficienti di Fourier di $f(x)$, per calcolare la ridotta della sua FS nei nodi di campionamento ci si può ricondurre ad una **IDFT** in $[-\pi, +\pi]$.

Infatti, valutando $f(x)$ in x_j , dove

$$x_j = j \frac{2\pi}{N} - \pi, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$$f(x_j) \approx \tilde{S}_{N+1}(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \tilde{\gamma}_k e^{ikx_j} = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \tilde{\gamma}_k e^{ik(j \frac{2\pi}{N} - \pi)} =$$

$$= \sum_{k=-N/2}^{+N/2} \tilde{\gamma}_k e^{i \frac{2\pi}{N} kj} e^{ik(-\pi)} = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} (-1)^k \tilde{\gamma}_k e^{i \frac{2\pi}{N} jk}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

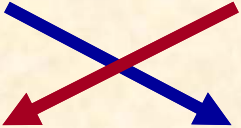
$$\text{IDFT}_N[\underline{\psi}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k e^{i \frac{2\pi}{N} kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

si può usare lo stesso algoritmo dei FC, con qualche modifica

Passi dell'algoritmo in $[-\pi, +\pi]$

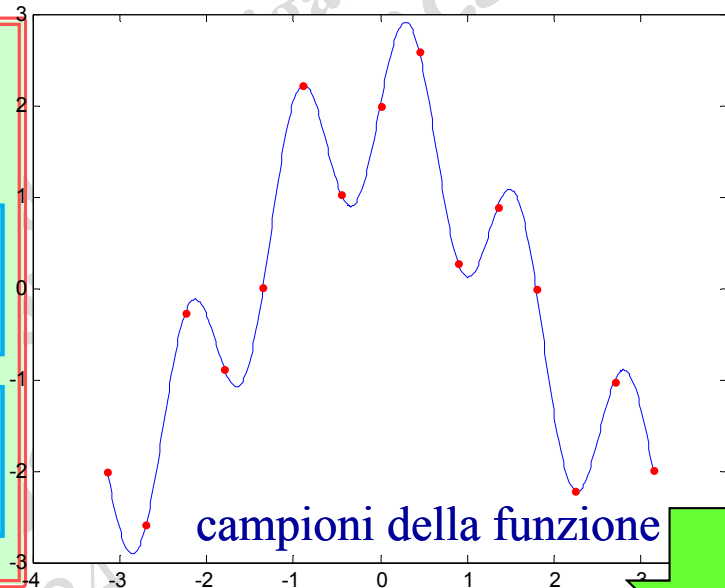
Input: $N+1$ coefficienti di Fourier γ_k (N pari)

Output: $N+1$ campioni equispaziati $f_j \approx f(t_j)$

1. Costruzione vettore $\underline{\Phi}$: $\Phi_k = \tilde{\gamma}_k$, $k = -N/2, \dots, +N/2 - 1$
tranne l'ultimo coefficiente che è uguale al primo
2. Cambio di segno a componenti alternate
(componenti di posto pari o dispari in funzione del valore di $N/2$)
3. Riordinamento  (`fftshift()`)
4. Calcolo della IDFT (`ifft()`)
5. Aggiunta dell'ultima componente e del fattore moltiplicativo
(N , $k = -N/2, \dots, +N/2$).

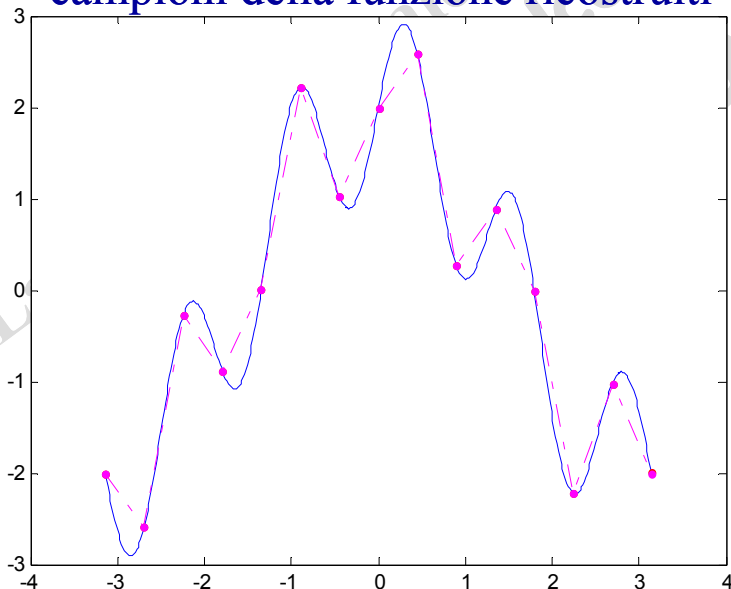
Esempio in $[-\pi, +\pi]$

```
pf=@(x) 2*cos(x)+sin(5*x);  
x=linspace(-pi,pi,400); y=pf(x);  
N=14; j=(-N/2:N/2)'; tj=2*pi/N*j; fj=pf(tj);  
figure; plot(x,y,tj,fj,'r.')  
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)];  
F=fftshift(fft(f)); F(1:2:end)=-F(1:2:end); DFT  
F=[F;F(1)]/N;  
figure; stem(j, abs(F),'r-o');  
G=F(1:end-1);  
G(1:2:end)=-G(1:2:end); IDFT  
g=ifft(fftshift(G)); g=[g;g(1)]*N;  
figure; plot(x,y,'b',tj,fj,'r.',tj,real(g),'.m-.')
```

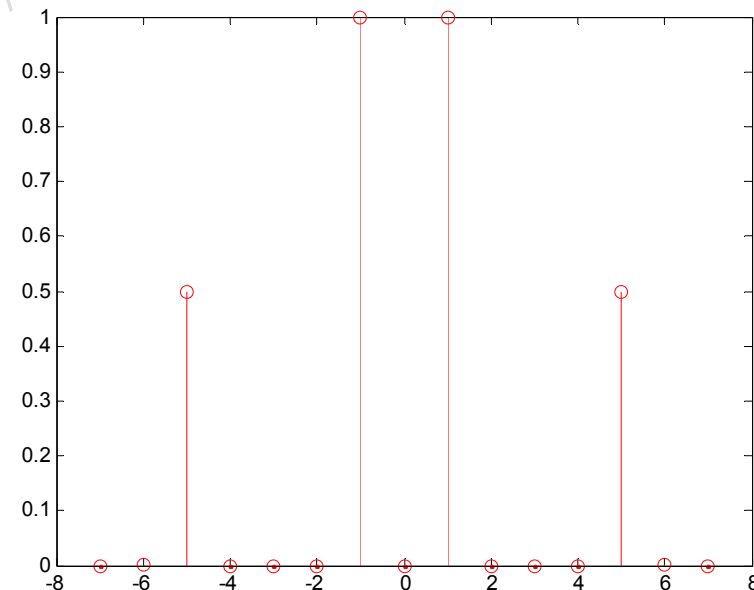


campioni della funzione

campioni della funzione ricostruiti



modulo dei coefficienti di Fourier



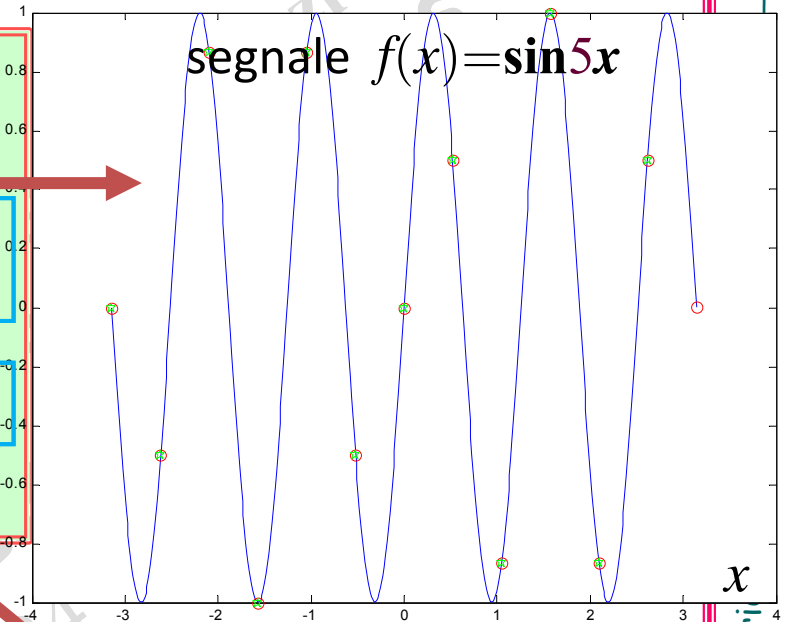
Ricostruzione del segnale con polinomio trigonometrico

```

pf=@(x) sin(5*x); % sin(5x)
x=linspace(-pi,pi,499); y=pf(x);
N=12; tj=2*pi/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj);
figure; plot(x,y,tj,fj,'ro',tj(1:end-1),f,'gp')
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)];
F=fftshift(fft(f)); F=[F;F(1)]/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end);
figure; stem(-N/2:N/2,imag(F),'b-d')
G=F(1:end-1); G(2:2:end)=-G(2:2:end);
g=ifft(fftshift(G)); g=[g;g(1)]*N;
S=exp(-i*N/2*x).*polyval(F(end:-1:1),exp(i*x));
figure; plot(x,y,'b',x,real(S),'r-.',tj,real(g),'pg')
    
```

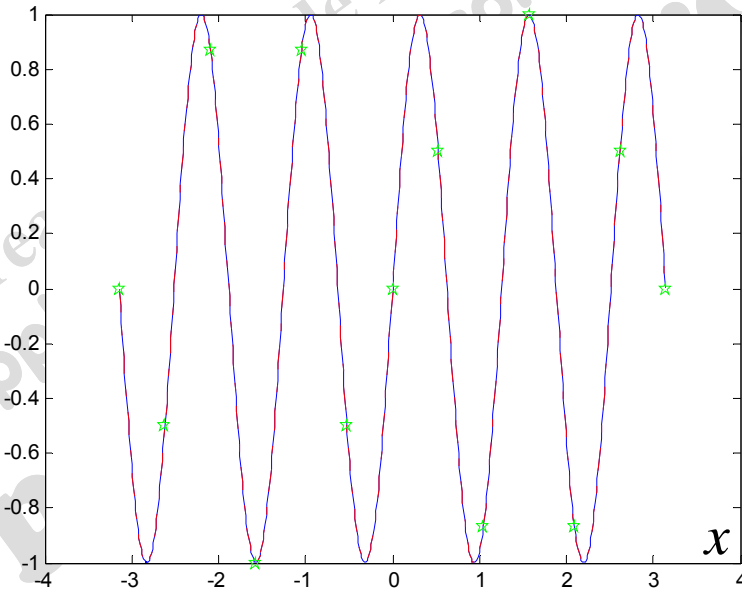
DFT

IDFT

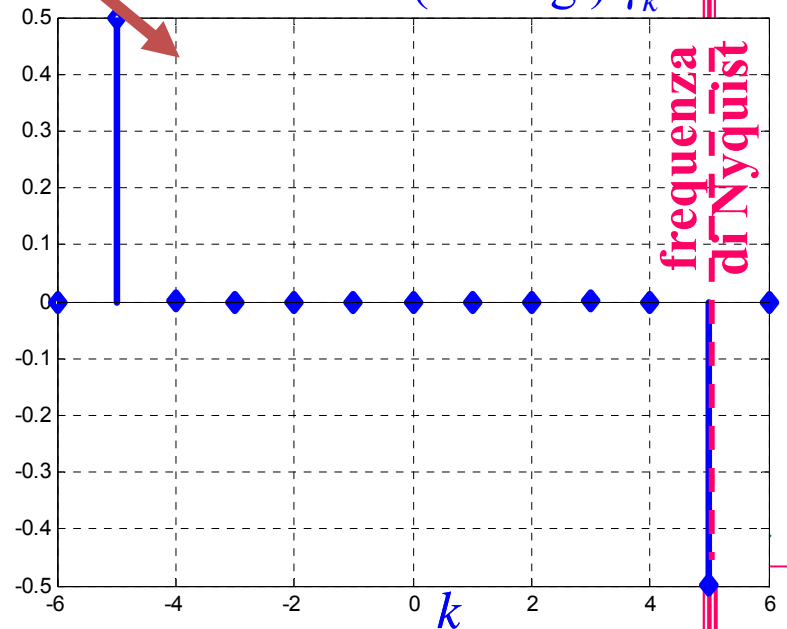


12.61

segnale ricostruito



coefficienti (immag.) γ_k



frequenza di Nyquist

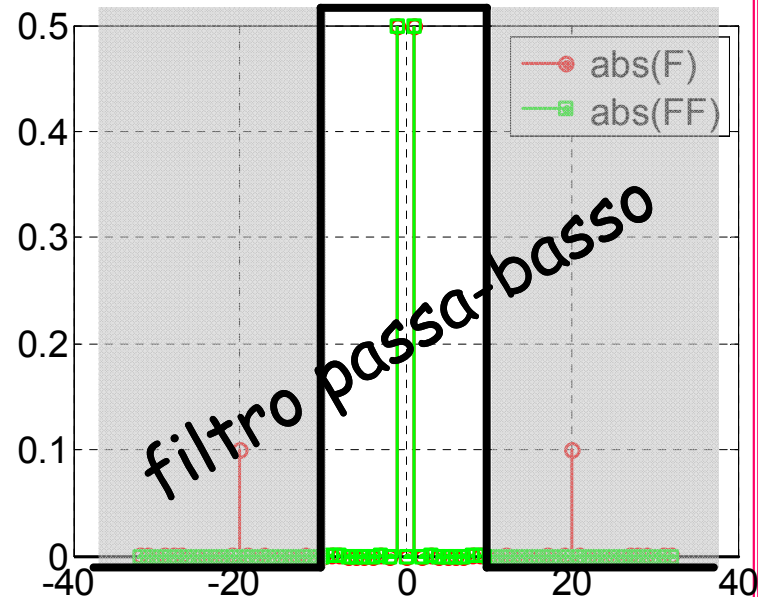
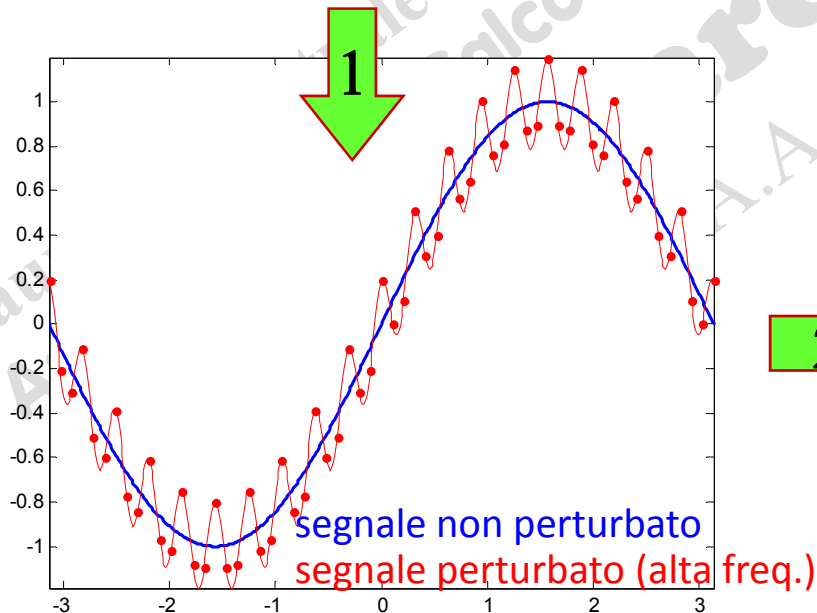
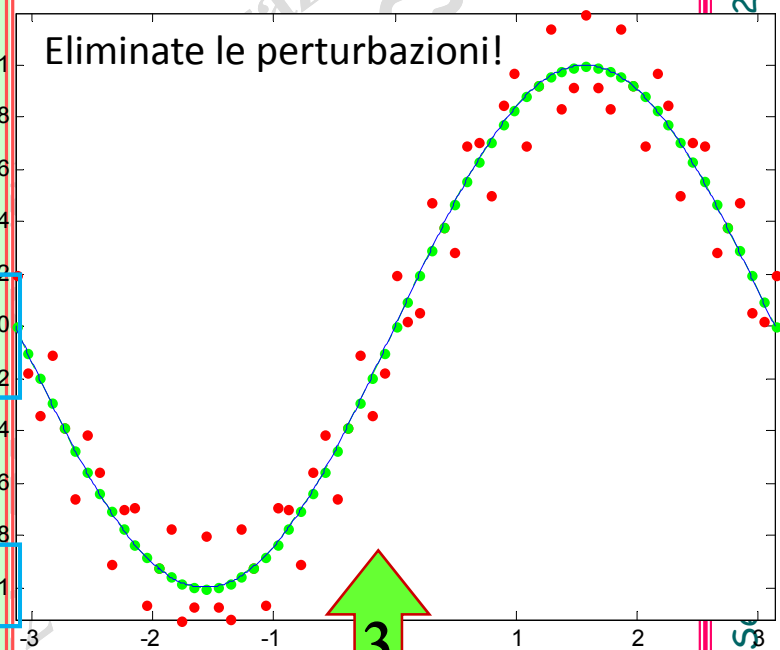
Applicazione: filtraggio di un segnale

```

pf=@(x)sin(x);      pNoise=@(x)0.2*cos(20*x);
x=linspace(-pi,pi,499); y=pf(x); % segnale non perturbato
yp=pf(x) + pNoise(x); % segnale perturbato
N=64; T=2*pi; nu=-N/2:N/2; tj=T/N*nu';
fj=pf(tj) + pNoise(tj); % campioni perturbati
figure; plot(x,y,x,yp,'r',tj,fj,'r.')
f=[.5*(fj(1)+fj(end)); fj(2:end-1)];
F=fftshift(fft(f)); F=[F;F(1)]/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end);
FF=zeros(size(F)); k=find(abs(nu)<10); FF(k)=F(k);
figure; stem(nu, abs(F),'r-o'); hold on
stem(nu, abs(FF),'g--s')
G=FF(1:end-1); G(2:2:end)=-G(2:2:end);
g=ifft(fftshift(G)); g=[g;g(1)]*N;
figure; plot(x,y,'b',tj,fj,'r.',tj,real(g),'.g-.')
    
```

DFT

IDFT



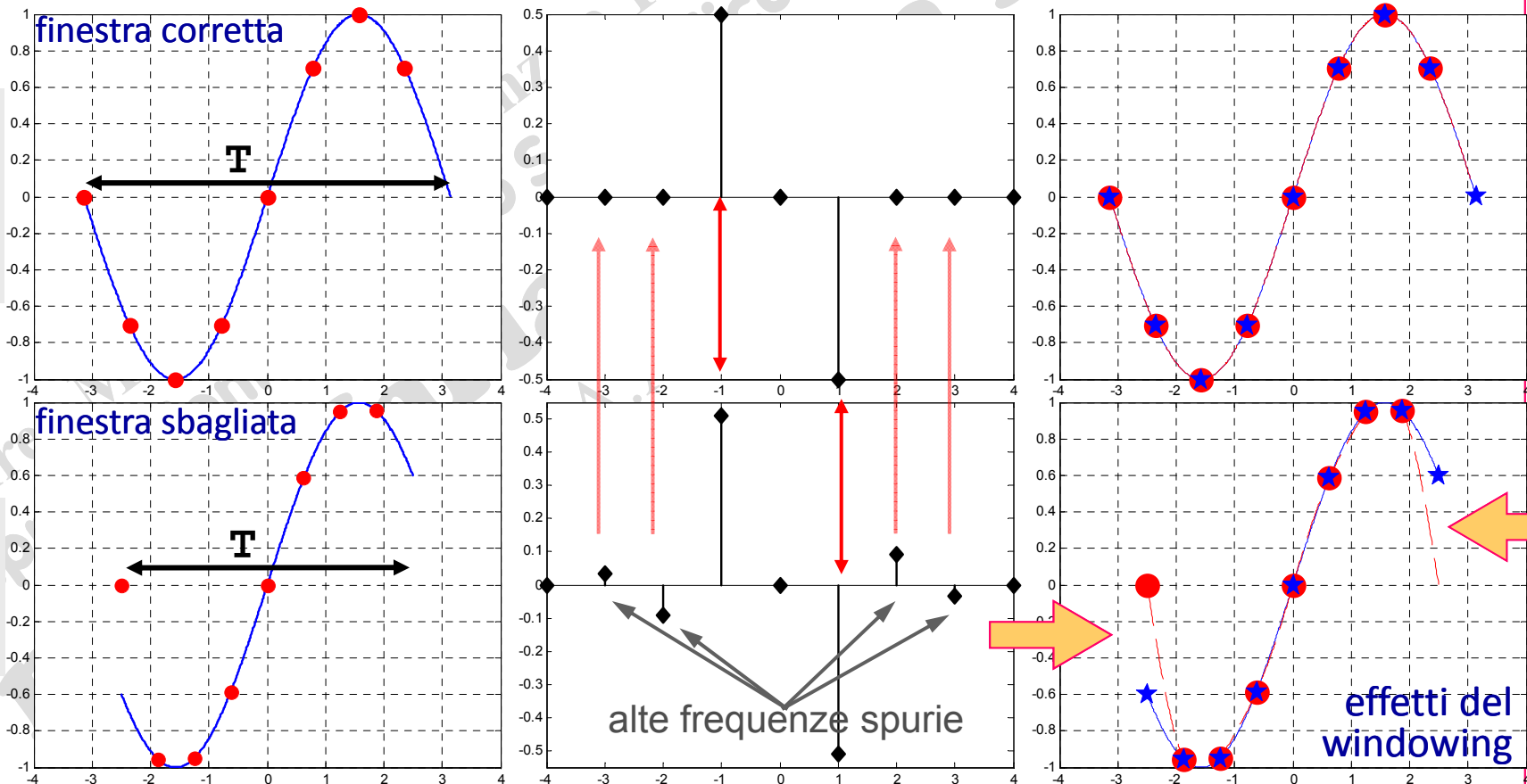
Esempio: errore di windowing

```

pf=@sin; T=5; x=linspace(-T/2,T/2,499); y=pf(x);
N=8; tj=T/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj); figure; plot(x,y, tj(1:end-1),f,'ro'); grid on
f=[.5*(fj(1)+fj(end));fj(2:end-1)]; F=fftshift(fft(f)); F=[F;F(1)]/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end);
figure; stem(-N/2:N/2,imag(F),'k-d') % FC
S=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(F(end:-1:1),exp(i*2*pi/T*x)); % ridotta della FS
figure; plot(x,y,'b',x,real(S),'r--',tj(1:end-1),f,'ro',tj,fj,'bp')
    
```

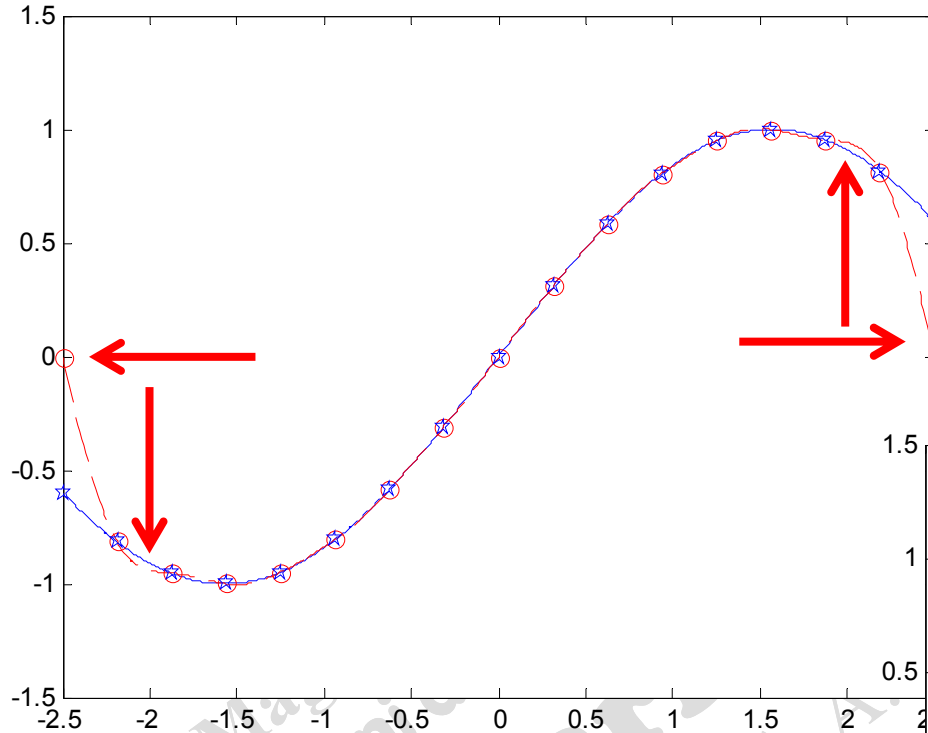
$T = 2\pi$

$T = 5$

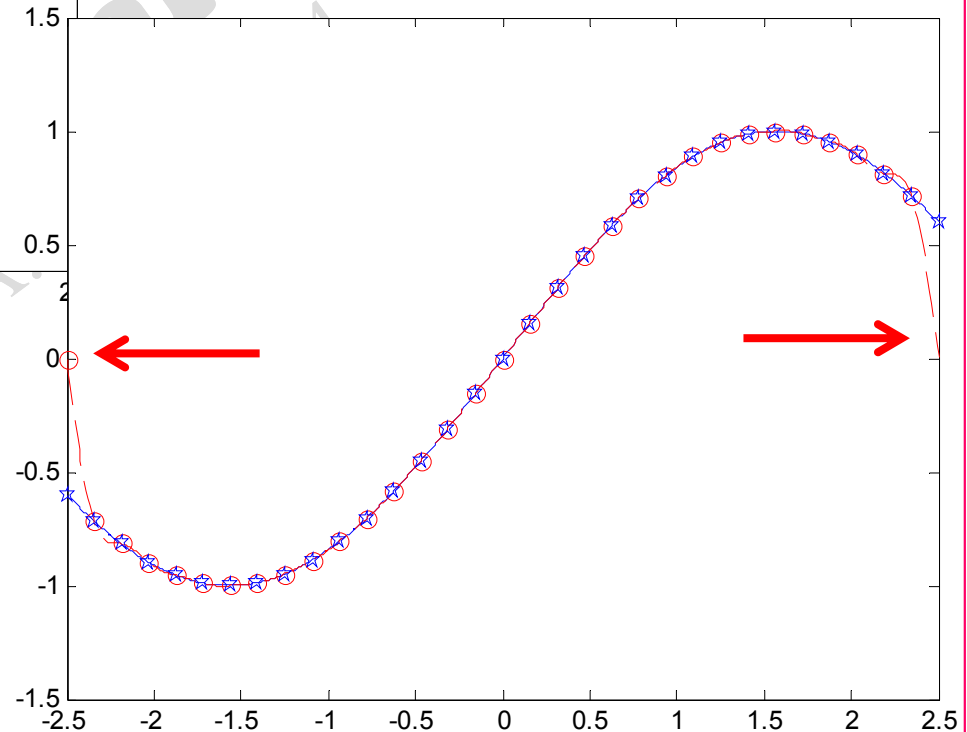


Esempio: errore di windowing

Ridotta di ordine $N=16$ della Serie di Fourier in $T=5$



Ridotta di ordine $N=32$ della Serie di Fourier in $T=5$

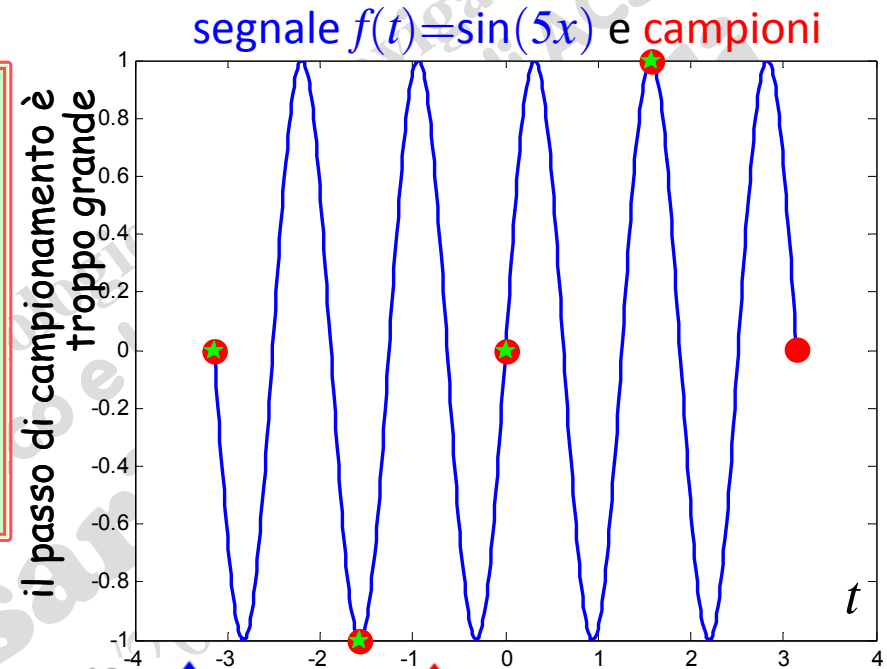


Anche le ridotte di ordine maggiore, agli estremi dell'intervallo di ampiezza $T=5$, oscillano e si discostano dalla funzione che ha generato i campioni

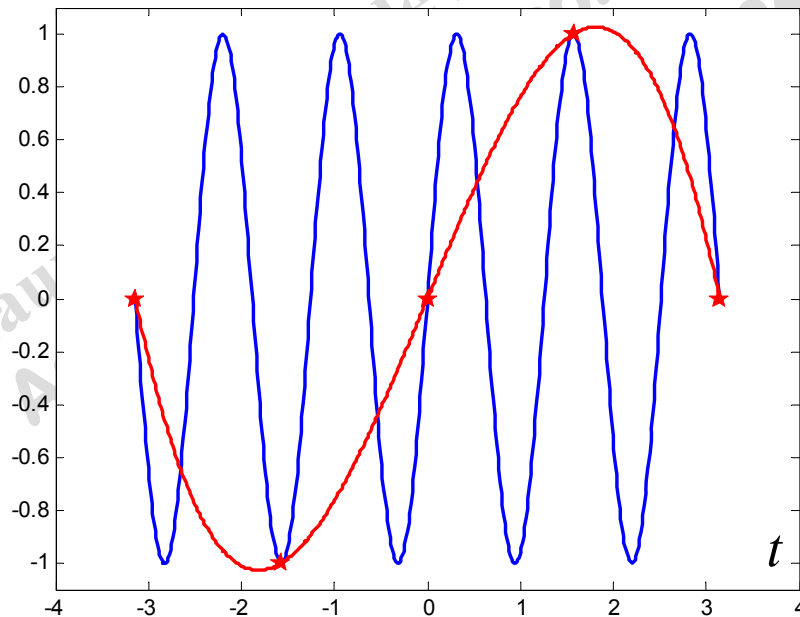
Esempio: errore di aliasing

```

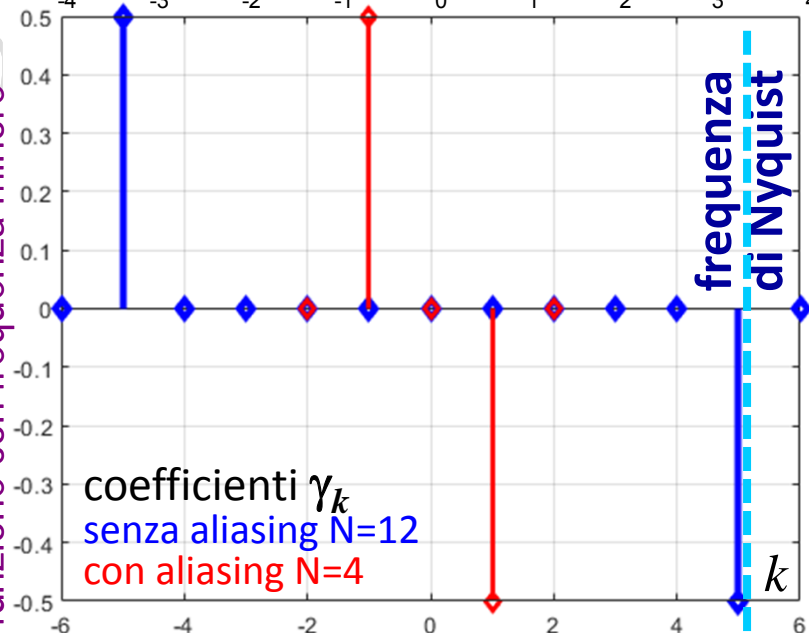
pf=@(x) sin(5*x); T=2*pi; N=4; % N è piccolo!
x=linspace(-T/2,T/2,499);y=pf(x);
tj=T/N*(-N/2:N/2)'; fj=pf(tj);
f=[.5*(fj(1)+fj(end));fj(2:end-1)];
plot(x,y,tj,fj,'ro',tj(1:end-1),f,'gp')
F=fftshift(fft(f));F=[F;F(1)]/N;
F(2:2:end)=-F(2:2:end);
h=stem(-N/2:N/2,imag(F),'r-d'); ...
S=exp(-i*N*pi/T*x).*polyval(F(... ...));
plot(x,y,'b',x,real(S),'r',tj,real(g),'pr')
    
```



segnale ricostruito: $\sin(x)$ invece di $\sin(5x)$



se la frequenza di campionamento non è adeguata, si ricostruisce una funzione con frequenza minore



Come eliminare l'errore di Windowing ?

Basta "osservare" se possibile il segnale per intero!

Nel caso di funzioni periodiche, basta scegliere la finestra uguale al periodo della funzione oppure ad un suo multiplo.

Come eliminare l'errore di Aliasing ?

Basta "campionare" tutte le frequenze!

Nel caso di funzioni a banda limitata, basta scegliere un "opportuna" frequenza di campionamento.

Teorema del Campionamento*  "opportuno" passo

* in seguito con la Trasformata di Fourier