Esercizi

ACS2_10 – Migliore Approssimazione (***m.a.***) in $\|\cdot\|_2$ e Minimi Quadrati Lineari.

1. Confrontare graficamente le seguenti *migliori approssimazioni lineari in* $\|\cdot\|_2$ alla funzione $f(x)=x^3$ in $[-1,+1]$:
   - $f_1(x)$: ***m.a.*** nel sottospazio $\Pi_1[-1,+1]=\text{span}\{1,x\}$ dei polinomi algebrici al più di 1° grado sull'intervallo $[-1,+1]$;
   - $f_2(x)$: ***m.a.*** nel sottospazio $\boldsymbol{Q}_1[-1,+1]=\text{span}\{1,e^{ix}\}$ dei polinomi trigonometrici al più di 1° grado sull'intervallo $[-1,+1]$;
   - $f_3(x)$: ***m.a.*** nel sottospazio $\boldsymbol{P}_2[-1,+1]=\text{span}\{1,\cos(x),\sin(x)\}$ dei polinomi trigonometrici al più di 2° grado sull'intervallo $[-1,+1]$;

   Commentare i risultati.

   Per un generico intervallo $[\alpha,\beta]$, il prodotto scalare di f e g è definito come $\langle f,g\rangle=\int_\alpha^\beta \overline{f(x)}\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

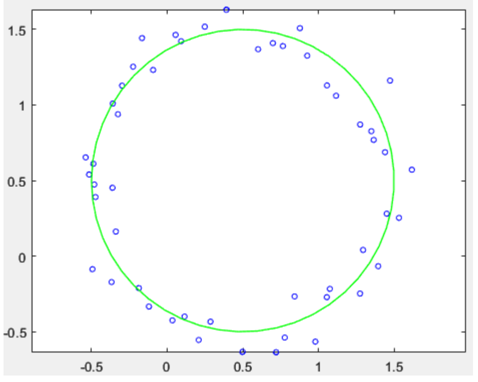
2. Trovare le *migliori approssimazioni lineari in* $\|\cdot\|_2$ alla funzione $f(x)=x^3$ rispettivamente nei sottospazi $\boldsymbol{Q}_1[-\pi,+\pi]=\text{span}\{1,e^{ix}\}$ dei polinomi trigonometrici al più di 1° grado e $\boldsymbol{P}_2[-\pi,+\pi]=\text{span}\{1,\cos(x),\sin(x)\}$ dei polinomi trigonometrici al più di 2° grado sull'intervallo $[-\pi,+\pi]$. Confrontare i risultati fra loro e con quelli dell'esercizio 1.

3. Verificare, mediante il *Symbolic Math Toolbox* di MATLAB, che per un sistema incompatibile il $\min\|X_{\text{LS}}\|_2$, dove X_{LS} rappresenta l'insieme delle soluzioni Least Squares (LS), è raggiunto dalla soluzione LS calcolata con `pinv()`. Il problema è descritto di seguito.

```
u=[1 1 1 1]'; v=[1 -1 1 -1]'; A=u*v'; A=A(:,1:3); b=[1 0 1 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
     1    2        % sistema incompatibile A*x=b
disp(size(A))      % rank(A)=1 non max
     4      3
```

4. Trovare in $\mathbb{R}^2$ la circonferenza Γ di *best fit*, di equazione: $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, a partire da un campione random di N dati ottenuto come descritto nel riquadro MATLAB. Qual è la soluzione di $\min\|\cdot\|_2$? È unica la soluzione? Se sì, perché?

```
% N=,100,150,200 num. campioni
X0=0.5; Y0=0.5; r0=1; N=50;
t=linspace(-pi,pi,N)';
% Γ esatta
Xi=X0+r0*cos(t);
Yi=Y0+r0*sin(t);
perc=0.15; % perturbazione percentuale
% Γ perturbata
xi=Xi+perc*(2*rand(N,1)-1);
yi=Yi+perc*(2*rand(N,1)-1);
plot(xi,yi,'ob'); axis equal;
hold on; plot(Xi,Yi,'r')
```



5. Risolvere mediante il metodo dei Minimi Quadrati Lineari il seguente problema di fitting (*wind tunnel experiment*):

   velocità `v` (m/s) `v=[10 20 30 40 50 60 70 80]';`

   forza `F` (N) `F=[25 70 380 550 610 1220 830 1450]';`

   il cui modello matematico è la funzione potenza: $y = f(x) = a\,x^b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

6. Trovare, mediante *Symbolic Math Toolbox*, la ***m.a.*** *in* $\|\cdot\|_2$ di n numeri reali $\{a_k\}_{k=1,\dots,n}$ (fissando un valore per n). A cosa corrisponde la ***m.a.*** trovata?

7. Trovare la retta dei Minimi Quadrati relativamente ai seguenti insiemi di dati nel piano e commentare i risultati ottenuti:
   - A=$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5)\}$ [sugg.: usare l'equazione $ax + by + c = 0$];
   - B=$\{(1,1),(-1,2),(1,3),(-1,5)\}$ [sugg.: usare l'equazione $y = mx + q$];

8. Il file `salaries.csv` (scaricabile dalla pagina del corso sulla piattaforma di eLearning) contiene dati relativi a 398 giocatori NBA (National Basketball Association) nella stagione 2015-2016: `Name` (nome del giocatore), `Rebounds` (rimbalzi presi), `Fouls` (falli compiuti), `Points` (punti segnati), `Salary` (compenso previsto dal contratto). Per leggere i dati numerici dal file e memorizzarli in una matrice, usare il seguente codice MATLAB:

```
T=readtable('salaries.csv')
T =
  398×5 table
              Name               Rebounds    Fouls    Points      Salary
    _______________________      ________    _____    ______    __________

    {'Aaron Brooks'       }        101        132       491        2.7e+06
    {'Aaron Gordon'       }        507        153       719     4.3513e+06
    {'Aaron Harrison'     }         15         10        18     8.7464e+05
    {'Adreian Payne'      }        111         77       132     2.0222e+06
    {'Al Horford'         }        596        163      1249      2.654e+07
               :                    :          :         :           :
M=table2array(T(:,2:end));
```

Si vuole determinare la ***m.a.*** *in* $\|\cdot\|_2$ dei dati, minimizzando il seguente funzionale:

$$J_{LS} = \sum_{k=1}^{398}\left[c_1(\text{Rebounds})_k + c_2(\text{Fouls})_k + c_3(\text{Points})_k - (\text{Salary})_k\right]^2$$

Calcolare la norma del residuo della soluzione LS ottenuta e l'elapsed time (`tic;` ... `T=toc`), confrontando i risultati ottenuti calcolati mediante i seguenti algoritmi:

- MATLAB backslash operator (`\`).
- Risoluzione delle Equazioni Normali.
- Fattorizzazione QR.
- Fattorizzazione SVD.