Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_10a

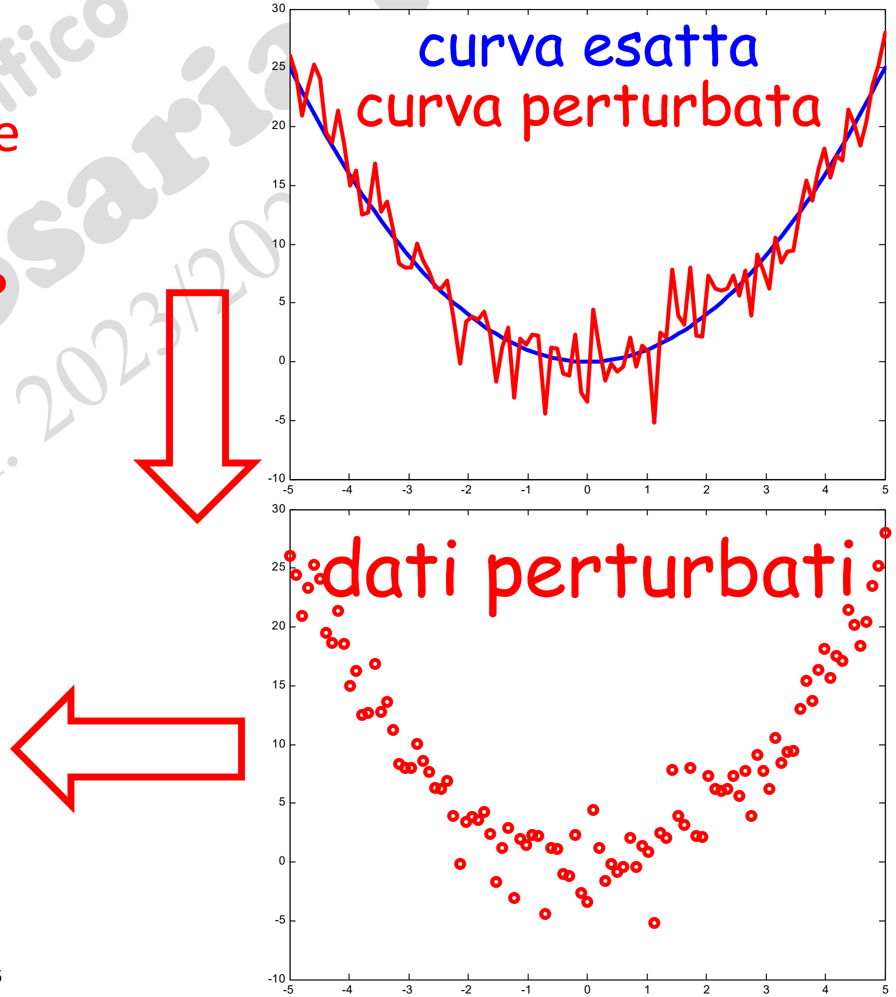
Argomenti trattati

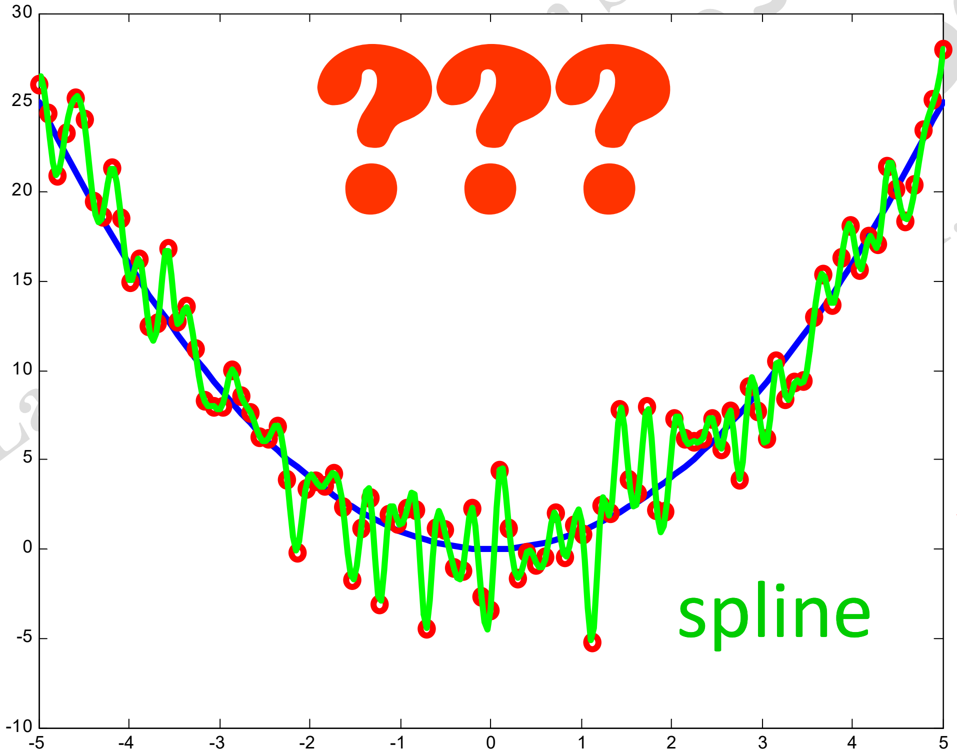
- **Interpolazione VS approssimazione.**
- **Migliore Approssimazione in $\|\cdot\|_2$ nei sottospazi a dimensione finita.**

Interpolazione di dati

In generale, una funzione interpolante i valori di una funzione incognita non è una buona approssimazione della funzione che ha generato i dati.

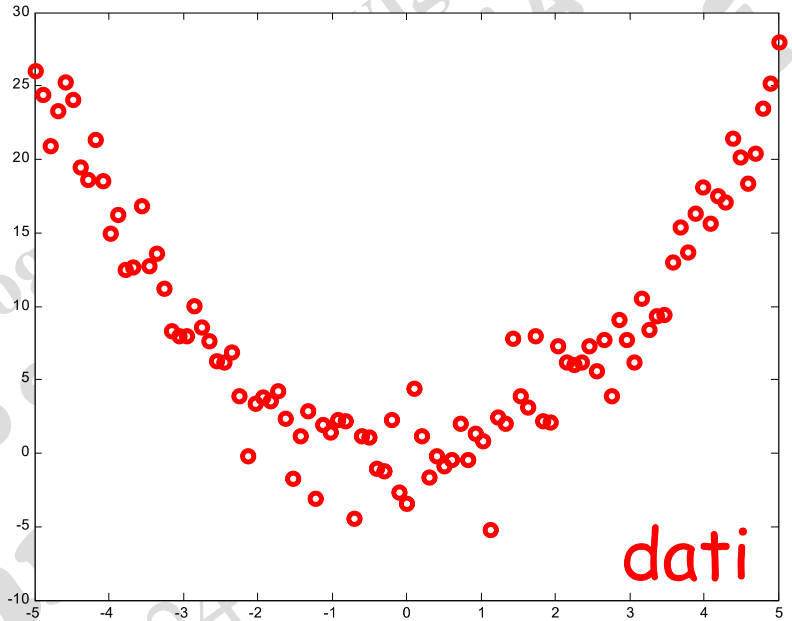
Se i dati sono perturbati, l'interpolazione ricostruisce anche le perturbazioni!



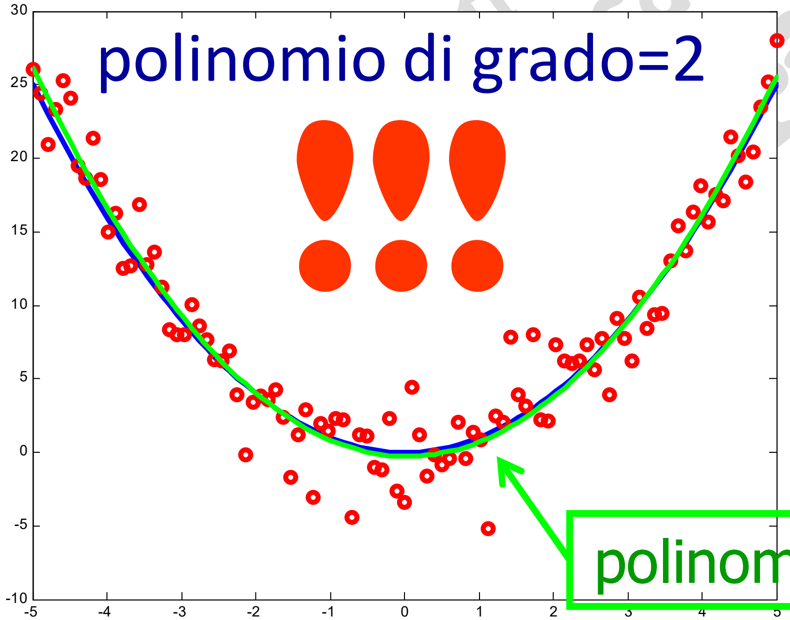


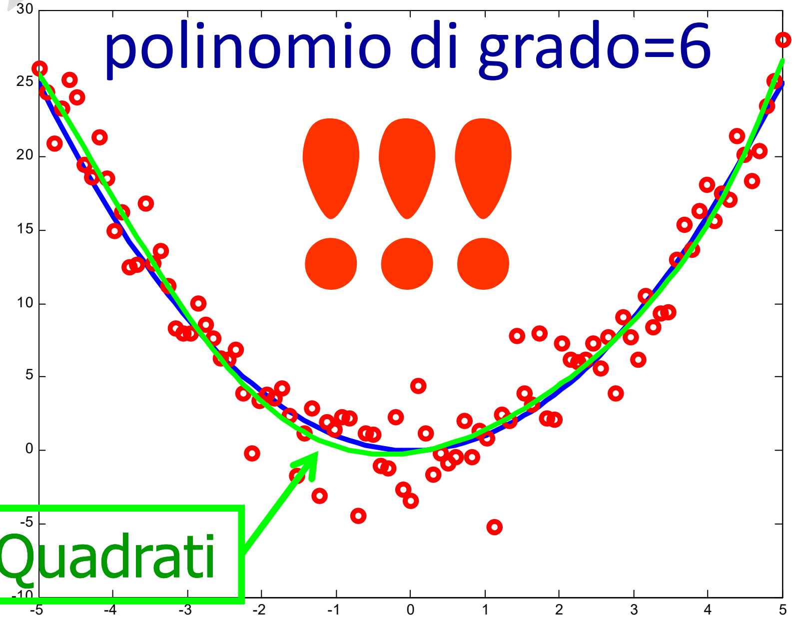
Fitting di dati

Se i dati sono perturbati, il Best Fit riduce le perturbazioni!



Fitting mediante polinomio dei Minimi Quadrati





polinomio dei Minimi Quadrati

Migliore approssimazione (m.a.) in Spazi Lineari Normati

Sia $\mathbf{X}$ uno Spazio Lineare, M un sottospazio, $M\subset\mathbf{X}$, ed $f\in\mathbf{X}$, ma $f\notin M$. Un vettore $f^*\in M$ è detto **migliore approssimazione** di f rispetto a $\|\cdot\|$:

def

$$\|f - f^*\| = \min_{g\in M}\|f - g\|$$

$$f^* = \arg\min_{g\in M}\|f - g\|$$

Cioè, f^* è l'approssimazione in M "più vicina" a f rispetto alla norma selezionata.

1. caso discreto e finito (vettore $x \in \mathbb{R}^n$)

norma Euclidea o norma-2 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

norma uniforme o norma-∞ $\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$

norma Taxicab o norma-1 o norma Manhattan $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

2. caso discreto ed infinito (sequenza $\{x_k\}_k \in \ell^p$)

sequenze p-sommabili $\ell^p = \left\{ \{x_k\}_k : \boxed{\sum_k |x_k|^p < \infty} \right\}$

serie convergente

norma-p $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$

Per $p=2$ si ottiene di nuovo la norma Euclidea definita in ℓ^2, lo Spazio Lineare delle sequenze a quadrato sommabile. In ℓ^2 il *prodotto scalare standard*, che induce la norma Euclidea, è: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k y_k \quad \forall x_k, y_k \in \mathbb{C}$

3. caso continuo (funzione $f\in$...)

norma-2 $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$ — $f\in L^2[a,b]$ a quadrato sommabile in $[a,b]$

norma-∞ $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ — $f\in C^0[a,b]$ continua in $[a,b]$

norma-1 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ — $f\in L^1[a,b]$ sommabile in $[a,b]$

Nel caso continuo, la norma Euclidea è definita nello Spazio di Hilbert $L^2[a,b]$, cioè lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile (o a quadrato sommabile); la norma è indotta dal prodotto scalare standard complesso, definito come:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

dove l'integrale va inteso come integrale di Lebesgue; $L^2[a,b]$ contiene classi di equivalenza di funzioni (due funzioni che "coincidono quasi ovunque", cioè "ad eccezione di un insieme di misura nulla" secondo la teoria della misura di Lebesgue, sono considerate uguali); $L^2[a,b]$ is **complete**, mentre $C^2[a,b]$ non lo è.

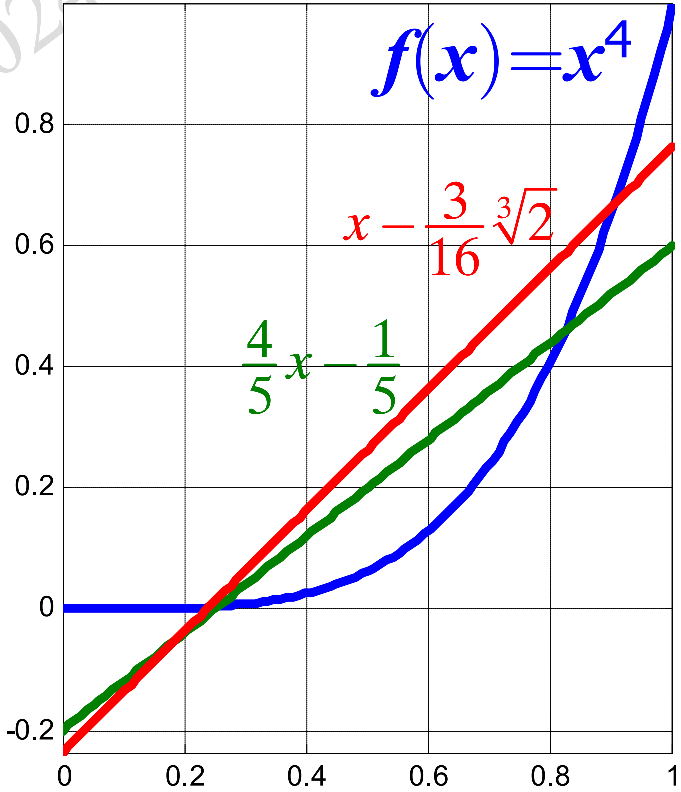
la **migliore approssimazione** dipende da:

- il sottospazio dove viene cercata (... ovvio!)
- la norma scelta

Esempio

La migliore approssimazione della funzione $f(x)=x^4$, $x\in[0,1]$, nel sottospazio dei polinomi di grado 1 è data da:

- $\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$ rispetto a $\|\cdot\|_2$
- $x-\frac{3}{16}\sqrt[3]{2}$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$



Nel caso di dati discreti la migliore approssimazione dipende anche da:

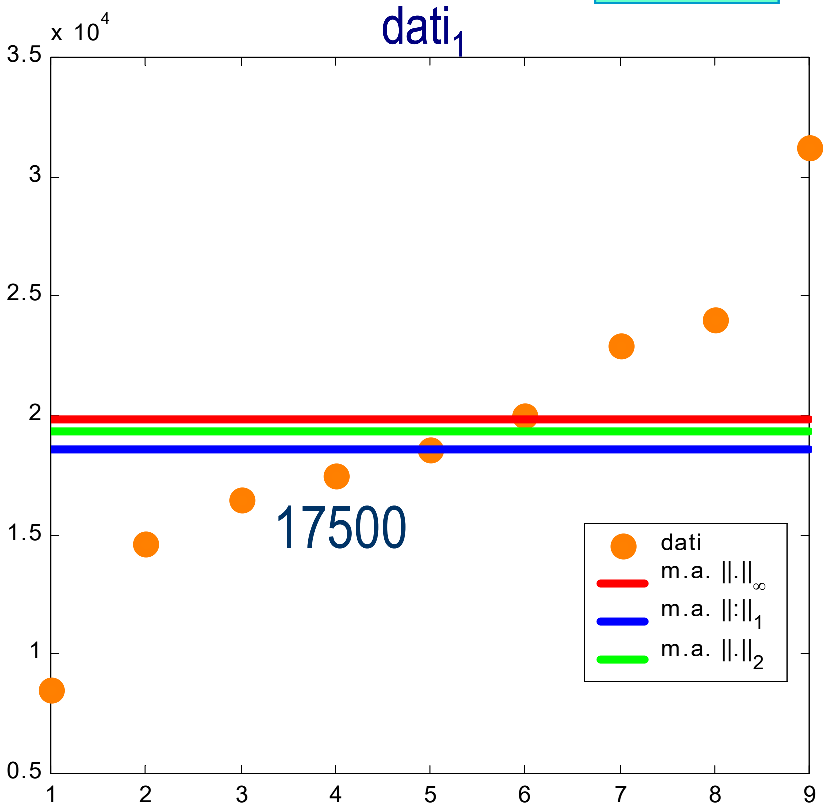
❖ i particolari dati

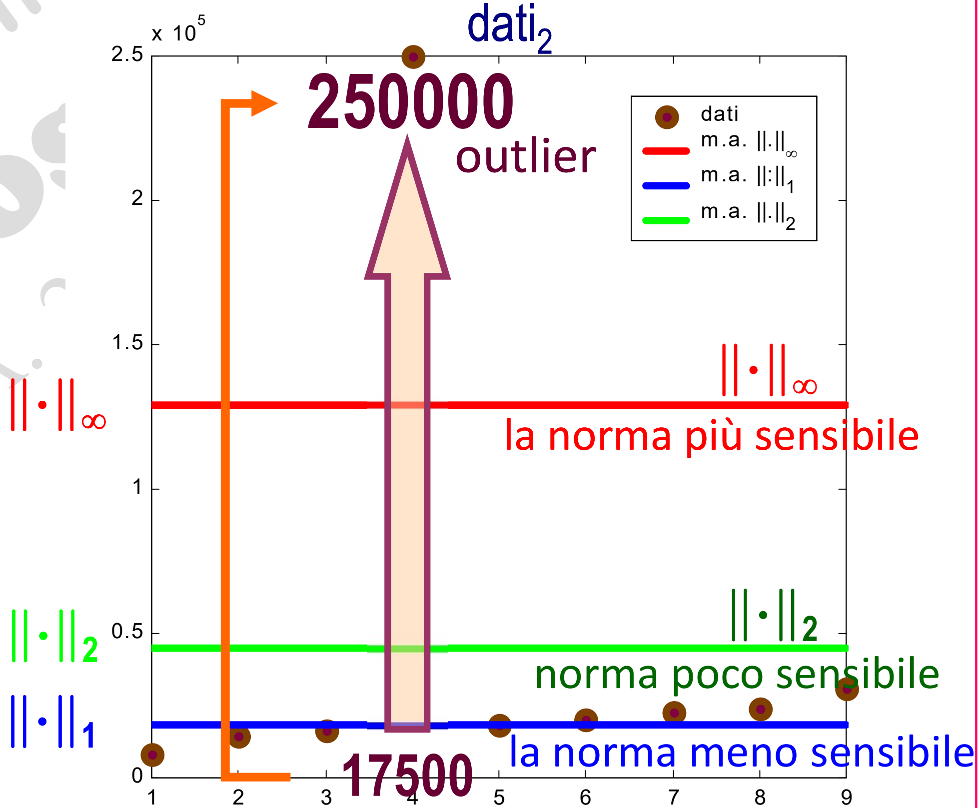
Esempio

Si vogliono approssimare tutti i dati con un singolo valore

$dati_1$ = (8500,14600,16500, 17500, 18600,20000,22900,24000,31200)

$dati_2$ = (8500,14600,16500, 250000, 18600,20000,22900,24000,31200)





In $dati_2$ un solo valore è stato modificato di molto ...

(prof. M. Rizzardi)

Approssimazione Lineare ai Minimi Quadrati
(LLS: Linear Least Squares)
(migliore approssimazione lineare in $\|\cdot\|_2$)

più semplice da calcolare numericamente

Siano: $\mathbf{X}$ uno Spazio Lineare dotato di $\|\cdot\|_2$ indotta dal $\langle\cdot,\cdot\rangle$

f una funzione $f \in \mathbf{X}$,

M_n un sottospazio di $\mathbf{X}$, con dimensione finita ($\dim M_n = n < \infty$), del quale è nota una base ($M_n = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$).

Teorema di esistenza ed unicità
della m.a. rispetto alla $\|\cdot\|_2$ in un sottospazio a dimensione finita

Il problema della **migliore approssimazione lineare** in $\|\cdot\|_2$ di f in M_n ($\dim M_n < \infty$) ammette **un'unica soluzione** $f_n^* \in M_n \Rightarrow f_n^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k$

tale che $f_n^* = \arg\min_{g_n \in M_n} \|f - g_n\|_2 \Leftrightarrow \|f - f_n^*\|_2 = \min_{g_n \in M_n} \|f - g_n\|_2$

se, e solo se, $\langle f - f_n^*, g_n \rangle = 0 \quad \forall g_n \in M_n$

(cioè, se il vettore residuo $f - f_n^*$ è **ortogonale al sottospazio** M_n).

(intuitivo) Interpretazione geometrica della migliore approssimazione in $\|\cdot\|_2$: proiezione ortogonale

(Teorema precedente)

Teorema di esistenza ed unicità
(Teor. delle Equazioni Normali)

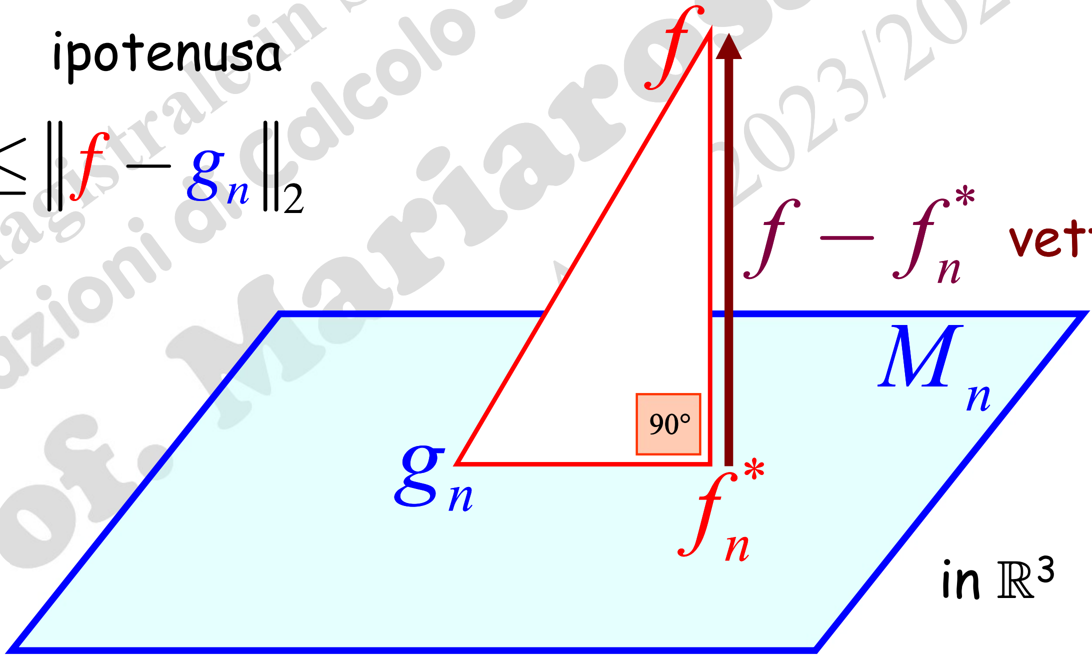
f_n^* = m.a. lineare di f in M_n rispetto a $\|\cdot\|_2$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle f - f_n^*, g_n \rangle = 0 \qquad \forall g_n \in M_n$$

dim $M_n < \infty$

cateto   ipotenusa

$$\left\| f - f_n^* \right\|_2 \leq \left\| f - g_n \right\|_2$$



la m.a. f_n^* di f in M_n è la proiezione ortogonale di f su M_n.

La condizione di ortogonalità al sottospazio M_n, di dimensione finita n e $M_n=\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, è equivalente al sistema lineare di n equazioni nelle n incognite c_k^*:

i^{simo} vettore della base

Teor. delle Eq. Normali
$$\langle f - f_n^*, \varphi_i \rangle = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Se si sostituisce $f_n^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k$ nel precedente $\langle \cdot,\cdot \rangle$ e si riorganizzano le equazioni, si ha

componente di f lungo φ_i

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \boxed{\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle} c_k^* = \langle f, \varphi_i \rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

matrice di Gram

Sistema Lineare delle Equazioni Normali

Migliore Approssimazione lineare in $\|\cdot\|_2$

➤ caso della dimensione finita

Teor. ⇒
- caso discreto
- caso continuo

Il Teorema precedente garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione

➤ caso della dimensione infinita

nessun Teor.
- caso discreto
- caso continuo

?

VEDREMO IN SEGUITO

Migliore Approssimazione lineare in $\|\cdot\|_2$

dimensione finita:

caso discreto

sistemi incompatibili

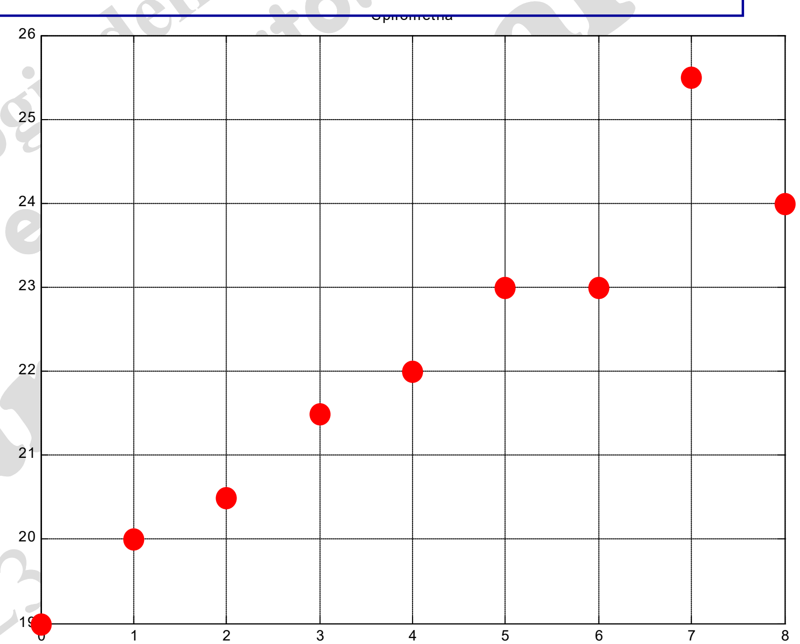
sistemi sovradeterminati

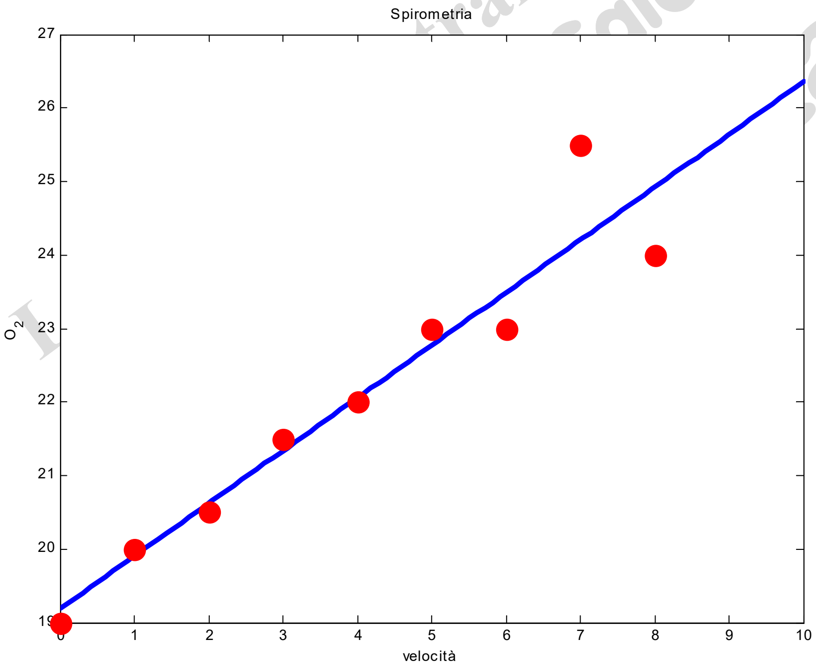
Caso discreto

spazio $\mathbb{R}^n$ con $\langle x,y\rangle = x^\mathsf{T} y$

Esempio di applicazione in $\mathbb{R}^2$

La **spirometria** misura la capacità di diffusione dell'ossigeno nei polmoni. Il grafico a dx mostra i risultati in funzione della velocità a cui si muove il paziente.





Il modello matematico della dipendenza tra ossigeno e velocità è lineare

$$f(x) = mx + q$$

tuttavia ... i campioni non sono allineati!!!

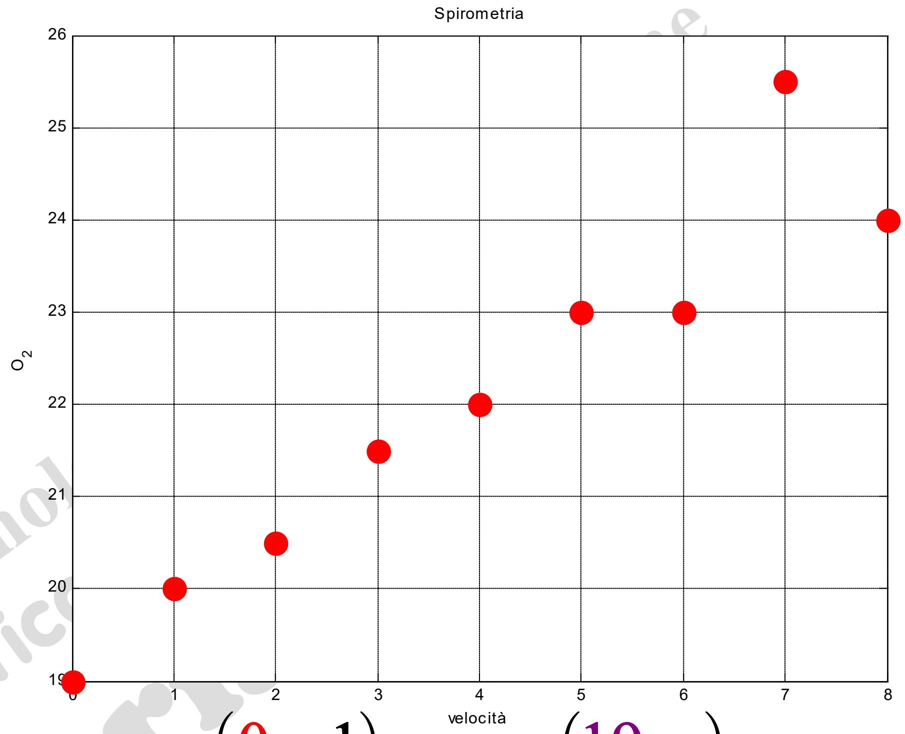
I punti non sono allineati!

Non esiste alcuna retta $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} : y = mx + q$$

passante per tutti i punti, cioè tale che

$$m\, x_i + q = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$



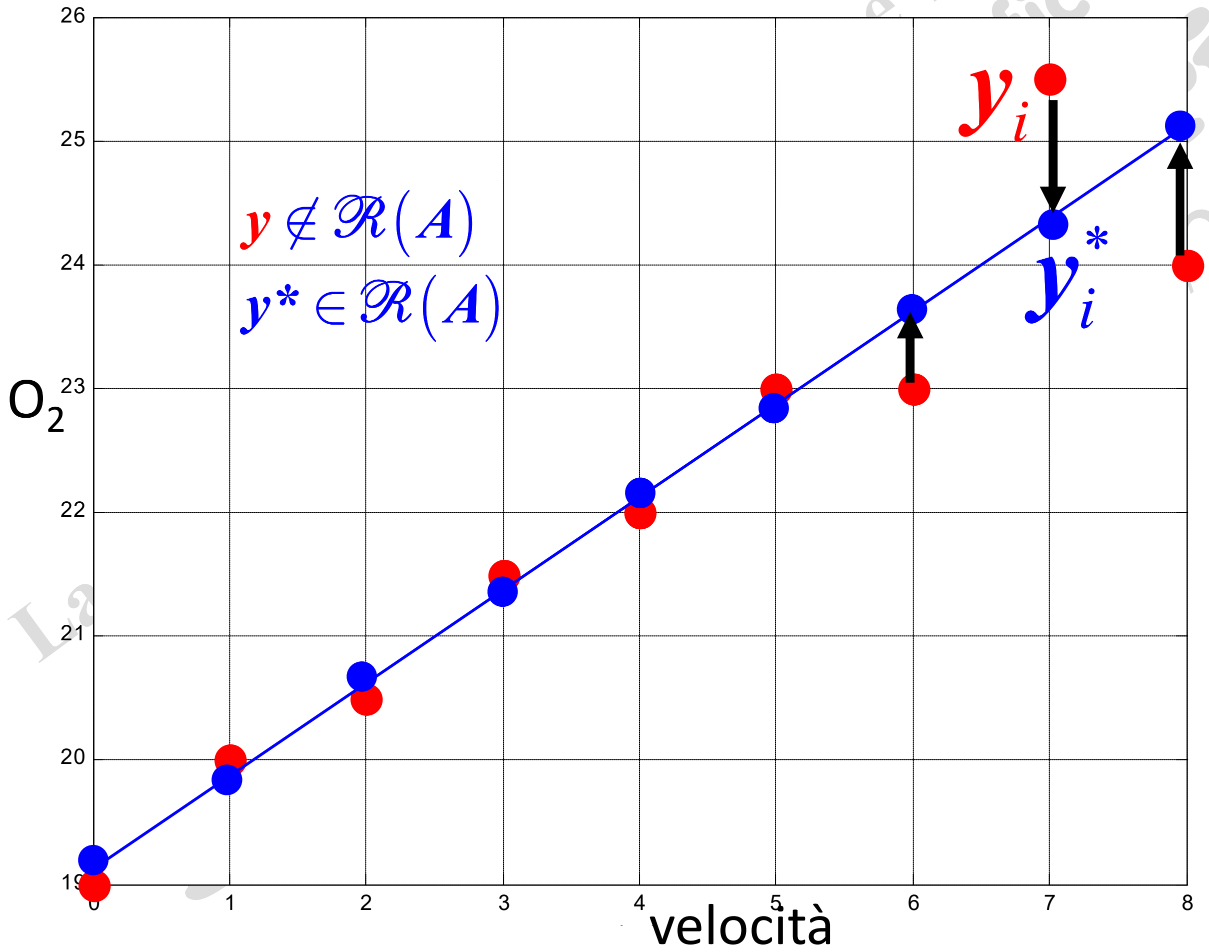
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \\ 20.5 \\ 21.5 \\ 22 \\ 23 \\ 23 \\ 25.5 \\ 24 \end{pmatrix}}_{y}$$

$y \notin \mathcal{R}(A)$

$Au = y$ è un sistema lineare incompatibile a causa degli errori nei dati.

Come trovare la retta?

Il **Metodo dei Minimi Quadrati polinomiali** (LSM: Least Squares Method) sostituisce il termine noto $\boldsymbol{y}$ del sistema lineare incompatibile $\boldsymbol{Au=y}$ con un altro vettore $\boldsymbol{y^*}$ che rende il sistema **compatibile**. LSM approssima $\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y^*}$, dove $\boldsymbol{y^*}$ è il vettore più vicino a $\boldsymbol{y}$ in $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$, cioè $\boldsymbol{y^*}$ è la migliore approssimazione di $\boldsymbol{y}$ in $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$.



$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sistema delle Equazioni Normali

$$\boxed{A^{\mathsf{T}} A\, u^* = A^{\mathsf{T}} y}$$

sempre compatibile

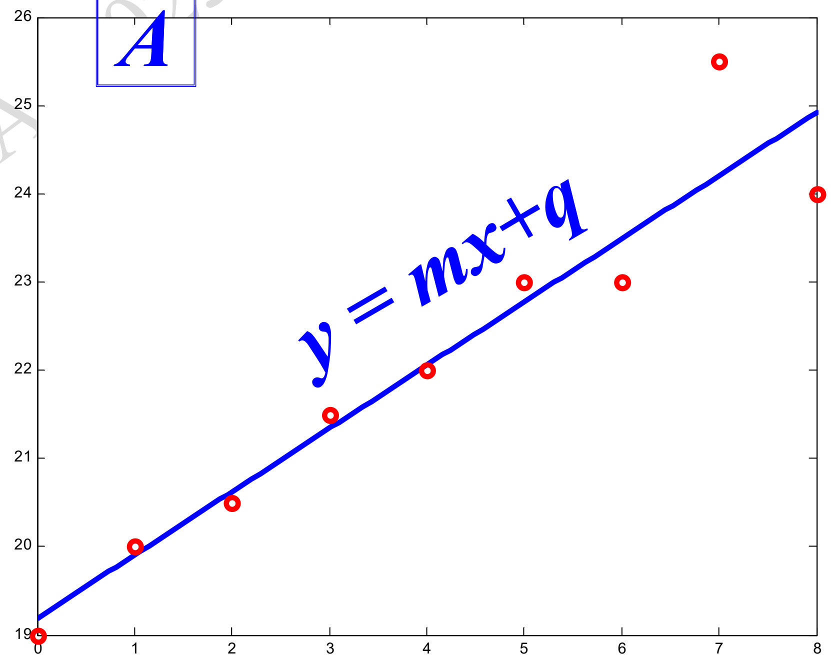
perché?

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle c_k^* = \langle f, \varphi_i \rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{\mathsf{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \\ 20.5 \\ 21.5 \\ 22 \\ 23 \\ 23 \\ 25.5 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 837 \\ 198.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7167 \\ 19.1889 \end{pmatrix}$$



… in *MATLAB*

```
xi=(0:8)'; A=[xi  ones(9,1)]; yi=[19 20 20.5 21.5 22 23 23 25.5 24]';
disp([rank(A) rank([A yi])])
2      3
```
sistema incompatibile **A*c=yi**

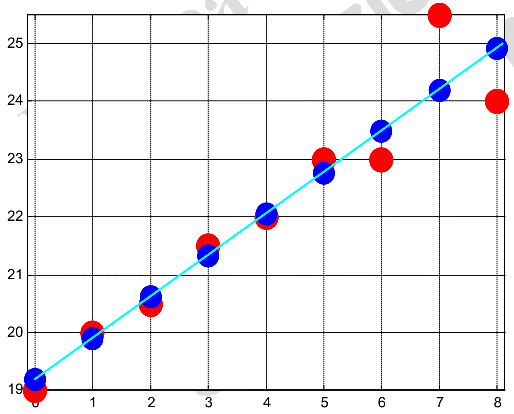
```
c = A \ yi
c =
    0.7167
   19.1889
m=c(1); q=c(2); y_star=m*xi+q;
plot(xi,yi,'or',xi,y_star,'ob')
```

```
 c = polyfit(xi,yi,1)
c =
    0.7167
   19.1889
y_star = polyval(c,xi);
plot(xi,yi,'or',xi,y_star,'ob')
```

Se il sistema lineare **A*c=yi** è incompatibile e rank(A)=n (con n=numero delle colonne in A, n<m), per risolvere il sistema, l'istruzione **c=A\yi** restituisce l'unica soluzione ai minimi quadrati.

<u>Solo per $\mathbb{R}^2$</u>, la funzione **polyfit()** restituisce i coefficienti della migliore approssimazione polinomiale (nel senso dei minimi quadrati) per i dati in **yi**.

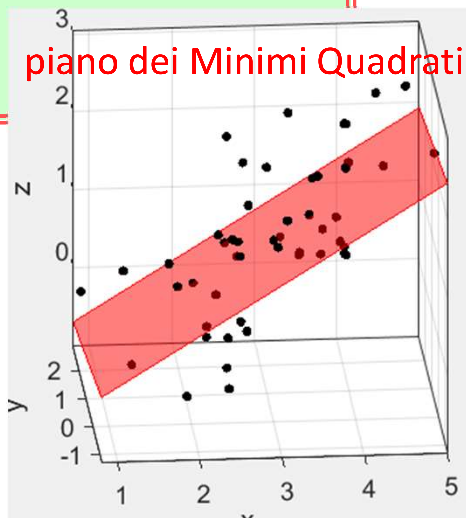
retta dei Minimi Quadrati



Distribuzione Normale Multivariata Random

```
N=50; P=mvnrnd([3 1 1],[1 .2 .7;.2 1 0;.7 0 1],N);
Xi=P(:,1); Yi=P(:,2); Zi=P(:,3);
A=[Xi Yi ones(N,1)];    c = A \ Zi;
```

In questo caso ($\mathbb{R}^3$), non si può usare la funzione **polyfit**.



Caso discreto generale

Risoluzione di un sistema lineare

$$Ax = b, \qquad A_{(m\times n)}$$

mediante il **metodo dei Minimi Quadrati Lineari**, dove

- A è una matrice rettangolare, di rango n, e $n < m$
- Il sistema è incompatibile

Sistemi lineari sovradeterminati

Il Metodo dei Minimi Quadrati sostituisce il sistema incompatibile $Ax=b$, $b \notin \mathcal{R}(A)$, con uno compatibile

$$Ax = p^* \quad (p^* \in \mathcal{R}(A))$$

dove $p^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* A_{.,k}$ è la **migliore approssimazione** di b in $\mathcal{R}(A)$, cioè il vettore di $\mathcal{R}(A)$ "più vicino a b" rispetto a $\|\cdot\|_2$.

DEF x^* = soluzione ai Minimi Quadrati del sistema incompatibile $Ax=b$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$x^* : Ax^* = p^* \quad (x^* \text{ soluzione del sistema } Ax = p^*)$$

dove

$$p^* = \arg\min_{p \in \mathcal{R}(A)} \|b - p\|_2$$

… e se il sistema è compatibile?

sistema incompatibile

```
A=[1 2; 1 5; 0 0];
b=[4 3 9]';
disp([rank(A) rank([A b])])
2      3
c=A\b;    d=(A'*A)\(A'*b);
disp([c d])
    4.6667     4.6667
   -0.3333    -0.3333
```

sistema compatibile

```
A=[1 2; 1 5; 0 0];
b=[4 3 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
2      2
c=A\b;       d=(A'*A)\(A'*b);
disp([c d])
    4.6667     4.6667
   -0.3333    -0.3333
```

In questo caso, il metodo dei Minimi Quadrati restituisce
l'unica soluzione
oppure
una delle infinite soluzioni
del sistema.

sistema compatibile indeterminato

```
A=[1 2; 1 2; 0 0];
b=[4 4 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
1      1
c=A\b;       d=(A'*A)\(A'*b);
disp([c d])
         0     0.0000
    2.0000     2.0000
```

Algoritmo

Per risolvere un sistema incompatibile $Ax=b$ mediante il metodo dei Minimi Quadrati ...

1. Si risolve il Sistema delle Equazioni Normali

$$A^T A\, c^* = A^T b$$

2. Si calcola $p^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* A_{\cdot,k}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{Ac^* = p^*}$

3. Infine per ottenere la soluzione Least Squares x^*, si risolve il sistema compatibile $Ax^* = p^*$.

ma, ... dalla definizione di soluzione Least Squares ...

Proprietà

La soluzione Least Squares x^* del sistema incompatibile $Ax=b$ è uguale alla soluzione c^* delle Equazioni Normali.

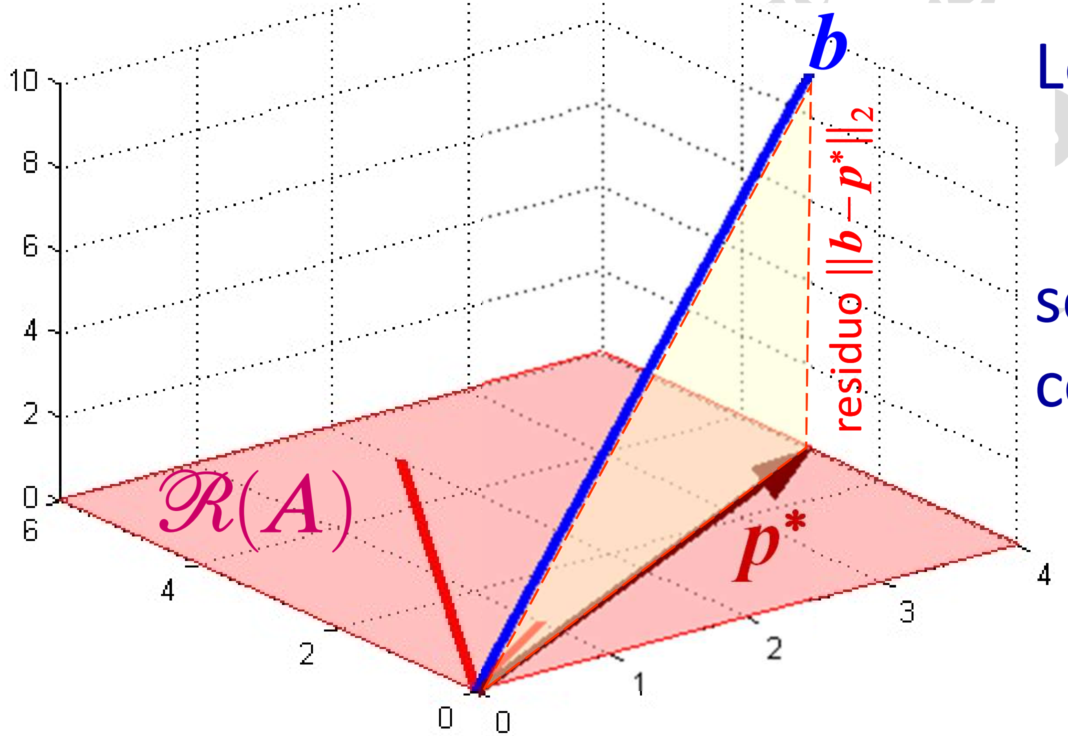
Nell'algoritmo precedente, dei tre passi, si esegue solo il passo **1.** ; cioè, per calcolare la soluzione LS x^*, è sufficiente risolvere il sistema delle Equazioni Normali.

Esempio 1

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x+5y=3 \\ 0x+0y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax=b} \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

incompatibile $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{R}(A)=\text{span}\{(1,1,0)^T,(2,5,0)^T\}$

$$\boldsymbol{p}^* : \quad \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}^*\|_2 = \min_{p\in\mathcal{R}(A)} \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}\|_2$$



Le Equazioni Normali

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle c_k^* = \langle f, \varphi_i \rangle \quad i=1,2,\dots,n$$

sono scritte in forma matriciale come

$$\boxed{A^T A} x^* = A^T b$$

matrice di Gram

$\boldsymbol{p}^*$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{b}$ su $\mathcal{R}(A)$

Migliore Approssimazione Lineare in $\|\cdot\|_2$

dimensione finita:

caso continuo

Esempio 2

Calcolare la m.a. lineare $f^*(x)$ di $f(x)=x^3$ rispetto a $\|\cdot\|_2$ nel sotto-spazio $\Pi_1[-1,+1]$ dei polinomi algebrici di 1° grado su $[-1,+1]$:

$$M_n = \Pi_1[-1,+1] = \mathbf{span}\{1, x\}$$

Spazio $C[-1,+1]$ con $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

$$f^* \in \Pi_1[-1,1] \qquad f^*(x) = c_1^* + c_2^* x$$

incognite

$$\begin{cases} \langle \varphi_1,\varphi_1\rangle c_1^* + \langle \varphi_1,\varphi_2\rangle c_2^* = \langle f,\varphi_1\rangle \\ \langle \varphi_2,\varphi_1\rangle c_1^* + \langle \varphi_2,\varphi_2\rangle c_2^* = \langle f,\varphi_2\rangle \end{cases}$$

Equazioni Normali

$$\begin{cases} \left[\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} 1x\,\mathrm{d}x\right] c_2^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 1\,\mathrm{d}x\right] \\ \left[\int_{-1}^{1} 1x\,\mathrm{d}x\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x\right] c_2^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 x\,\mathrm{d}x\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^* = 0 \\ c_2^* = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{f^*(x) = \frac{3}{5}x}$$

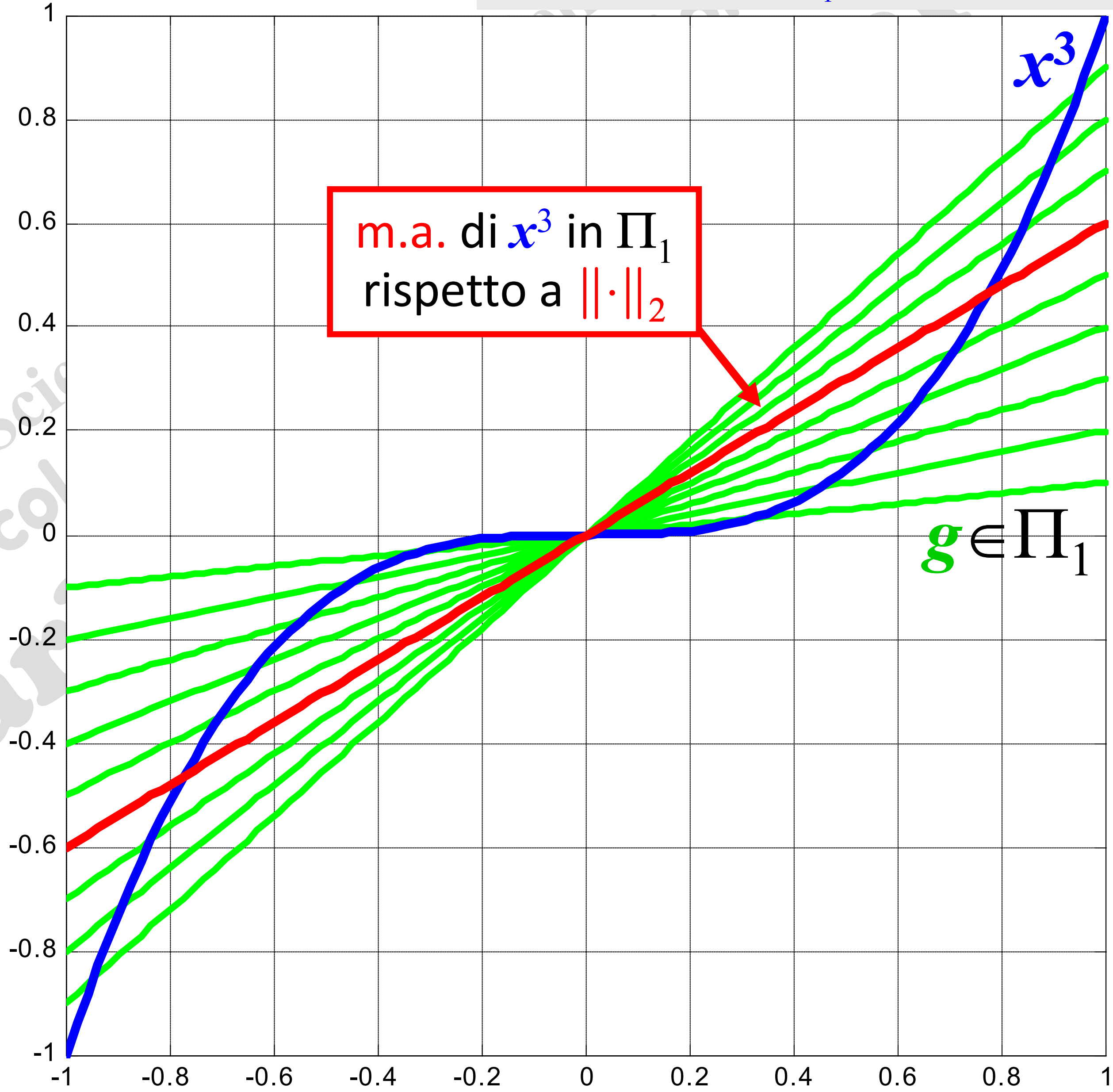
$$f^*(x) = c_1^* + c_2^* x \;\Rightarrow\; \left\| x^3 - f^* \right\|_2 = \min_{g \in \Pi_1} \left\| x^3 - g \right\|_2 \quad (\Diamond)$$

$$(\Diamond) \quad \left\| x^3 - g \right\|_2^2 = \int_{-1}^{+1} \left[x^3 - g(x) \right]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = 0 \\ c_2^* = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f^*(x) = \frac{3}{5} x}$$



Il Sistema delle Equazioni Normali è creato e risolto numericamente; ma può anche essere descritto, a fini didattici, usando il Symbolic Math Toolbox di MATLAB:

```
syms x real; M=[sym(1) x]; M'*M
ans =
[   1,   x]
[   x, x^2]
A= int(M'*M,-1,1)
A =
[   2,   0]
[   0, 2/3]
f=x^3; b=int(M'*f,-1,1)
b =
   0
 2/5
c = A \ b
c =
  0
3/5
fstar = M*c
fstar  =
(3*x)/5
```

matrice di Gram

termine noto

$$\begin{cases} \left[\int_{-1}^{1} 1\,dx\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} 1x\,dx\right] c_2^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 1\,dx\right] \\ \left[\int_{-1}^{1} 1x\,dx\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right] c_2^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 x\,dx\right] \end{cases}$$

$$\mathrm{A}c^* = \mathrm{b}^*$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} 1\,dx & \int_{-1}^{1} 1x\,dx \\ \int_{-1}^{1} 1x\,dx & \int_{-1}^{1} x^2\,dx \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b}^* = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} x^3 1\,dx \\ \int_{-1}^{1} x^3 x\,dx \end{pmatrix}$$

$$f^*(x) = c_1^* + c_2^* x = \frac{3}{5} x$$

$$f^*(x)=\frac{3}{5}x$$ è la migliore approssimazione di x^3 in [-1,+1] rispetto a $\|\cdot\|_2$

Si verifichi la proprietà di migliore approssimazione

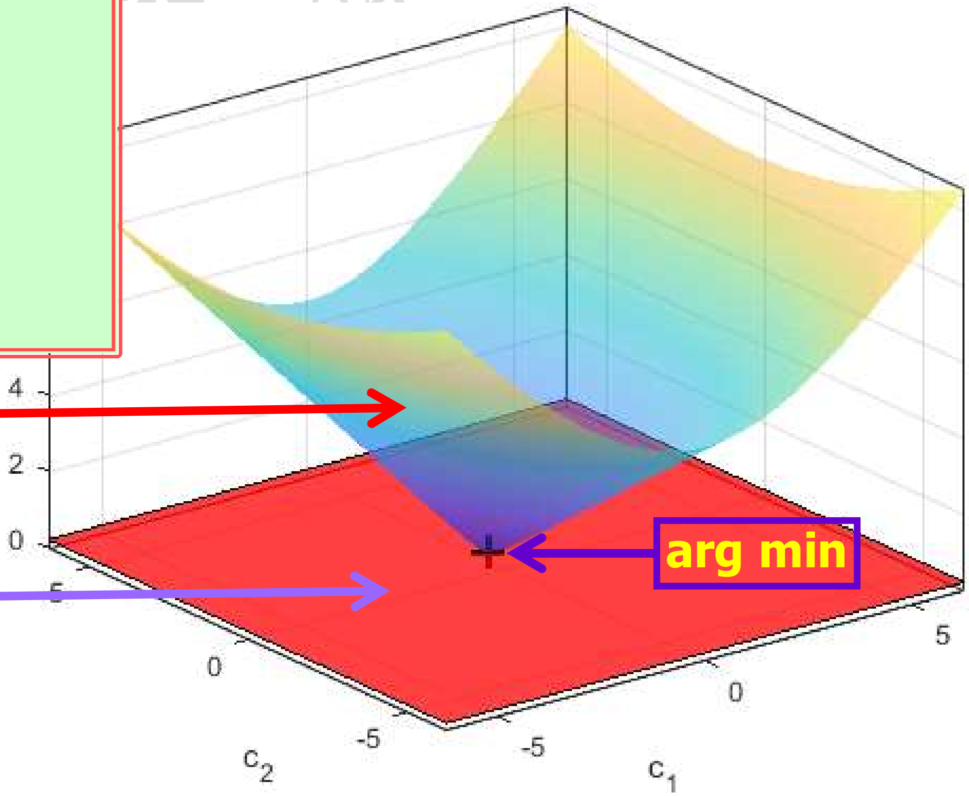
$$\left\| x^3-\frac{3}{5}x \right\|_2 \le \left\| x^3-(c_1+c_2x) \right\|_2 \ \forall c_1,c_2 \iff \sqrt{\int_{-1}^{1}\left[x^3-\frac{3}{5}x\right]^2 dx} \le \sqrt{\int_{-1}^{1}\left[x^3-(c_1+c_2x)\right]^2 dx}$$

er_ma   er

```
syms x c1 c2 real
er_ma=sqrt(int((f-fstar)^2,-1,1));
er=sqrt(int((f-(c1+c2*x))^2,-1,1));
ezsurf(er); hold on; AX=axis;
surf(2*pi*[-1 1;-1 1],2*pi*[-1 -1;1 1], ...
              double(er_ma)*ones(2,2))
axis(AX)
G=gradient(er); S=solve(G)
S = struct with fields:
    c1: 0
    c2: 3/5         arg min
```

`er=sqrt(int((x^3-(c1+c2*x))^2,-1,1))`

`er_ma=sqrt(int((f-fstar)^2,-1,1))`



Esempio 3

Calcolare la m.a. lineare $f^*(x)$ di $f(x)=x^3$ rispetto a $\|\cdot\|_2$ nel sotto-spazio $\mathbf{P}_1[-1,+1]$ dei polinomi trigonometrici di 2° grado in $[-1,+1]$:

$$M_n = \mathbf{P}_1[-1,1] = \mathbf{span}\{1, \cos x, \sin x\}$$

$$f^*(x) = c_1^* + c_2^* \cos x + c_3^* \sin x$$

incognite

$$\begin{cases} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle c_1^* + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle c_2^* + \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle c_3^* = \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle c_1^* + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle c_2^* + \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle c_3^* = \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_3, \varphi_1 \rangle c_1^* + \langle \varphi_3, \varphi_2 \rangle c_2^* + \langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle c_3^* = \langle f, \varphi_3 \rangle \end{cases}$$

Equazioni Normali

$$\begin{cases} \left[\int_{-1}^{1} 1\,dx\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} 1\cdot\cos x\,dx\right] c_2^* + \left[\int_{-1}^{1} 1\cdot\sin x\,dx\right] c_3^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 1\,dx\right] \\ \left[\int_{-1}^{1} \cos x\cdot 1\,dx\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} \cos^2 x\,dx\right] c_2^* + \left[\int_{-1}^{1} \cos x \sin x\,dx\right] c_3^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 \cos x\,dx\right] \\ \left[\int_{-1}^{1} \sin x\cdot 1\,dx\right] c_1^* + \left[\int_{-1}^{1} \sin x\cdot\cos x\,dx\right] c_2^* + \left[\int_{-1}^{1} \sin^2 x\,dx\right] c_3^* = \left[\int_{-1}^{1} x^3 \sin x\,dx\right] \end{cases}$$

$$f^*(x) = c_1^* + c_2^* \cos x + c_3^* \sin x$$

Eq. Normali risolte mediante il Symbolic Math Toolbox di MATLAB:

$$Ac^* = b^*$$

$$A = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} 1\,dx & \int_{-1}^{1} 1\cdot\cos x\,dx & \int_{-1}^{1} 1\cdot\sin x\,dx \\ \int_{-1}^{1} \cos x\cdot 1\,dx & \int_{-1}^{1} \cos^2 x\,dx & \int_{-1}^{1} \cos x \sin x\,dx \\ \int_{-1}^{1} \sin x\cdot 1\,dx & \int_{-1}^{1} \sin x\cdot\cos x\,dx & \int_{-1}^{1} \sin^2 x\,dx \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} x^3 1\,dx \\ \int_{-1}^{1} x^3 \cos x\,dx \\ \int_{-1}^{1} x^3 \sin x\,dx \end{pmatrix}$$

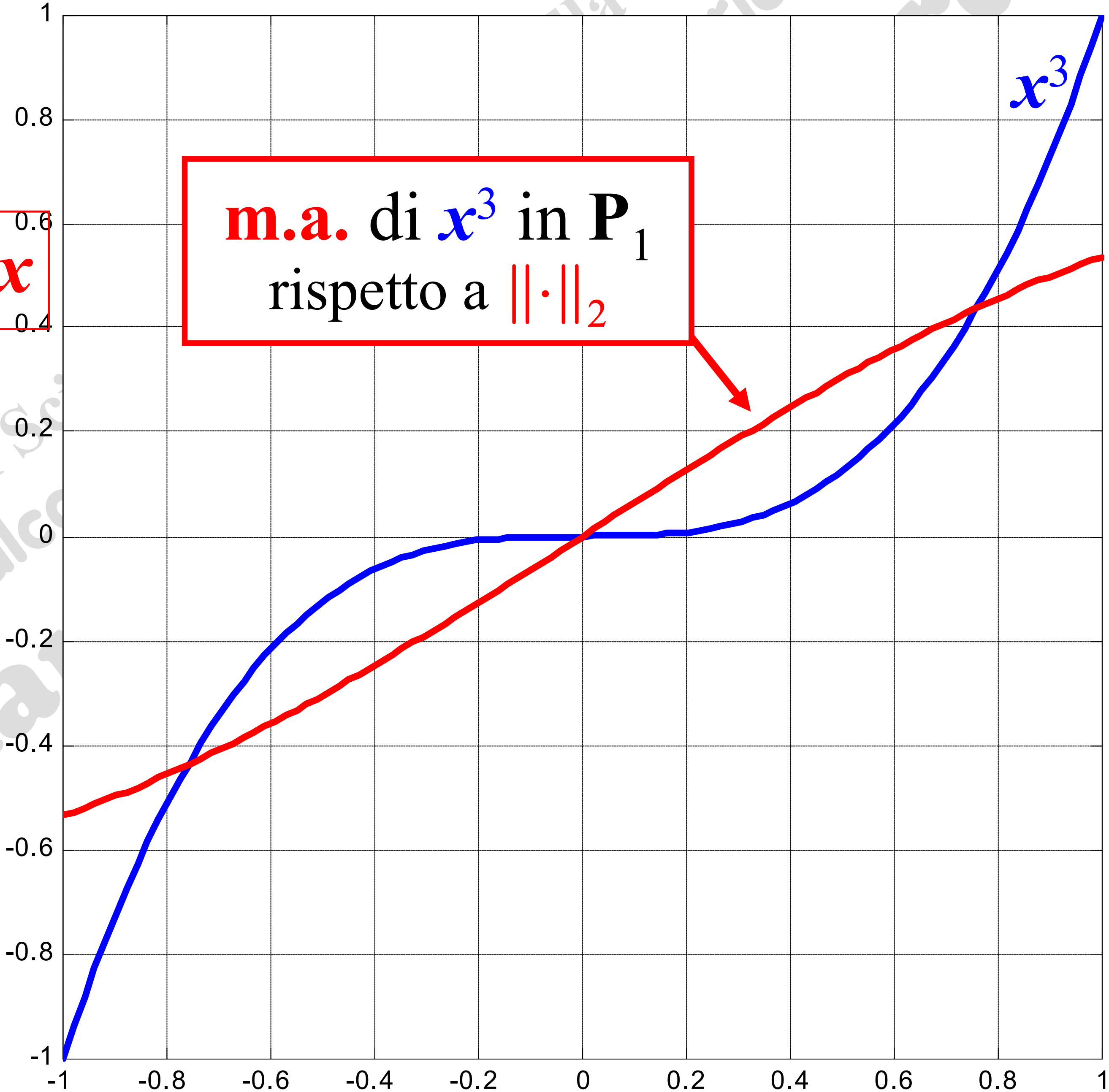
```
syms x real; M=[sym(1) cos(x) sin(x)];
A=int(M'*M,-1,1);  b=int(M'*x^3,-1,1);
c=A\b
c =
0
0
2*(-5*cos(1)+3*sin(1))/(cos(1)*sin(1)-1)
double(c)
ans =
         0
         0
    0.6495
```

$$f^*(x) = 0.6495\sin(x)$$

$$f^*(x) = c_1^* + c_2^* \cos x + c_3^* \sin x$$

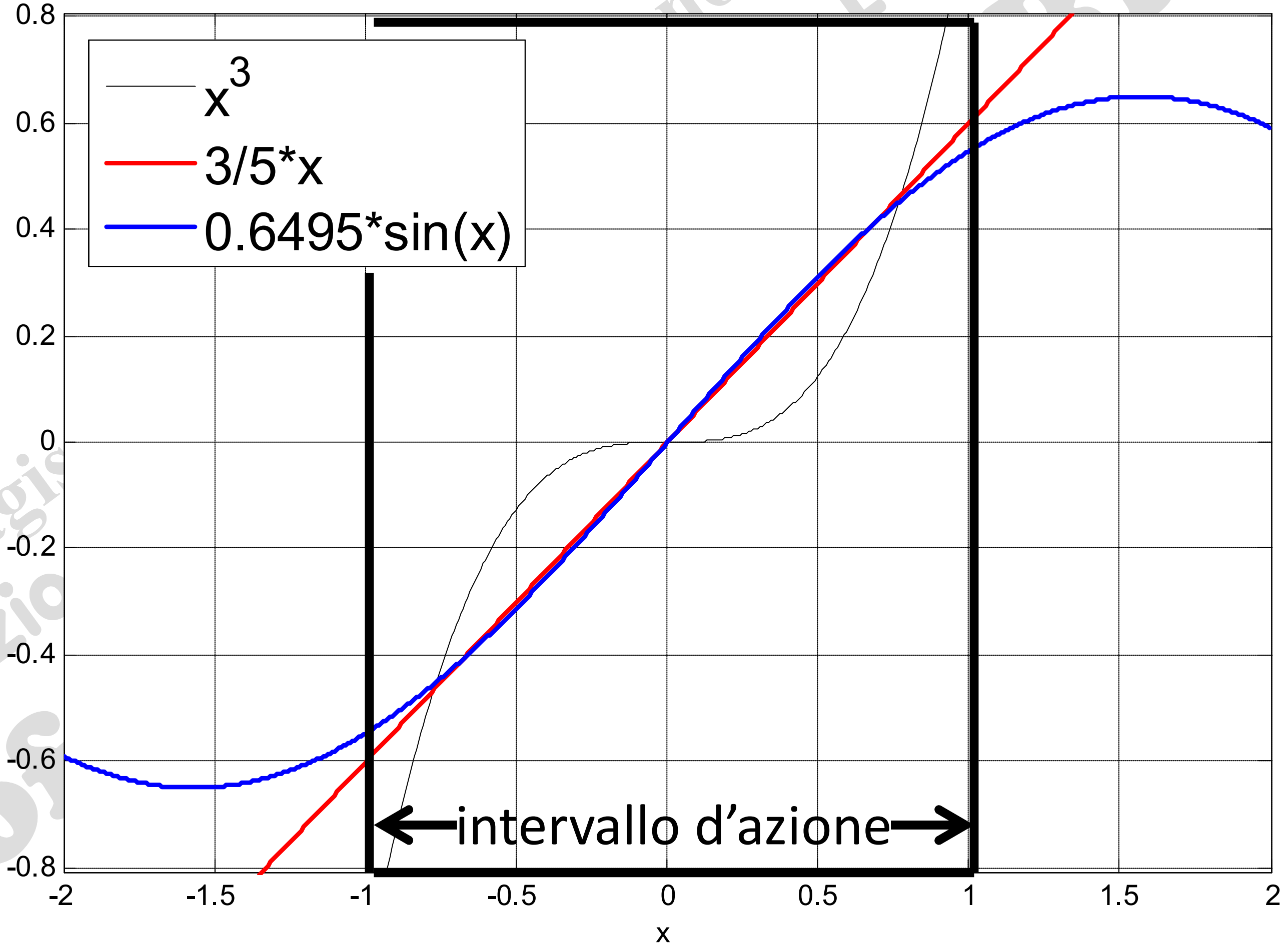
$$\left\| x^3 - f^* \right\|_2 = \min_{g \in \Pi_1} \left\| x^3 - g \right\|_2$$

$$\boxed{f^*(x) \approx 0.6495 \sin x}$$



Esercizio

Confrontare, da un punto di vista "grafico", le ultime due approssimazioni della funzione $f(x)=x^3$ in $[-1,+1]$:



cosa si può dire?

ACS parte 2: ACS_10b

Argomenti trattati

- **Approfondimenti sulle Equazioni Normali.**
- **Approfondimenti sul Metodo dei Minimi Quadrati per sistemi sovradeterminati.**

Per determinare $f^*=\Sigma_k c^*\varphi_k$, la migliore approssimazione di f rispetto a $\|\cdot\|_2$, nel sottospazio $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n\}$$

il Metodo dei Minimi Quadrati risolve le Eq. Normali

$\boldsymbol{x}^*$ LS sol.

$$\boldsymbol{G\,x^*=q}$$

$$G=\begin{pmatrix} \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \cdots & \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \cdots & \langle\varphi_2,\varphi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{pmatrix} \qquad q=\begin{pmatrix} \langle f,\varphi_1\rangle \\ \langle f,\varphi_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\varphi_n\rangle \end{pmatrix}$$

dove $\boldsymbol{G}$ è la matrice di Gram della base del sottospazio.

Tale forma generica delle Eq. Normali vale qualunque Spazio Lineare, dotato di norma indotta, si stia usando (spazio di vettori di $\mathbb{R}^n$, di funzioni, …), mentre la forma matriciale vale solo per sistemi lineari sovradeterminati.

Le Eq. Normali diventano **più semplici** da risolvere, se i vettori della base $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n\}$ sono:

ortogonali $\Longleftrightarrow$ $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} = 0 & k \neq j \\ \neq 0 & k = j \end{cases}$

Eq. Normali

$$\begin{pmatrix} \|\varphi_1\|_2^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\varphi_n\|_2^2 \end{pmatrix} c^* = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{c_j^* = \frac{\langle f, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|_2^2}}$$

matrice diagonale

ortonormali $\Longleftrightarrow$ $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} = 0 & k \neq j \\ = 1 & k = j \end{cases}$

Eq. Normali

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} c^* = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{c_j^* = \langle f, \varphi_j \rangle}$$

matrice identica

soluzione del sistema delle Eq. Normali

detti **coefficienti generalizzati di Fourier di f in M_n**

Si può usare l'algoritmo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Esempio: trovare la m.a. lineare f^* di $f(x)=x^3$ risp. a $\|\cdot\|_2$ nel sottospazio $\Pi_1[-1,1]$ dei polinomi algebrici di 1° grado.

$$\Pi_1[-1,1] = \mathbf{span}\boxed{\{1, x\}}$$ base non ortonormale

algoritmo GSO → base ortonormale → $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, x\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

$$f^*(x) = c_1^* \frac{1}{\sqrt{2}} + c_2^* x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$c_j^* = \langle f, \varphi_j \rangle$$

$$\begin{cases} c_1^* = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{2}}\, dx = 0 \\ c_2^* = \left\langle f, x\sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle = \left\langle x^3, x\sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 x\sqrt{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{6}}{5} \end{cases}$$

$$f^*(x) = 0\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{5} x\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{f^*(x) = \frac{3}{5}x}$$

La soluzione è la stessa di quella dell'Esempio 2, ottenuta ora senza risolvere le Eq. Normali

Esercizio

Trovare la m.a. lineare f^* di $f(x)=x^3$ rispetto a $\|\cdot\|_2$ nel sottospazio $\mathbf{P}_1[-\pi,+\pi]$ dei polinomi trigonometrici al più di 2° grado in $[-\pi,+\pi]$ ortonormalizzando prima la base del sottospazio $\mathbf{P}_1=\text{span}\{1,\cos x,\sin x\}$, e confrontando la soluzione ottenuta con quella dell'Esempio 3 (ACS2_10a): sono uguali? Perché no?

Nel caso particolare di sistemi lineari incompatibili, risolti mediante il metodo dei Min. Quadrati, la matrice di Gram è

$$G = A^{\mathsf{T}} A$$

Conseguenze dell'ortonormalizzazione

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt $\Longleftrightarrow$ $A=QR$ $\Rightarrow$

1. Matrice P di Proiezione Ortogonale

$$P = A\left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1}A^{\mathsf{T}}$$

per colonne qualsiasi in A

$\longrightarrow$

$$P = Q\,Q^{\mathsf{T}}$$

per colonne ortonormali

2. Eq. Normali e fattorizzazione QR

3. Condizionamento delle Eq. Normali

Conseguenze dell'ortonormalizzazione

1. Matrice di Proiezione Ortogonale

già visto in Trasformazioni Lineari

2. Eq. Normali e fattorizzazione QR

$A=QR$

$$A^\top A\, x^* = A^\top b$$

$$(QR)^\top (QR)\, x^* = (QR)^\top b$$

$$R^\top \cancel{Q^\top Q} R\, x^* = R^\top Q^\top b$$

$$\cancel{R^\top} R\, x^* = \cancel{R^\top} Q^\top b$$

R è **invertibile** se $rank(A)=n<m$

$$\boxed{R\, x^* = Q^\top b}$$

Sistema triangolare superiore (più semplice da risolvere)

Esempio

risolvere un sistema incompatibile mediante il Metodo LS e fattorizzazione QR

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + 5x_2 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 = 9 \end{cases} \iff \boldsymbol{Ax=b} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A=QR} \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 7/\sqrt{2} \\ & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Equazioni Normali $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$

sistema triangolare

la **soluzione è la stessa** di quella delle Eq. Normali senza ortonormalizzare la base (vedi Esempio 1)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 7/\sqrt{2} \\ & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Conseguenze dell'ortonormalizzazione

3. Condizionamento delle Eq. Normali

Risolvendo le Eq. Normali numericamente, a causa degli errori di roundoff, capita che la soluzione non sia quella dei Minimi Quadrati

esempio MATLAB

```
A=[hilb(10); ones(1,10)*eps/1000];
b=ones(11,1);
[rank(A) rank([A b])]
ans =
    10    11
x1=A\b;
norm(b-A*x1)
ans =
    1
x2=(A'*A)\(A'*b);
norm(b-A*x2)
ans =
    1.000000008143431
```

la matrice di Hilbert è nota essere malcondizionata

sistema incompatible

soluzione Least Squares

minimo residuo

soluzione delle Eq. Normali

la soluzione delle Eq. Normali **non raggiunge il minimo** della $\|\cdot\|_2$ del vettore residuo

Se si ortonormalizza la base con la fattorizzazione QR, ora si ha

la matrice di Hilbert è nota essere malcondizionata

```
A=[hilb(10); ones(1,10)*eps/1000];
b=ones(11,1);
[rank(A) rank([A b])]
ans =
    10    11
x1=A\b;
norm(b-A*x1)
ans =
     1
[Q,R]=qr(A,0);
x2=R\(Q'*b);
norm(b-A*x2)
ans =
     1
```

soluzione Least Squares

minimo residuo

soluzione con la fattorizzazione QR

la soluzione delle Eq. Normali **ora raggiunge il minimo** della $\|\cdot\|_2$ del vettore residuo

La Fattorizzazione QR, nel risolvere le Eq. Normali, non ha amplificato l'errore nei dati, ottenendo così la soluzione LS!

Nel caso di un sistema lineare incompatibile …

ricordare che:

- La soluzione Least Squares può anche essere calcolata mediante la **Fattorizzazione SVD**.

- L'algoritmo basato sulla fattorizzazione QR è **più efficiente** di quello basato sulla fattorizzazione SVD, ma il secondo è **numericamente più stabile**.

Eq. Normali e fattorizzazione SVD (A: full column rank)

La soluzione LS x_{LS} di un sistema sovradeterminato (incompatibile) $Ax=b$, come soluzione delle Eq. Normali, può esprimersi come

$A_{m\times n}$, $m>n$ $\quad A \; x = b$

$$A^T A\, x_{LS} = A^T b \quad \Rightarrow \quad x_{LS} = A^+ b$$

dove A^+, di size $n\times m$, è la pseudoinversa sinistra di A: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

Si vuole esprimere A^+ in termini di U, Σ, V, dove $A = U\Sigma V^T$ $\quad A = U \; \Sigma \; V^T$

Σ: valori singolari

$$x_{LS} = A^+ b = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \left[\left(U\Sigma V^T\right)^T \left(U\Sigma V^T\right)\right]^{-1} \left(U\Sigma V^T\right)^T b =$$

$$= \left[V\Sigma^T \boxed{\cancel{U^T U}}\, \Sigma V^T\right]^{-1} V\Sigma^T U^T b = \left[V\Sigma^T \Sigma V^T\right]^{-1} V\Sigma^T U^T b =$$

$$= V\left(\Sigma^T\Sigma\right)^{-1} \boxed{\cancel{V^T V}}\, \Sigma^T U^T b = V\left[\left(\underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{\Sigma_n^2}\right)^{-1} \Sigma^T\right] U^T b = V\Sigma^+ U^T b$$

σ_j^2 $\qquad \sigma_j$

$$\Sigma_n^2 = \Sigma^T \; \Sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma^+} = \left(\Sigma^T\Sigma\right)^{-1}\Sigma^T = \left(\Sigma_n^2\right)^{-1}\Sigma^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & & & \\ & \sigma_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix}}_{(\Sigma^T\Sigma)^{-1}} \overbrace{\left(\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)}^{\Sigma^T} =$$

pseudoinversa sinistra di Σ

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2^{-1} & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \sigma_n^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\left[\Sigma_n^{-1} \quad 0\right]}$$

Σ_n

$$\boxed{x_{LS} = \underbrace{V\,\boxed{\Sigma^+}\,U^T}_{A^+} b}$$

Esempio

risolvere un sistema incompatibile mediante il Metodo dei Minimi Quadrati

Confronto delle soluzioni LS

rank(A)=2 $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 9\end{pmatrix}$

1 $A^T A x = A^T b$

risolve le Eq. Normali

```
x1=(A'*A)\(A'*b)
x1 =
        4.6667
      -0.33333
```

instabile

2 $A=QR$

Fattorizzazione QR
per le Eq. Normali

```
[Qn,Rn]=qr(A,0);
x2=Rn\(Qn'*b)
x2 =
        4.6667
      -0.33333
```

efficiente

la stessa soluzione

3 $A=USV^T$

Fattorizzazione SVD
per le Eq. Normali

```
[U,S,V]=svd(A,0);
x3=V*diag(1./diag(S))*U'*b
x3 =
        4.6667
      -0.33333
```

stabile

Confronto delle soluzioni LS

```
n=11; A=vander(1:n); A=[A;rand(5,n)]; b=ones(size(A,1),1); r=rank(A);
disp([r rank([A b])])
     11    12
tic; xLS=A\b; tLS=toc; % soluzione LS
tic; xNE=(A'*A)\(A'*b); tNE=toc; % Equazioni Normali
tic; [Q,R]=qr(A);      xQR1=R\(Q'*b);   tQR1=toc; % QR 1
tic; [Qn,Rn]=qr(A,0); xQR2=Rn\(Qn'*b); tQR2=toc; % QR 2
tic; [U1,S1,V1]=svd(A); % SVD 1
xSVD1=V1*[diag(1./diag(S1(1:r,1:r))) zeros(r,m-r)]*U1'*b; tSVD1=toc;
tic; [U2,S2,V2]=svd(A,'econ'); % SVD2 equivalente a [U,S,V]=svd(A,0), poiché m>n
xSVD2=V2*diag(1./diag(S2))*U2'*b; tSVD2=toc;
format long
fprintf('\nnorm(b-A*xLS) = ');  disp(norm(b-A*xLS))
fprintf( 'norm(b-A*xQR1) = ');  disp(norm(b-A*xQR1))
fprintf( 'norm(b-A*xQR2) = ');  disp(norm(b-A*xQR2))
fprintf( 'norm(b-A*xSVD1) = '); disp(norm(b-A*xSVD1))
fprintf( 'norm(b-A*xSVD2) = '); disp(norm(b-A*xSVD2))
fprintf( 'norm(b-A*xNE) = ');   disp(norm(b-A*xNE))
format short g
fprintf('\ntime Least Square : %e',tLS)
fprintf('\ntime QR1 factoriz : %e',tQR1)
fprintf('\ntime QR2 factoriz : %e',tQR2)
fprintf('\ntime SVD1 factoriz: %e',tSVD1)
fprintf('\ntime SVD2 factoriz: %e',tSVD2)
fprintf('\ntime Normal Eqs.  : %e',tNE)
```

la matrice di Vandermonde è nota essere malcondizionata

$A(16\times 11)$

Usare: MATLAB

tic
…
T=toc

per ottenere l'elapsed time

```
norm(b-A*xLS)   = 0.397654939767875
norm(b-A*xQR1)  = 0.397654939767937
norm(b-A*xQR2)  = 0.397654939767607
norm(b-A*xSVD1) = 0.397654939767366
norm(b-A*xSVD2) = 0.397654939767366
norm(b-A*xNE)   = 0.397654945772732

time Least Square : 1.608609e-04
time QR1 factoriz : 2.161868e-04
time QR2 factoriz : 1.717342e-04
time SVD1 factoriz: 9.626067e-04
time SVD2 factoriz: 4.384498e-04
time Normal Eqs.  : 7.707250e-04
```

+ stabile

– stabile

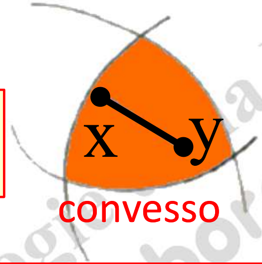
+ efficiente

– efficiente

Proprietà di X_{LS}, l'insieme delle soluzioni LS

$$X_{LS} = \{\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|_2 \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

LS = Least Squares



Un insieme convesso contiene tutti i segmenti fra due elementi dell'insieme.
Un insieme chiuso contiene tutti i propri punti di accumulazione.

1. X_{LS} è un insieme convesso e chiuso

2. $\boldsymbol{x}^* \in X_{LS}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}^*$ è soluzione delle Eq. Normali, cioè il suo vettore residuo è ortogonale a $\mathscr{R}(A)$.

3. Il sistema delle Eq. Normali $A^T A x = A^T b$ ammette una ed una sola soluzione se rank($A^T A$) è massimo (rank($A^T A$)$=n$); altrimenti il sistema è indeterminato se rank(A)$=r<n$.

4. $$\exists!\, x_{LN} \in X_{LS} : \|x_{LN}\|_2 = \min\left\{\|x\|_2 ,\forall x \in X_{LS}\right\}$$

LN = Least Norm

Esiste una sola soluzione delle Eq. Normali di minima $\|\cdot\|_2$ (x_{LN} è detta soluzione di minima norma), ed essa è l'unico elemento di X_{LS} appartenente a $\mathscr{N}(A^T A)^\perp = \mathscr{R}(A^T A)$.

Questo è un caso particolare del Teorema della Soluzione con Minima norma Euclidea di un sistema indeterminato (vedi: ACS2_05c_NEW).

Soluzione con Minima norma Euclidea di $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$, $A(m\times n)$, rank$(A)<\min\{m,n\}$ (Eq. Normali indeterminate)

soluzione particolare

$$x \in X_{LS} \quad x = \boxed{x_p} + x_n \quad : \quad \boxed{A^{\mathsf{T}}Ax_p = A^{\mathsf{T}}b} \wedge x_n \in \mathcal{N}(A^{\mathsf{T}}A)$$

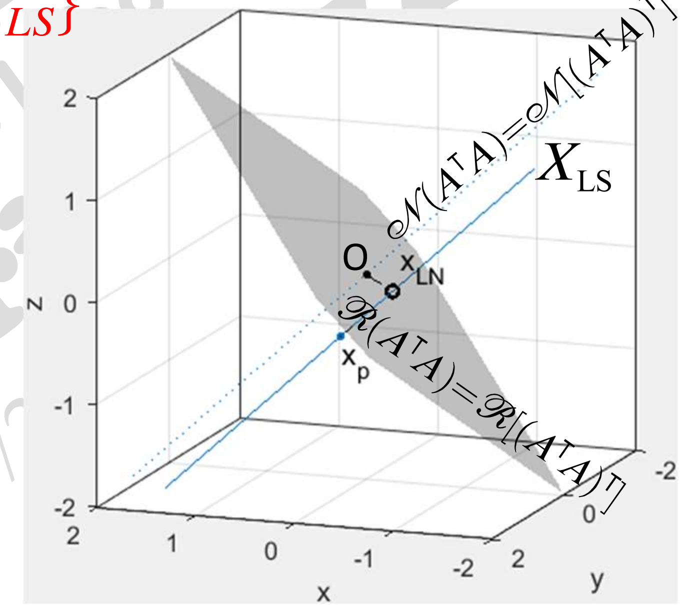
$$x_p = x_r + x'_n,\ \ x_r \in \mathcal{R}(A^{\mathsf{T}}A) : \|x_r\|_2 = \min\{\|x\|_2,\ x \in X_{LS}\}$$

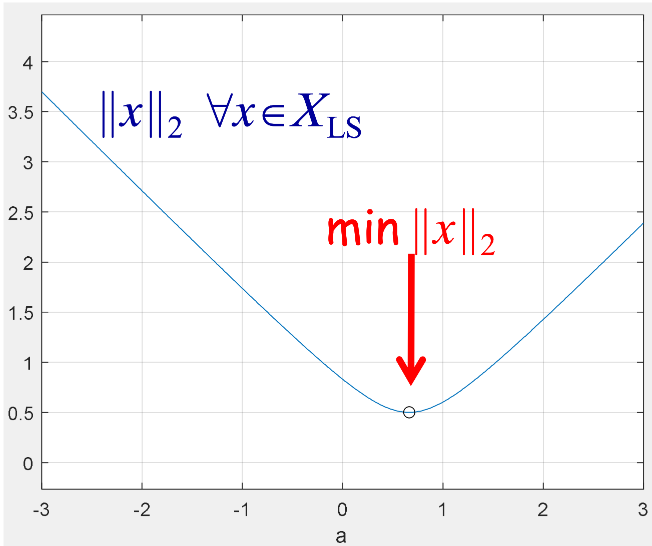
Esempio

```
A=[1 2 3 4; 5 6 7 8]';
A=[A  A(:,1)+A(:,2)];
b=[1 0 1 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
      2    3  % sistema incompatibile A*x=b
disp([size(A'*A) rank(A'*A)])
       3      3      2  % sistema di rango non massimo A'*A*x = A'*b
xp=A\b;               % soluzione particolare delle Eq. Normali
M=A'*A; y=A'*b;       % sistema indeterminato (delle Eq. Normali)
N=null(M);            % base dello Spazio Nullo
syms a real; xn=N*a;  % Spazio Nullo
X=xp+xn;              % soluzione generale delle Eq. Normali
RMT=orth(M);          % base ortonormale di R(A^T A)
P=RMT*RMT';           % matrice di proiezione ortogonale
Pxp=P*xp;             % proiezione di xp su R(A^T A)
xLN=pinv(M)*y;        % inversa di Moore-Penrose
disp([norm(xLN) norm(Pxp) norm(xp)])
      0.50166   =   0.50166   <   0.83217
disp([norm(A*xLN-b) norm(A*Pxp-b) norm(A*xp-b)])
      0.89443   =   0.89443   =   0.89443
```

$\min\|x\|_2$

tutte soluzioni LS = arg min$\|Ax-b\|_2$





(prof. M. Rizzardi)

Risolvere sistemi incompatibili in MATLAB

$$\underset{\substack{m\times n\\ m>n}}{A}\; x = b$$

rank$(A)=n \Rightarrow$ full (col) rank

```
A=[1 2 3 4; 5 6 7 8]';   b=[1 0 1 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
      2    3          % sistema incompatibile A*x=b
disp(size(A))  % rank(A)=2 max
      4      2
```

$\exists$ una sola soluzione LS

$\min \|Ax-b\|_2$

la stessa soluzione

```
xBS=A\b  % soluzione LS con r componenti non nulle, r=rank(A)
xBS =
        -0.45
         0.25
```

```
xEN=(A'*A)\(A'*b) % soluzione delle Eq. Normali
xEN =
        -0.45
         0.25
```

```
xLN=pinv(A)*b  % pseudoinversa di  Moore-Penrose
xLN =          % soluzione di min||·||_2
        -0.45
         0.25
```

```
[U,S,V]=svd(A,'econ'); r=rank(S);
d=U'*b; xSVD=S(1:r,1:r)\d(1:r);
xSVD=V(:,1:r)*xSVD
xSVD =
        -0.45
         0.25
```

fattorizzazione SVD ridotta

```
[Q,R]=qr(A,0); r=rank(R); Qr=Q(:,1:r);
Rr=R(1:r,:); xQR1=Rr\(Qr'*b)
xQR1 =
        -0.45
         0.25
```

fattorizzazione QR economy size

```
[Q,R,p]=qr(A,0); d=Q'*b; r=rank(R);
[m,n]=size(A);
xQR2=R(1:r,1:r)\d(1:r);
xQR2(r+1:n)=0;   xQR2(p)=xQR2
xQR2 =
        -0.45
         0.25
```

QR con vettore di permutazione p: A(:,p)=Q*R

Risolvere sistemi incompatibili in MATLAB

$A_{m\times n}\,x = b$, $m>n$

$\mathrm{rank}(A)=r<n \Rightarrow$ rank-deficient

```
A=[1 2 3 4;5 6 7 8]'; A=[A A(:,1)+A(:,2)]; b=[1 0 1 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
     2    3         % sistema incompatibile A*x=b
disp(size(A))  % rank(A)=2 non max
     4      3
```

infinite soluzioni LS

soluzioni LS diverse

```
xBS=A\b  % sol. LS con r componenti non nulle, r=rank(A)
xBS =         0
            0.7      soluzione particolare
          -0.45
```

```
xNE=(A'*A)\(A'*b) % soluzione delle Eq. Normali
xNE = NaN
   ?  Inf
     -Inf
```

```
[L,U,P]=lu(A'*A);   fattorizzazione LU con pivoting parz.
w=L\(P*A'*b); xp=U(1:r,:)\w(1:r)
xp =
           0
         0.7
       -0.45
```

```
xLN=pinv(A)*b  % soluzione di min||·||2
xLN =   -0.38333
         0.31667
       -0.066667
```

$\min\|Ax-b\|_2$

```
disp(norm(A*xBS-b))
      0.894427
disp(norm(A*xp-b))
      0.894427
disp(norm(A*xLN-b))
      0.894427
```

$\min\|x\|_2$

```
disp(norm(xBS))
      0.832166
disp(norm(xp))
      0.832166
disp(norm(xLN))
      0.501664
```

le stesse soluzioni

```
[U,S,V]=svd(A,'econ'); r=rank(S);
d=U'*b; xSVD=S(1:r,1:r)\d(1:r);
xSVD=V(:,1:r)*xSVD
xSVD = -0.38333        fattorizzazione SVD
        0.31667              ridotta
      -0.066667
```

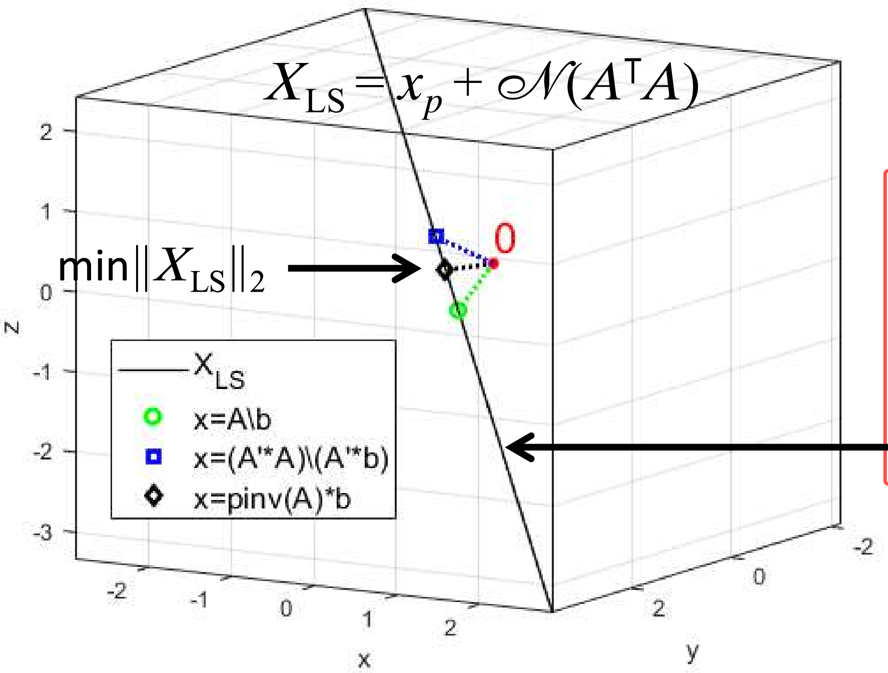
```
[Q,R]=qr(A,0); r=rank(R); Qr=Q(:,1:r);
Rr=R(1:r,:); xQR1=Rr\(Qr'*b)
xQR1 =       0
           0.7             fattorizzazione QR
         -0.45                 economy size
```

```
[Q,R,p]=qr(A,0);
d=Q'*b; r=rank(R); [m,n]=size(A);
xQR2=R(1:r,1:r)\d(1:r);
xQR2(r+1:n)=0;   xQR2(p)=xQR2
xQR2 =       0
           0.7     QR con vettore di permu-
         -0.45     tazione p: A(:,p)=Q*R
```

Risolvere sistemi incompatibili in MATLAB

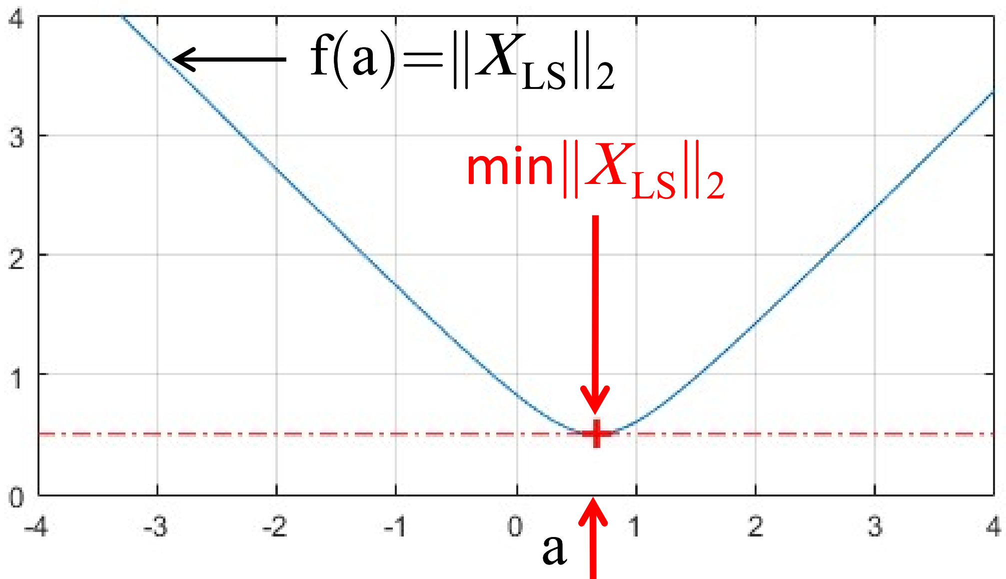
rank(A)=$r<n \Rightarrow$ rank-deficient

$\Rightarrow$ infinite soluzioni LS




```
nEN=null(A'*A); % N (matrice di Gram)
syms a real
N=nEN*a;
X = xp + N;     X_LS
ezplot3(X(1),X(2),X(3),[-5 5])
```

```
fplot(simplify(norm(X)),[-4 4])
```




```
xLN=pinv(A)*b;  % inversa di Moore-Penrose
amin=solve(diff(norm(X),a)); % argmin
amin=double(amin)
amin =
      0.66395
Ymin=double(subs(norm(X),a,amin));
disp([Ymin norm(xLN)])
        0.50166    =    0.50166
```

min$\|X_{LS}\|_2$ norma della soluzione dalla pseudoinversa di Moore-Penrose

Risolvere sistemi incompatibili in MATLAB

A $m\times n$, $m>n$ x = b

rank(A)=$r<n \Rightarrow$ rank-deficient

```
u=[1 1 1 1]'; v=[1 -1 1 -1]'; A=u*v'; A=A(:,1:3); b=[1 0 1 0]';
disp([rank(A) rank([A b])])
     1    2          % sistema incompatibile A*x=b
disp(size(A))  % rank(A)=1 non max
     4     3
```

infinite soluzioni LS

le stesse soluzioni

```
xBS=A\b  % soluzione LS con r componenti≠0, r=rank(A)
xBS =      0.5
             0
             0
disp(norm(A*xBS-b))
     1
```

```
xEN=(A'*A)\(A'*b) % soluzione Eq. Normali
xEN = NaN
   ?  NaN
      NaN
```

```
xLN=pinv(A)*b  % soluzione di min||·||2
xLN =  0.16667
      -0.16667
       0.16667
disp(norm(A*xLN-b))
     1
```

```
r=rank(A); [L,U,P]=lu([A'*A A'*b]);
xLU=U(1:r,1:n)\U(1:r,n+1)
xLU =
      0.5
        0
        0
```

fattorizzazione LU con pivoting parziale

```
[U,S,V]=svd(A,'econ'); r=rank(S);
d=U'*b; xSVD=S(1:r,1:r)\d(1:r);
xSVD=V(:,1:r)*xSVD
xSVD =  0.16667
       -0.16667
        0.16667
```

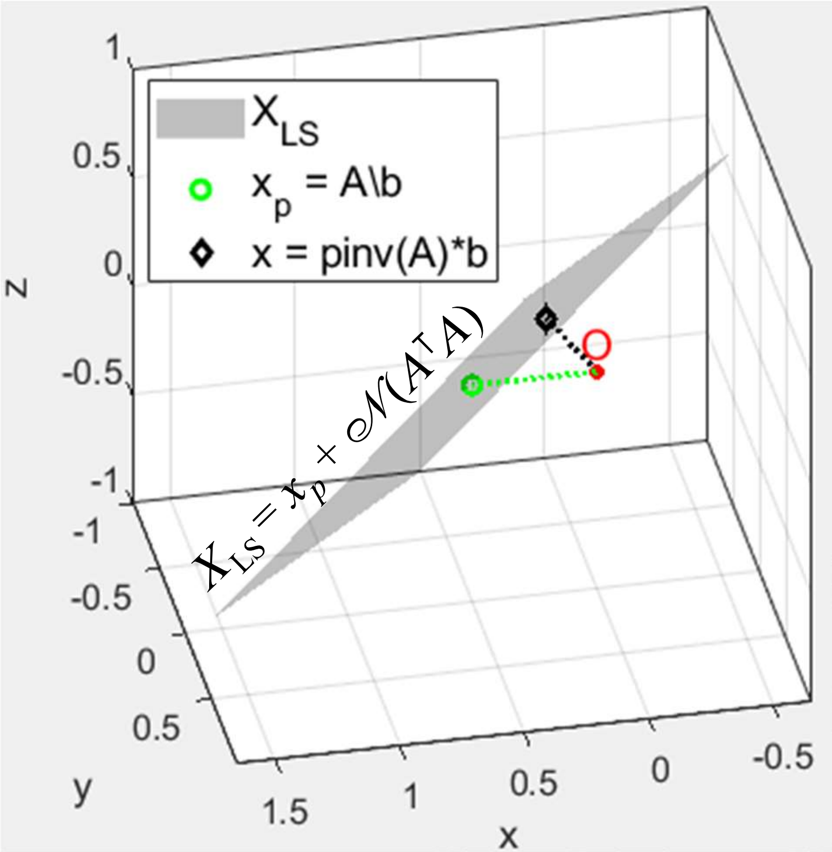
fattorizzazione SVD ridotta

```
[Q,R]=qr(A,0); r=rank(R); Qr=Q(:,1:r);
Rr=R(1:r,:); xQR1=Rr\(Qr'*b)
xQR1 =     0.5
             0
             0
```

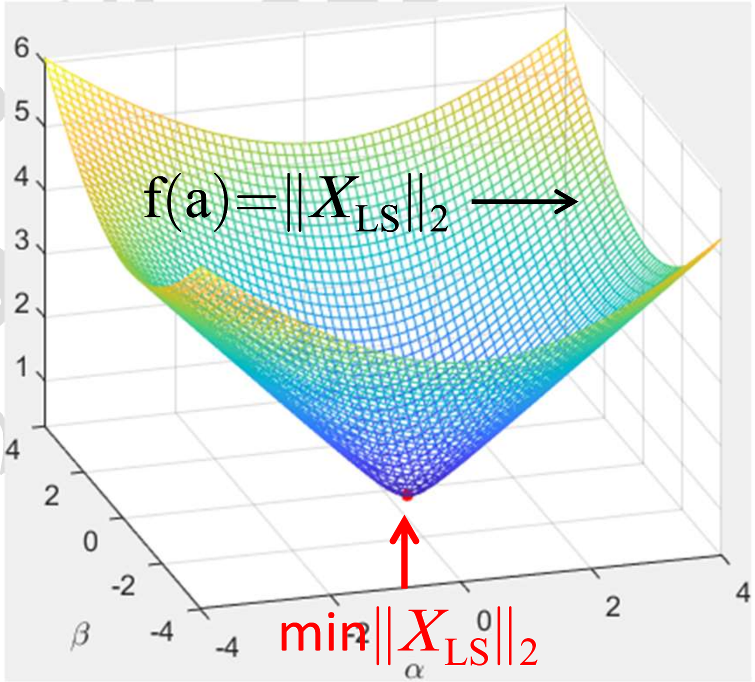
fattorizzazione QR economy size

```
[Q,R,p]=qr(A,0); d=Q'*b; r=rank(R);
[m,n]=size(A);
xQR2=R(1:r,1:r)\d(1:r);
xQR2(r+1:n)=0;  xQR2(p)=xQR2
xQR2 =     0.5
             0
             0
```

QR con vettore di permutazione p: A(:,p)=Q*R




```
nEN=null(A'*A); % 𝒩 della matrice di Gram
syms alfa beta real
N=nEN*[alfa;beta];
X=xLU + N;            X_LS
fsurf(X(1),X(2),X(3),[-1 1])
```



Esercizio

Verificare, mediante il Symbolic Math Toolbox di MATLAB, che $\min\|X_{LS}\|_2$ è raggiunto dalla soluzione LS calcolata con **pinv()**.

Esercizio

Trovare la circonferenza Γ di best fit di un campione di N dati in $\mathbb{R}^2$. Qual è la soluzione di $\min\|\cdot\|_2$? È unica la soluzione? Se sì, perché?

L'equazione della circonferenza incognita Γ di centro (a,b) e raggio R è:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

analogamente con l'eq. $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Si vuole che tutti i campioni (x_i,y_i) giacciano sulla circonferenza:

$$\forall i=1,\dots,N \qquad (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = R^2$$

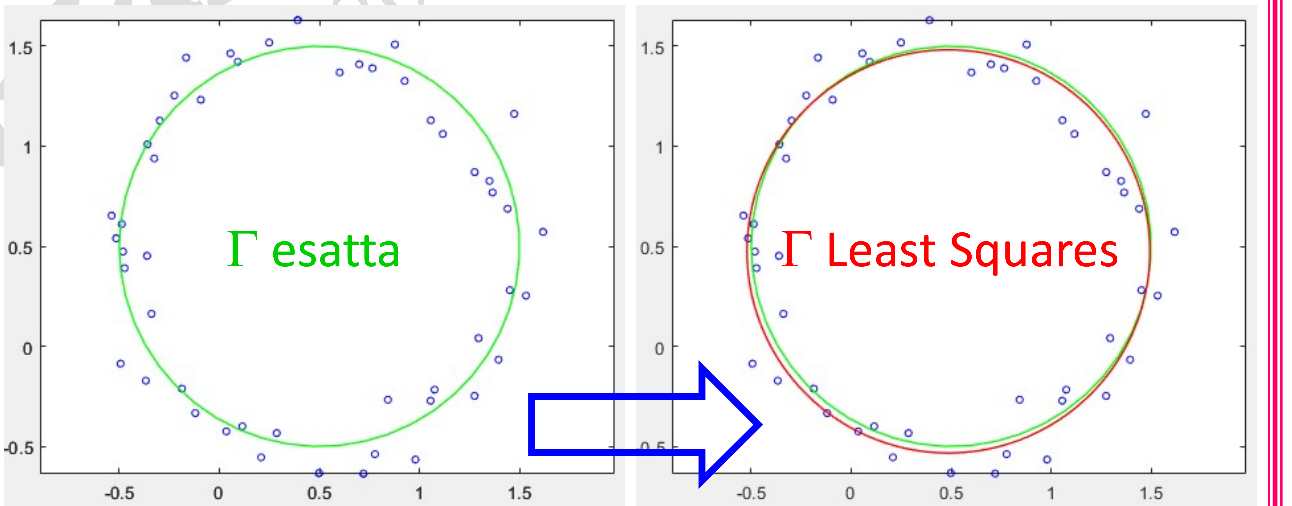
cioè

$$x_i^2 + y_i^2 + a^2 + b^2 - 2x_i a - 2y_i b = R^2$$

Riordinando le incognite, si ha: $\forall i=1,\dots,N \quad 2x_i a + 2y_i b + R^2 - a^2 - b^2 = x_i^2 + y_i^2$

cioè $\begin{bmatrix} 2x_i & 2y_i & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ R^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix} = x_i^2 + y_i^2$ sistema incompatibile

```
X0=0.5; Y0=0.5; r0=1;
N=50; %=,100,150,200 num. campioni
t=linspace(-pi,pi,N)';
Xi=X0+r0*cos(t); % Γ esatta
Yi=Y0+r0*sin(t);
perc=0.15;
xi=Xi+perc*(2*rand(N,1)-1);
yi=Yi+perc*(2*rand(N,1)-1);
plot(xi,yi,'ob'); axis equal
hold on; plot(Xi,Yi,'r')
```



Risolvere il problema anche con l'eq. $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Esercizio: esperimento del tunnel del vento

Risolvere mediante i Minimi Quadrati Lineari il seguente problema di fitting*:

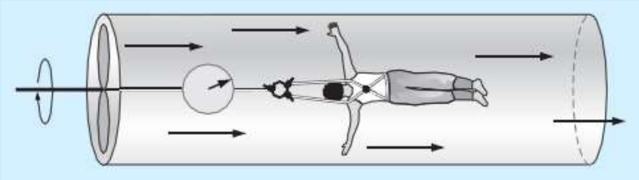
Problema numerico: fitting LS lineare
Problema statistico: regressione lineare

velocità v (m/s): `v=[10 20 30 40 50 60 70 80]';`

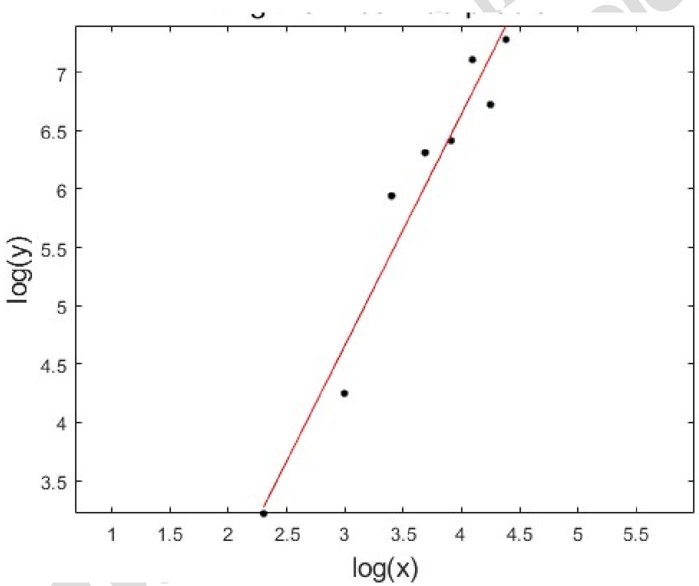
forza F (N): `F=[25 70 380 550 610 1220 830 1450]';`

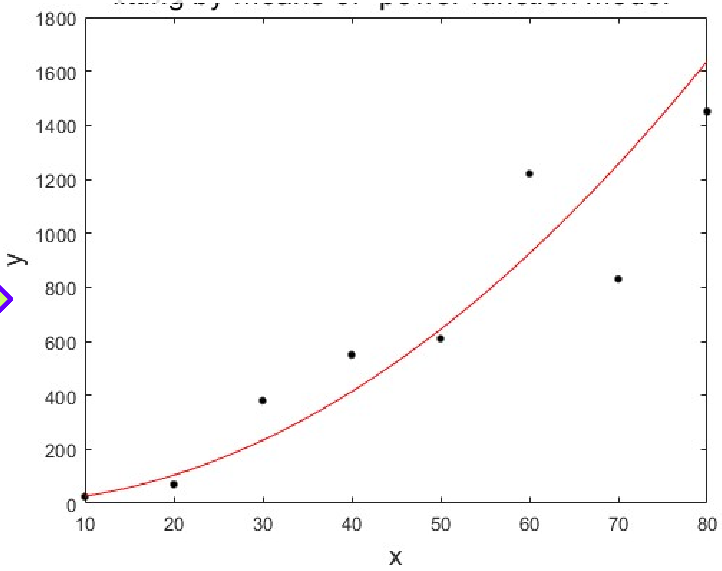
Modello: funzione potenza $y = f(x) = \boxed{a\, x^b}$, $a,b \in \mathbb{R}$

* Wind tunnel experiment: come la forza della resistenza dell'aria dipende dalla velocità del vento



Il modello di fitting è non lineare, ma può essere linearizzato molto semplicemente applicando la trasformazione logaritmica ("log trick") perché i dati sono >0.





Attenzione! Il "log trick" potrebbe condurre ad una soluzione diversa da quella voluta. Es.: se il residuo $y_i-f(x_i)$ è distribuito normalmente, $\log(y_i)-\log[f(x_i)]$ non lo è.

ACS parte 2: ACS_10c

Argomenti trattati

- **Migliore approssimazione in $\|\cdot\|_2$: il caso di sottospazi a dimensione infinita.**
- **Cenni sulla Convergenza in norma.**

Migliore Approssimazione lineare risp. a $\|\cdot\|_2$ in un sottospazio

- **caso della dimensione finita**

Teor. → caso discreto / caso continuo

Il Teorema precedente garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione

- **caso della dimensione infinita**

nessun Teor. → caso discreto / caso continuo **?**

Si consideri l'**errore residuo** della m.a. lineare in un sotto-spazio $M_n \subseteq X$ a dimensione finita: cosa succede all'errore residuo all'aumentare della dimensione del sottospazio?

Siano:

$f_n^*(x)$ = m.a. di $f(x)$ risp. a $\|\cdot\|_2$ in M_n=span$\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ dove le φ_k sono ortonormali; dim $M_n=n$

$f_{n+1}^*(x)$ = m.a. di $f(x)$ risp. a $\|\cdot\|_2$ in M_{n+1}=span$\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\varphi_{n+1}\}$ ($M_{n+1} \supset M_n$) dove le φ_k sono ortonormali. dim $M_{n+1}=n+1$

$$\| f(x) - f_{n+1}^*(x)\|_2 \quad ? \quad \| f(x) - f_n^*(x)\|_2$$

Avendo già $f_n^*(x)$, per calcolare $f_{n+1}^*(x)$, non è necessario ripetere tutti i calcoli, bensì, nella combinazione lineare, si deve calcolare solo l'ultimo coefficiente $c_{n+1}^* = \langle f,\varphi_{n+1}\rangle$:

$$f_{n+1}^* = \sum_{k=1}^{n+1} c_k^* \varphi_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k}_{f_n^*} + c_{n+1}^* \varphi_{n+1}$$

I due errori residui sono tali che:

$$\boxed{\left\| f - f_{n+1}^* \right\|_2^2 \le \left\| f - f_n^* \right\|_2^2}$$

simbolo di Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

Dimostrazione:

Poiché $f_n^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\left\| f_n^* \right\|_2^2} = \left\langle f_n^*, f_n^* \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} c_k^* c_h^* \overbrace{\left\langle \varphi_k, \varphi_h \right\rangle}^{\delta_{kh}} = \sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\left\langle f, f_n^* \right\rangle} = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \underbrace{\left\langle f, \varphi_k \right\rangle}_{c_k^*} = \sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2$$

$\{\varphi_k\}$ sistema orto-normale di vettori

si ha $\forall n$

$$\boxed{\left\| f - f_n^* \right\|_2^2} = \left\langle f - f_n^*, f - f_n^* \right\rangle = \left\| f \right\|_2^2 + \boxed{\left\| f_n^* \right\|_2^2} - 2\boxed{\left\langle f, f_n^* \right\rangle} =$$

$$= \left\| f \right\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2 =$$

$$\boxed{= \left\| f \right\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2}$$

$$\left\| f - f_{n+1}^* \right\|_2^2 = \left\| f \right\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n+1} \left| c_k^* \right|^2 = \boxed{\left\| f \right\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| c_k^* \right|^2} - \left| c_{n+1}^* \right|^2 = \boxed{\left\| f - f_n^* \right\|_2^2} - \left| c_{n+1}^* \right|^2$$

$f_n^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k$ migliore approssimazione di f in $M_n \; \forall n$

$$\Rightarrow \boxed{\left\| f - f_{n+1}^* \right\|_2^2 \le \left\| f - f_n^* \right\|_2^2} \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left\| f - f_n^* \right\|_2}_{\text{residuo}} = 0$$

Se si ha un sistema infinito ortonormale di funzioni di base

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1,\,\dots,\,\infty}$$

allora la sequenza degli errori residui $\{\|f(x) - f_n^*(x)\|_2\}_n$ nelle migliori approssimazioni $\{f_n^*(x)\}_n$ è non crescente ($\le$), ... ma ciò non implica che essa sia decrescente ($<$) ed infinitesima (res.$\to 0$).

DOMANDE

- cosa succede se $\dim M_n = n \longrightarrow \infty$?
- È possibile che la sequenza delle migliori approssimazioni di $f(x)$ risp. a $\|\cdot\|_2$ converga in $\|\cdot\|_2$ a $f(x)$?

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - f_n^* \right\|_2 = 0 \qquad ?$$

$\forall n \quad f_n^*(x) =$ m.a. di $f(x)$ in M_n=span$\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ risp. a $\|\cdot\|_2$

$\{\varphi_k\}_k$ base ortonormale

? $\Rightarrow$ $$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n^*\|_2 = 0$$

NON SUCCEDE AUTOMATICAMENTE

Si devono aggiungere altre ipotesi allo Spazio Lineare X che contiene $f(x)$, ed alla base ortonormale di X ($\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots,\infty}$):

- X deve essere uno **Spazio di Hilbert** (*spazio metrico completo*).
- $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots,\infty}$ deve essere un sistema ortonormale **completo** risp. a $\|\cdot\|_2$ in X.

$\forall n \quad f_n^*(x) =$ m.a. di $f(x)$ in M_n=span$\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ risp. a $\|\cdot\|_2$

$\{\varphi_k\}_k$ base ortonormale

Dalla precedente dimostrazione, si ha:

$$0 \le \|f - f_n^*\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k^*|^2 \qquad \forall n$$

Ciò implica sempre che:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |c_k^*|^2 \le \|f\|_2^2 \qquad \forall n} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k^*|^2 \le \|f\|_2^2}$$

disuguaglianza di Bessel

$\le$ $\forall \{f_n^*\}$, non $=$

Se, in più, $\{\varphi_k\}_k$ è completo in X, allora vale il seguente Teor.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k^*|^2 = \|f\|_2^2 \quad \textbf{uguaglianza di Parseval} \iff \lim_{n\to\infty} \|f - f_n^*\|_2 = 0$$

convergenza in $\|\cdot\|_2$

Il Teorema di Parseval rappresenta la generalizzazione del Teor. di Pitagora per i triangoli rettangoli in spazi ad ∞ dimensioni.

Si dimostra che le ***funzioni trigonometriche***

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_k \right\}}$$

o, equivalentemente, le ***funzioni esponenziali***

$$\boxed{\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_k}$$

formula di Eulero
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

formano un ***sistema ortonormale completo*** risp. a $\|\cdot\|_2$ nello **Spazio di Hilbert** $L^2([-\pi,+\pi])$ delle funzioni a quadrato sommabile su $[-\pi,+\pi]$.

Ciò implica che la **Serie di Fourier** di $f(x) \in L^2([-\pi,+\pi])$ **converge** a $f(x)$ **in media quadratica** (cioè risp. a $\|\cdot\|_2$).

Convergenza in norma

Una successione di funzioni $\{\varphi_n(x)\}$ è detta **convergere in norma** alla funzione $\varphi(x)$, su un intervallo $[a,b]$, se $\forall x \in [a,b]$

$$\lim_n \left\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right\| = 0 \qquad \{\varphi_n(x)\} \to \varphi(x)$$

... specificando la norma, si ha

$$\lim_n \left\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right\|_\infty = 0$$ **def** convergenza uniforme

Esempio: se φ è una funzione analitica olomorfa, allora la successione delle somme parziali della sua Serie di Taylor (serie di potenze) converge uniformemente a φ

$$\lim_n \left\| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right\|_2 = 0$$ **def** convergenza in media quadratica

Esempio: se φ è una funzione a quadrato sommabile, allora la sequenza delle somme parziali della sua Serie di Fourier (serie trigonometrica) converge in media quadratica a φ

$\{f_n^*\}_n$ convergenza in norma $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\lim_n \left\| f - f_n^* \right\| = 0$

convergenza in $\|\cdot\|_\infty$ $\Rightarrow$ convergenza in $\|\cdot\|_2$

(convergenza uniforme) $\not\Leftarrow$ (convergenza in media quadratica)

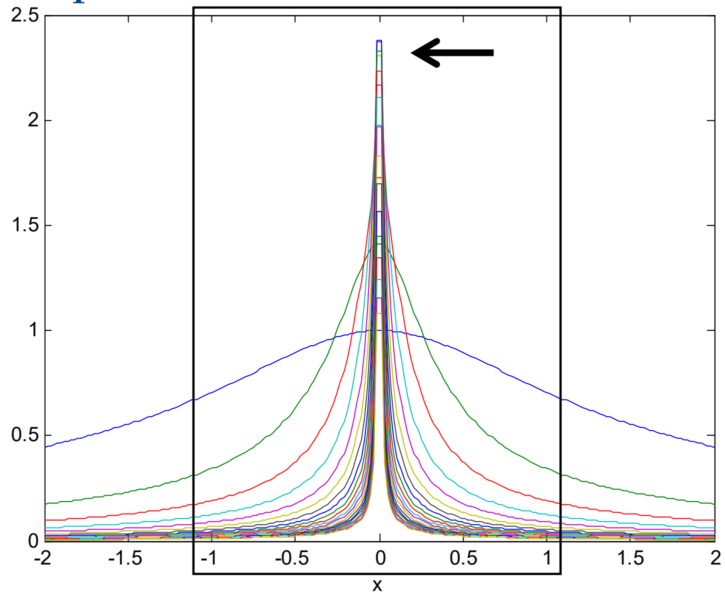
ESEMPIO: convergenza in $\|\cdot\|_2$

In $C^0(\underbrace{[-1,+1]}_{[a,b]})$ la successione di funzioni $\{f_n(x)\}_n$ $\quad f_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{1+n^4x^2}}$

converge in $\|\cdot\|_2$ all funzione identicamente nulla.

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

Infatti, si ha $\|0 - f_n(x)\|_2^2 = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{n}{1+n^4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\arctan n^2 \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty$



Ma non converge in $\|\cdot\|_\infty$ perché in 0 diverge ($\to\infty$)

$$f_n(0) = \sqrt{n} \to \infty \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

$$d(f,g) = \sup_{x\in[-1,+1]} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_\infty$$

$\{f_n^*\}_n$ convergenza in norma $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\lim_n \|f - f_n^*\| = 0$

convergenza in $\|\cdot\|_\infty$ (convergenza uniforme) $\Rightarrow$ **convergenza in $\|\cdot\|_2$** (convergenza in media quadratica)

$\not\Leftarrow$

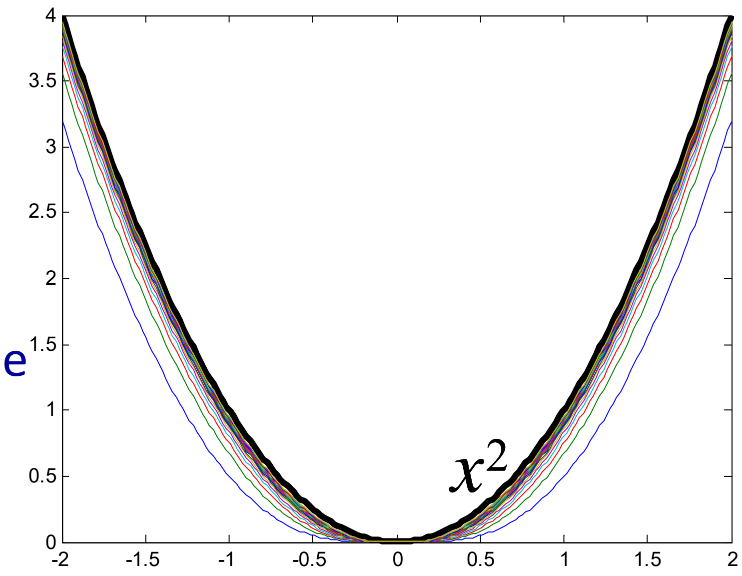
ESEMPIO: convergenza in $\|\cdot\|_\infty$

In $C^0(\mathbb{R})$ la successione di funzioni $\{f_n(x)\}_n$ $\quad f_n(x) = \dfrac{nx^4}{1+nx^2}$

$\boxed{\text{converge uniformemente (in } \|\cdot\|_\infty\text{) alla funzione } x^2}$: infatti, risulta

$$\lim_n \|x^2 - f_n(x)\|_\infty^2 = \lim_n \max_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{\left| x^2 - \frac{nx^4}{1+nx^2} \right|}_{} = 0$$

$$\lim_n \left| \frac{1 + \cancel{nx^4} - \cancel{nx^4}}{1+nx^2} \right| = 0$$



$\boxed{\text{converge anche in } \|\cdot\|_2}$ perché

per le successioni che convergono uniformemente vale che

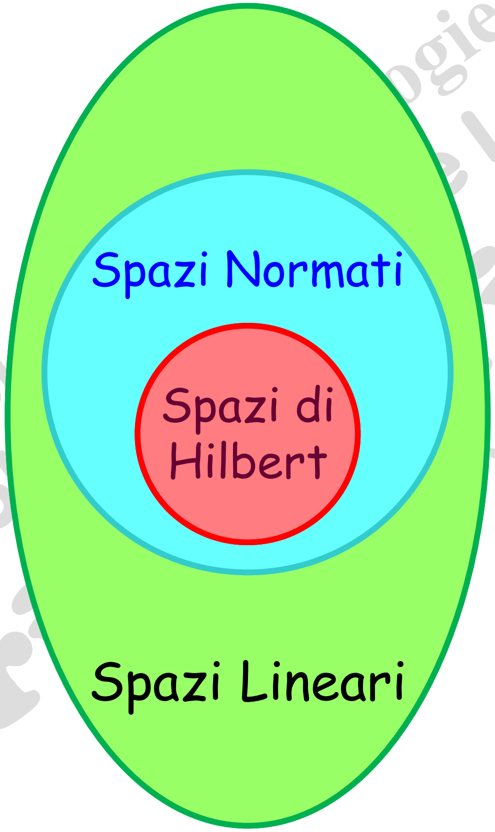
$\lim_n \| f_n(x) - x^2 \|_2 = \boxed{\lim_n} \int_{\mathbb{R}} | f_n(x) - x^2 |\, dx =$

scambia i 2 operatori

$= \int_{\mathbb{R}} \boxed{\lim_n} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} 0\, dx = 0$

Il teorema di esistenza ed unicità della m.a. in $\|\cdot\|_2$ vale solo per sottospazi *a dimensione finita*.

Gli Spazi di Hilbert sono introdotti per assicurare l'esistenza della m.a. rispetto alla $\|\cdot\|_2$ in qualsiasi sottospazio, anche di dimensione infinita.



In pratica, gli Spazi di Hilbert consentono di mantenere, anche in spazi a dimensione infinita, la stessa "geometria" degli Spazi Lineari Euclidei (vettori di lunghezza finita, angoli tra vettori, Teorema di Pitagora, ...), che è familiare per spazi come $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$.