Esercizi

ACS2_08 – Autovalori ed autovettori.

1. Perché, data una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$, sono equivalenti le affermazioni:
   - $\boldsymbol{A}$ è invertibile;
   - $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$;
   - $\lambda = 0$ non è autovalore di $\boldsymbol{A}$.

2. Mediante il *Symbolic Math Toolbox*, provare che se $\boldsymbol{A}$ è una matrice 2×2 e $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A} - I_2$, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ hanno gli stessi autovettori. Che relazione c'è tra gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ e quelli di $\boldsymbol{B}$?

3. Trovare gli autovalori e gli autospazi della simmetria ortogonale 3D rispetto alla retta $r=\text{span}\{(2,1,1)^T\}$. Visualizzare tali autospazi.

4. Anche mediante il *Symbolic Math Toolbox*, trovare gli autovalori e gli autospazi della simmetria ortogonale 3D rispetto ad una retta generica $r=\text{span}\{\underline{\boldsymbol{a}}\}$ dove $\underline{\boldsymbol{a}}=(a_1, a_2, a_3)^T$.
   [Sugg.: sfruttare la forma matriciale della trasformazione]

5. Anche mediante il *Symbolic Math Toolbox*, trovare gli autovalori reali e gli autospazi delle rotazioni 3D attorno agli assi x, y, z.

6. Sono diagonalizzabili le seguenti trasformazioni? Motivare la risposta. Usare sia il *Symbolic Math Toolbox* che il MATLAB numerico per risolvere l'esercizio.
   - Lo shear orizzontale 2D con fattore di shear r=2;
   - La rotazione 2D di 90°;
   - La trasformazione indotta dalla matrice: `A=[2 1;-9 8]`;
   - La trasformazione indotta dalla matrice: `A=[2 0 0 0;5 3 0 0;9 1 3 0;1 2 5 -1]`;
   - La proiezione ortogonale 2D sulla retta $r=\text{span}\{(2,1)^T\}$.

7. Calcolare "efficientemente" `A`^{100} dove `A=[.8 .3;.2 .7]`.

8. Trovare i punti che rimangono invariati dopo l'applicazione della trasformazione indotta t_A dalla matrice: `A=[0.6 0.8;0.8 -0.6]`. Trovare anche le rette di equazione $y=mx$ che rimangono immutate dopo l'applicazione di t_A. A quale trasformazione geometrica 2D corrisponde t_A?

9. Scomporre in trasformazioni elementari la matrice: `A=[3 -1;-1 3]` a partire dalle matrici della sua diagonalizzazione.

10. Scrivere una funzione MATLAB per determinare il numero di componenti connesse di un grafo, data in input la sua matrice di adiacenze. Scaricare il file `graph2.mat` per una matrice di adiacenze, oppure usarne un'altra a scelta.