Esercizi

ACS2_06 – Trasformazioni affini.

1. Trovare l'equazione di una simmetria centrale rispetto all'origine del piano reale (automorfismo), e quella di una simmetria centrale rispetto ad un generico centro (affinità) C(x_0,y_0) non nell'origine.

2. Stabilire se le seguenti trasformazioni sono lineari o affini, e stabilire se sono invertibili. Per le trasformazioni invertibili, trovarne l'inversa. Mostrare graficamente in MATLAB l'effetto della trasformazione e della sua inversa su un quadrato unitario.
   - $\phi \;:\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow y=\begin{pmatrix} 2x_1-2x_2+1 \\ -x_1+x_2-1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$
   - $\phi \;:\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow y=\begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ -x_1+x_2-1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$
   - $\phi \;:\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \longrightarrow y=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}x\in\mathbb{R}^3$
   - $\phi \;:\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \longrightarrow y=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}x\in\mathbb{R}^3$

3. Trovare la trasformazione affine che trasforma il triangolo di vertici (0,1), (1,2), (2,0) nel triangolo di vertici (1,2), (0,–1), (3,3).

4. Trovare la forma matriciale della rotazione (del piano reale) di un angolo θ attorno ad un punto C(x_0,y_0) diverso dall'origine. Mostrare il suo effetto sul quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

5. Visualizzare l'immagine della retta in $\mathbf{R}^2$ di equazione $y=-4x+3$, mediante la trasformazione indotta dalla matrice: $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Visualizzare l'immagine del quadrato unitario (centrato nell'origine) in $\mathbf{R}^2$ mediante la seguente trasformazione:
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Di quali trasformazioni elementari si compone?

7. Trovare la forma matriciale della rotazione (dello spazio tridimensionale reale) di un angolo θ=–30° attorno all'asse generato dal vettore (1,1,1). Visualizzare il suo effetto sul parallelepipedo costruito e visualizzato dalle seguenti istruzioni:

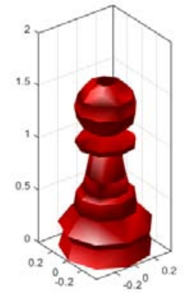
```
vert=[0 0 0;2 0 0;2 1 0; 0 1 0; 0 0 1; 2 0 1; 2 1 1;0 1 1];
face=[1 2 3 4; 3 7 8 4; 2 3 7 6; 5 6 7 8];
col=[0 0 0; 1 0 0; 0 0 1; 0 1 0];
patch('Faces',face,'Vertices',vert,'FaceVertexCData',col,'FaceColor','flat', ...
                                                         'FaceAlpha',0.5)
view(3); axis equal; axis tight
```

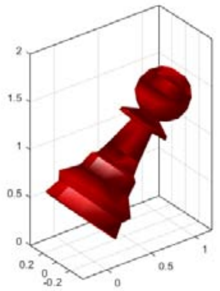
8. Trovare la forma matriciale della rotazione (dello spazio tridimensionale reale) di un angolo $\theta=60°$ attorno ad un asse passante per un punto $P_0(3,2,-1)$ e parallelo alla direzione data dal vettore (1,1,1). [Sugg.: normalizzare il vettore dell'asse]

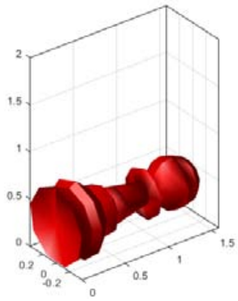
9. In $\mathbf{R}^3$ uno shear parallelo al piano x-y e di fattore k trasforma un generico punto (x,y,z) nel punto $(x+kz,y+kz,z)$. Trovare la matrice che realizza tale trasformazione e visualizzare la sua azione sul parallelepipedo dell'esercizio 6.

10. Il seguente codice visualizza un oggetto 3D (un pedone degli scacchi) con qualche effetto luminoso.

```
%% scaricare il file pedone.mat dalla piattaforma di eLearning
load pedone % carica i dati dal file pedone.mat
patch('Faces',pedone.f.v,'Vertices',pedone.v,
           'Facecolor','r','EdgeColor','none')
view(3); axis equal
grid on; box on
zlim([0 2])
camlight('left','infinite'); lighting gouraud
x=pedone.v(:,1);
y=pedone.v(:,2);
z=pedone.v(:,3);
```







Le tre figure mostrano la posizione iniziale, quella centrale e quella finale di un pedone che cade verso destra. Simulare "efficientemente" la caduta del pedone, costruendo le successive trasformazioni (mediante opportune matrici) che fanno ruotare l'oggetto di un angolo θ attorno all'asse y, con il punto di contatto col suolo nel punto più in basso e più a destra (nuova origine della rotazione).