Esercizi

ACS2_05 – Trasformazioni lineari.

1. Assegnata la trasformazione

$$F : A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow F(A) = A - A^{\mathsf{T}} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

   verificare che sia lineare, e calcolare, mediante il Symbolic Math Toolbox di MATLAB, i sottospazi Kernel $\mathcal{N}(F)$ e Range $\mathcal{R}(F)$. [Sugg.: vedi `ACS2_05a.pdf` pg. 14-15]

2. Determinare il Kernel della trasformazione lineare che associa ad ogni funzione derivabile $f(x)$ la sua derivata $f'(x)$.

3. Fissato un vettore non nullo $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$, per es., $\mathbf{v}=(3\ 2\ 1)^{\mathsf{T}}$, verificare che la trasformazione lineare

$$F\ :\ \boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^3 \longrightarrow \alpha = \langle \mathbf{v},\boldsymbol{u}\rangle \in\mathbf{R}$$

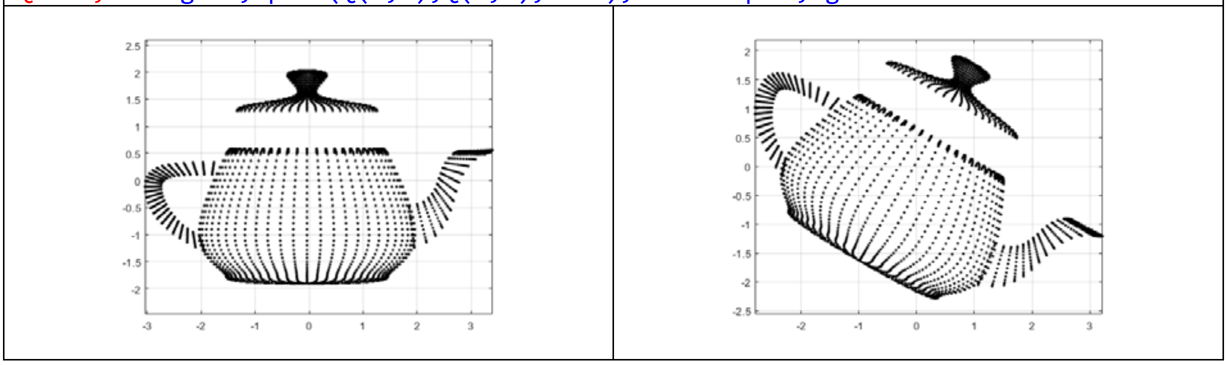
   dove $\langle,\rangle$ indica il *prodotto scalare standard* in $\mathbf{R}^3$, sia suriettiva ma non iniettiva.
   Se A=(3 2 1) verificare che F coincide con la trasformazione associata alla matrice A, t_A; calcolare e visualizzare i sottospazi $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A^{\mathsf{T}})$.

4. Determinare l'isomorfismo tra $\mathcal{R}(A^{\mathsf{T}})$ e $\mathcal{R}(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Verificare che una rotazione piana di un angolo θ si compone di due opportuni shear (uno orizzontale ed uno verticale) ed uno scaling non uniforme. Se R è la matrice della rotazione, S_o è quella dello shear orizzontale, S_v è quella dello shear verticale e D la matrice dello scaling non uniforme, come viene fattorizzata la matrice R? Verificarlo graficamente, per $\theta = -\pi/6$, sui punti del file `my_teapot_2D_O.mat`, che si scarica dalla piattaforma di eLearning. Visualizzare anche come agiscono le singole trasformazioni sui punti di input. Il seguente codice disegna tali punti prima e dopo la rotazione.

```
load my_teapot_2D_O
th=-pi/6; R=[cos(th) -sin(th); sin(th)  cos(th)];
P=[x;y]; figure, plot(P(1,:),P(2,:),'.k'); axis equal; grid on
Q=R*P;   figure, plot(Q(1,:),Q(2,:),'.k'); axis equal; grid on
```



6. Se A è la matrice della simmetria ortogonale $S_{\boldsymbol{a}} = t_A$ in $\mathbf{R}^2$ rispetto ad una retta generica r=span$\{\boldsymbol{a}\}$, dove $\|\boldsymbol{a}\|_2$=1, dimostrare, mediante Symbolic Math Toolbox, che

$$A=\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}$$

7. Se A è la matrice della simmetria ortogonale $S_{\boldsymbol{a}}=t_A$ in $\mathbf{R}^2$ rispetto ad una retta generica r=span$\{\boldsymbol{a}\}$, determinare i quattro sottospazi fondamentali di A. La trasformazione t_A è un automorfismo? Verificare che il *riflettore di Householder* $H_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{v}) = -S_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{v})$ descrive la simmetria ortogonale rispetto a $r^{\perp}$.

8. Calcolare i sottospazi $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(\mathrm{I}-A)$ dove A è la matrice della proiezione ortogonale 2D su una generica retta r=span$\{\boldsymbol{a}\}$. Verificarlo nel caso particolare di $\boldsymbol{a}=(2,1)^{\mathrm{T}}$, visualizzando anche i sottospazi. Che tipo di trasformazione è indotta dalla matrice $\mathrm{I}-A$?

9. Calcolare la distanza tra due rette parallele come applicazione della proiezione ortogonale 2D su una retta. Visualizzare il risultato.

10. Fattorizzare in trasformazioni lineari elementari una matrice `A` di size (2×2) calcolata come segue:
    ```
    Nmax=6;
    A=randi(Nmax,2)-Nmax/2;
    ```

11. A partire da una matrice quadrata calcolata come `A=rand(2)` oppure come `A=randn(2)`, spiegare quali trasformazioni lineari elementari si ottengono dalle seguenti fattorizzazioni di `A`:
    - `[L,U,P]=lu(A);`
    - `[U,S,V]=svd(A);`

12. Perché per una matrice ortogonale A, di dimensione n,vale sempre che $\det(A) = \pm 1$.

13. Che tipo di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ induce la matrice di permutazione `P` data da
    ```
    P=[1 0 0;0 0 1;0 1 0]
    ```
    E `P`$^{-1}$? Visualizzare il loro effetto.

14. Se A è la matrice della simmetria ortogonale $S_{\boldsymbol{a}}=t_A$ in $\mathbf{R}^3$ rispetto ad una retta generica r=span$\{\boldsymbol{a}\}$, cosa rappresentano i quattro sottospazi fondamentali di A? E $\mathcal{N}(A-\mathrm{I})$? E $\mathcal{N}(\mathrm{I}-A)$? La trasformazione t_A è un automorfismo?

15. Disegnare in $\mathbf{R}^3$ l'ombra parallela al piano XZ (o al piano YZ) di un solido di rotazione. Tale ombra può essere calcolata come proiezione ortogonale dei punti del solido su quel piano, e poi traslata su una faccia laterale della figura grafica [vedi `ACS2_05b.pdf` pag. 46].

16. Determinare in $\mathbf{R}^3$ la forma matriciale dell'endomorfismo per la proiezione ortogonale su una retta r=span$\{\boldsymbol{a}\}$, assegnato un vettore $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3$.

17. Calcolare in $\mathbf{R}^3$ la distanza tra un punto P ed una retta r, e tra il punto P ed un piano π, come applicazione della proiezione ortogonale. Poiché si suppone che $\mathbf{R}^3$ sia uno spazio lineare, la retta ed il piano passano per l'origine ed il punto va inteso come estremo finale del vettore OP.

18. Calcolare un'inversa generalizzata della matrice: `A=[4 4 -2;4 4 -2;-2 -2 10];` e di `diag(diag(A))`. Calcolare anche la pseudoinversa di `A` e confrontarla col risultato della funzione `pinv()`.

19. Verificare che la matrice X_p, ottenuta come particolare inversa destra della matrice [vedi `ACS2_05c.pdf` pag. 11]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non è la pseudoinversa di Moore-Penrose di $\boldsymbol{A}$.

20. Applicare l'algoritmo a pag. 10-11 di `ACS2_05c.pdf`, per calcolare una matrice particolare $\boldsymbol{X}_p$ e la forma generale delle inverse sinistre della matrice $\boldsymbol{A}$ (3×2):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare anche la pseudoinversa sinistra di $\boldsymbol{A}$ come proiezione ortogonale di $\boldsymbol{X}_p$ su $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^\top)$, confrontandola con $B = \left(A^\top A\right)^{-1} A^\top$.

21. Risolvere i seguenti sistemi lineari indeterminati calcolandone la soluzione generale e quella di minima norma 2. Visualizzare graficamente i risultati.
    - `A=[1 2 3;4 6 6;7 8 9]; b=[2;2;2];`
    - `A=[1 4 7;2 3 9;2 2 8]; b=[6;7;6];`
    - `A=[1 3 8;1 2 6;0 1 2]; b=[12;9;3];`