Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_06

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - **Cenni sulle Trasformazioni Affini.**

Le **trasformazioni affini** generalizzano quelle **lineari**, poiché consentono di cambiare non solo la base ma anche l'origine del sistema di riferimento.

Le **trasformazioni affini preservano** la **collinearità**, cioè esse trasformano punti allineati in punti allineati e rette parallele in rette parallele*, ma in generale esse **non preservano** le distanze tra punti o gli angoli tra segmenti.

* significa che ∞ è punto fisso, sioè si trasforma in sé stesso

Si ricorda, ad esempio, che se $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare, allora F è completamente determinata da come agisce su una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$; cioè, conoscendo $F(b_1)$ e $F(b_2)$ per una base $\{b_1,b_2\}$ di $\mathbb{R}^2$, si può trovare la matrice che induce la trasformazione F.

Analogamente, una trasformazione affine su $\mathbb{R}^2$ è individuata da come agisce su una qualsiasi terna di punti non collineari, cioè, tre punti che formano un triangolo proprio (punti affinemente indipendenti).

Una trasformazione affine reale elementare tra due spazi affini reali a dimensione finita

$$\Psi : P \in \mathbb{R}^n \longrightarrow Q \in \mathbb{R}^m \qquad P, Q \text{ punti}$$

è descritta, in Coordinate Cartesiane, dalla seguente equazione matriciale

coordinate dell'immagine di $O \in \mathbb{R}^n$

$$Q = (y) = \Psi(P) = A(x) + \boxed{(b)}$$

coordinate cartesiane

traslazione

dove $P \equiv \boxed{(x)}$ e $Q \equiv \boxed{(y)}$,

ed in Coordinate Omogenee da

vettori aumentati

$$\boxed{\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}} = \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} & A & & b \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)} \boxed{\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}}$$

matrice aumentata

Ogni trasformazione lineare è anche affine.

Le **trasformazioni lineari** preservano le combinazioni lineari, mentre le **trasformazioni affini** di solito non preservano le combinazioni lineari; tuttavia, c'è un tipo di combinazione lineare che viene preservato.

Teor. Le **trasformazioni affini** preservano le combinazioni lineari di punti in cui la somma dei coefficienti è 1 (dette combinazioni affini):

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \quad \text{combinazione affine}^{*} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

* se, in più, $\alpha_i > 0$ si parla di combinazione convessa

Dim.:

$$Q = AP + b = A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i + b\boxed{(1)} = A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i + b\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(AP_i + b\right)$$

Esempio di trasformazione affine

$$\Psi : P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto Q = \Psi(P) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \in \mathbb{R}$$

in coordinate cartesiane

$$Q = \Psi(P) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \gamma$$

in coordinate omogenee

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ψ è affine $\qquad y = A(x) + (b)$

In generale, ogni funzione lineare $f(x) = \alpha^T x + \beta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta$ può essere considerata come una trasformazione affine tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$.

in coordinate omogenee

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & A & & b \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

vettori aumentati

matrice aumentata o matrice della trasformazione affine

Nel caso generale, se l'ultima riga non è vincolata ad essere $[0 \ \ldots \ 0 \mid 1]$, cioè può contenere qualsiasi valore reale, la matrice descrive una trasformazione proiettiva, e viene detta matrice della trasformazione proiettiva.

Esempio di trasformazione non affine in $\mathbb{R}^2$

La trasformazione proiettiva (o omografica) 2D

$$\Phi : P(x,y)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \Phi(P) = Q\left(\frac{ax+by+c}{gx+hy+k}, \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2$$

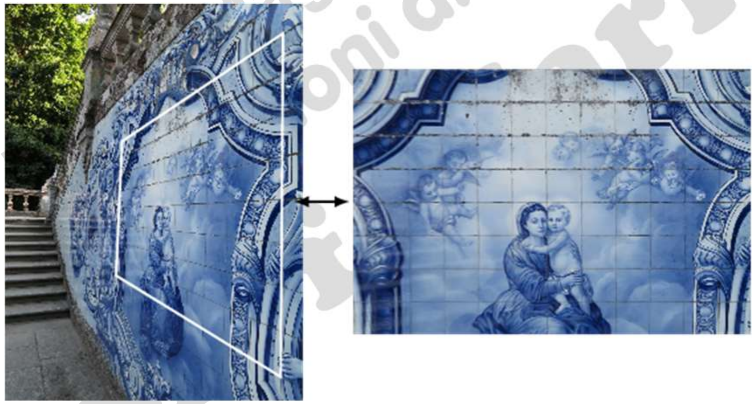
può essere descritta come prodotto matrice-vettore mediante le coordinate omogenee:

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(X,Y) = \left(x^*/w^*, \ y^*/w^* \right)$$

si può porre $k=1$ scalando gli elementi della matrice, così da avere 8 parametri

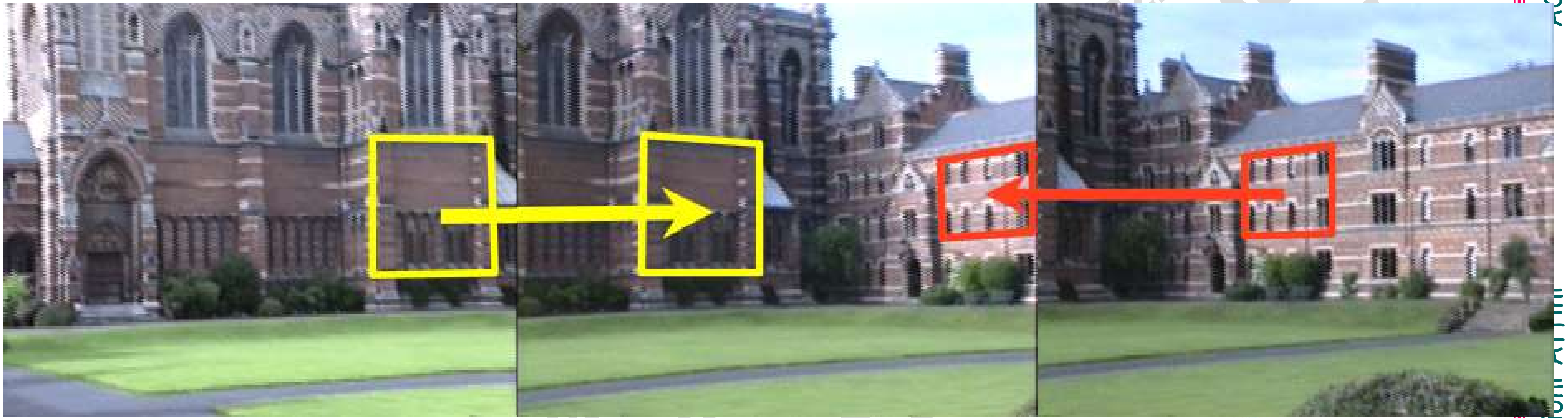
Infatti

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \\ gx+hy+k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^*/w^* \\ y^*/w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\dfrac{ax+by+c}{gx+hy+k}} \leftarrow \boxed{X} \\ \boxed{\dfrac{dx+ey+f}{gx+hy+k}} \leftarrow \boxed{Y} \end{pmatrix} Q(X,Y)$$



Se $g=h=0$ allora la trasformazione proiettiva si riduce ad una trasformazione affine (basata su 6 parametri).

Esempio d'applicazione di un'omografia: mosaicatura



Esempio di trasformazione lineare come affinità: shear orizzontale in $\mathbb{R}^2$

$$\Psi \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = A\,x \in \mathbb{R}^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R}$$

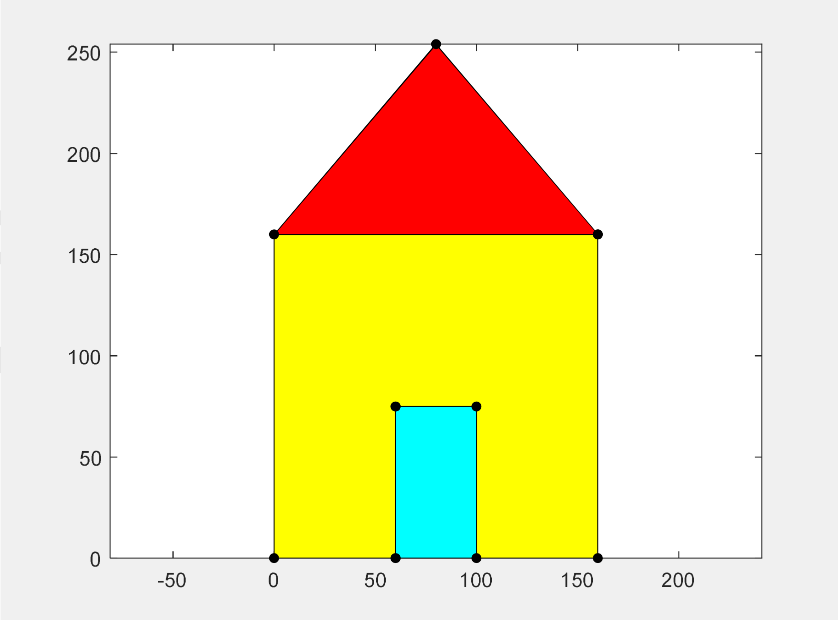
$\boxed{\tan(\theta)}$

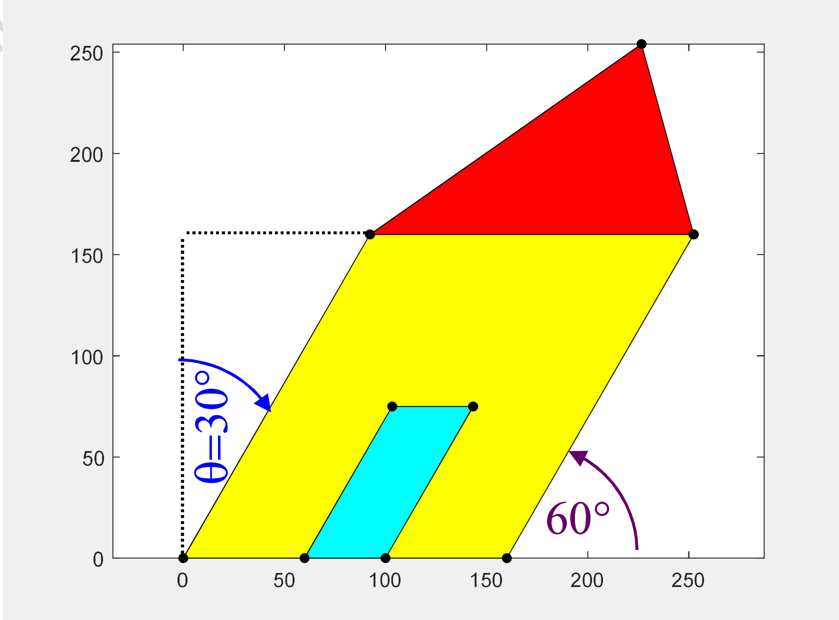
casetta colorata

```
X1=[0 160 160 0];   Y1=[0 0 160 160]; P1=[X1;Y1]; % yellow
X2=[0 160 80];      Y2=[160 160 254]; P2=[X2;Y2]; % red
X3=[60 100 100 60]; Y3=[ 0 0 75 75];  P3=[X3;Y3]; % cyan
patch(X1,Y1,'y'); axis equal; hold on; box on; patch(X2,Y2,'r'); patch(X3,Y3,'c')
P=[P1 P2 P3]; plot(P(1,:),P(2,:),'.k','MarkerSize',15)
```

casetta colorata dopo lo shear orizzontale

```
th=pi/6; r=tan(th); A=[1 r;0 1]; Q1=A*P1; Q2=A*P2; Q3=A*P3; Q=[Q1 Q2 Q3];
patch(Q1(1,:),Q1(2,:),'y'); axis equal; hold on; box on
patch(Q2(1,:),Q2(2,:),'r'); patch(Q3(1,:),Q3(2,:),'c')
plot(Q(1,:),Q(2,:),'.k','MarkerSize',15)
```





Esempio di trasformazione lineare come affinità: shear verticale in $\mathbb{R}^2$

$$\Psi \;:\; x\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow y = A\,x\in\mathbb{R}^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix},\; r\in\mathbb{R}$$

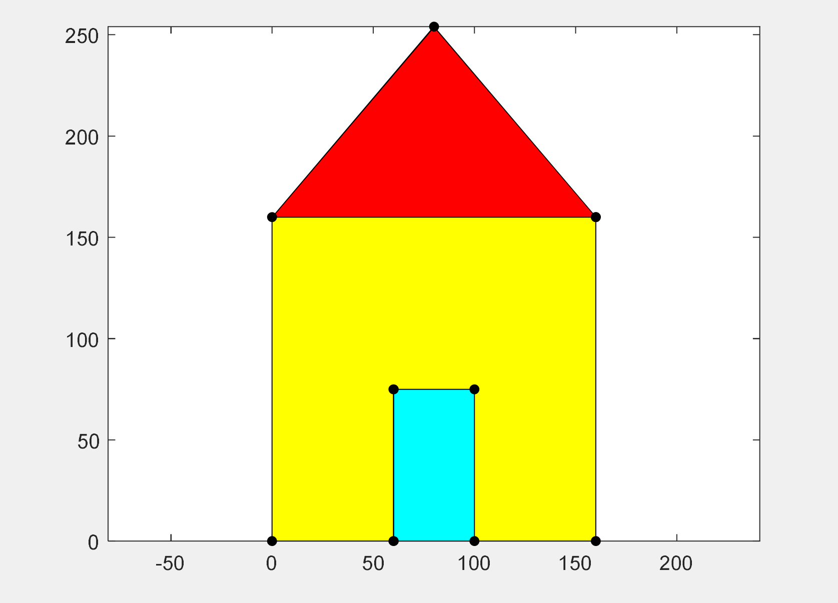
r = tan(θ)

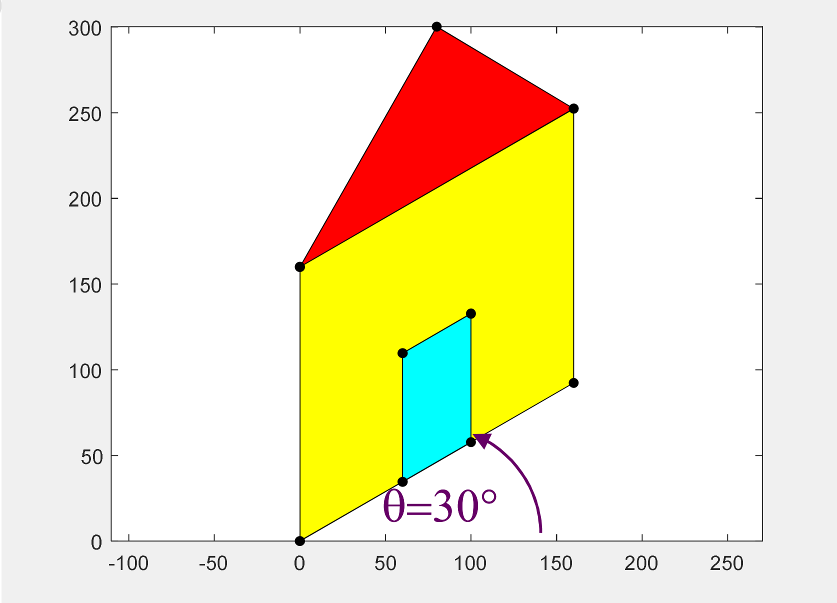
casetta colorata

```
X1=[0 160 160 0];   Y1=[0 0 160 160]; P1=[X1;Y1]; % giallo
X2=[0 160 80];      Y2=[160 160 254]; P2=[X2;Y2]; % rosso
X3=[60 100 100 60]; Y3=[ 0 0 75 75];  P3=[X3;Y3]; % ciano
patch(X1,Y1,'y'); axis equal; hold on; box on; patch(X2,Y2,'r'); patch(X3,Y3,'c')
P=[P1 P2 P3]; plot(P(1,:),P(2,:),'.k','MarkerSize',15)
```

casetta colorata dopo lo shear verticale

```
th=pi/6; r=tan(th); A=[1 0;r 1]; Q1=A*P1; Q2=A*P2; Q3=A*P3; Q=[Q1 Q2 Q3];
patch(Q1(1,:),Q1(2,:),'y'); axis equal; hold on; box on
patch(Q2(1,:),Q2(2,:),'r'); patch(Q3(1,:),Q3(2,:),'c')
plot(Q(1,:),Q(2,:),'.k','MarkerSize',15)
```





Una Traslazione in $\mathbb{R}^n$, espressa mediante le coordinate cartesiane, non è una trasformazione lineare

(perché non può esprimersi mediante il prodotto matrice×vettore, cioè non può esprimersi come trasformazione associata ad una matrice).

Esempio

$$T \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Non esiste nessuna matrice $A(2\times 2)$ tale che $y = T(x) = Ax$

una Traslazione è una trasformazione affine

T si può scrivere $\quad y = T(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = Ix + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

cioè del tipo $\quad y = Ax + v$

Equazione matriciale di una generica Trasformazione Affine di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Esempio: traslazione in coordinate omogenee

La Traslazione $T \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

si scrive in coordinate omogenee

$$y = T(x) = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{X_3} - 2 \\ \frac{X_2}{X_3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1 - 2X_3}{X_3} \\ \frac{X_2 - X_3}{X_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 - 2X_3 \\ X_2 - X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Pertanto diventa

$$T = t_A \; : \; X \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow Y = \boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

spostamento dell'origine

matrice identica

$$T = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

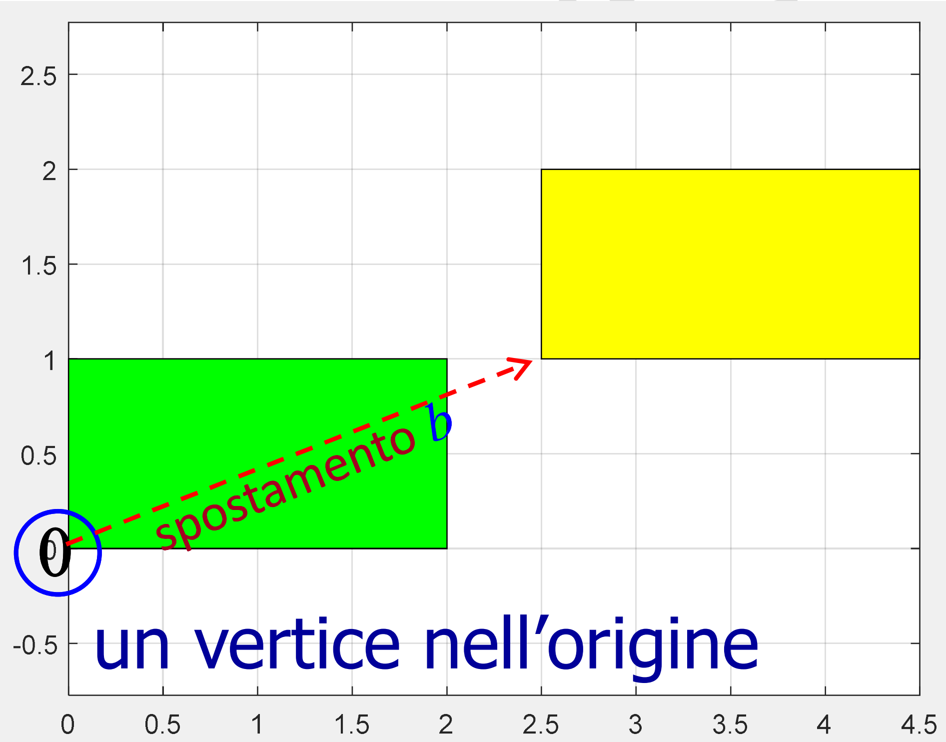
Esempio di affinità: Traslazione in $\mathbb{R}^2$

$$\Psi\ :\ x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = Ix + b \in \mathbb{R}^2$$

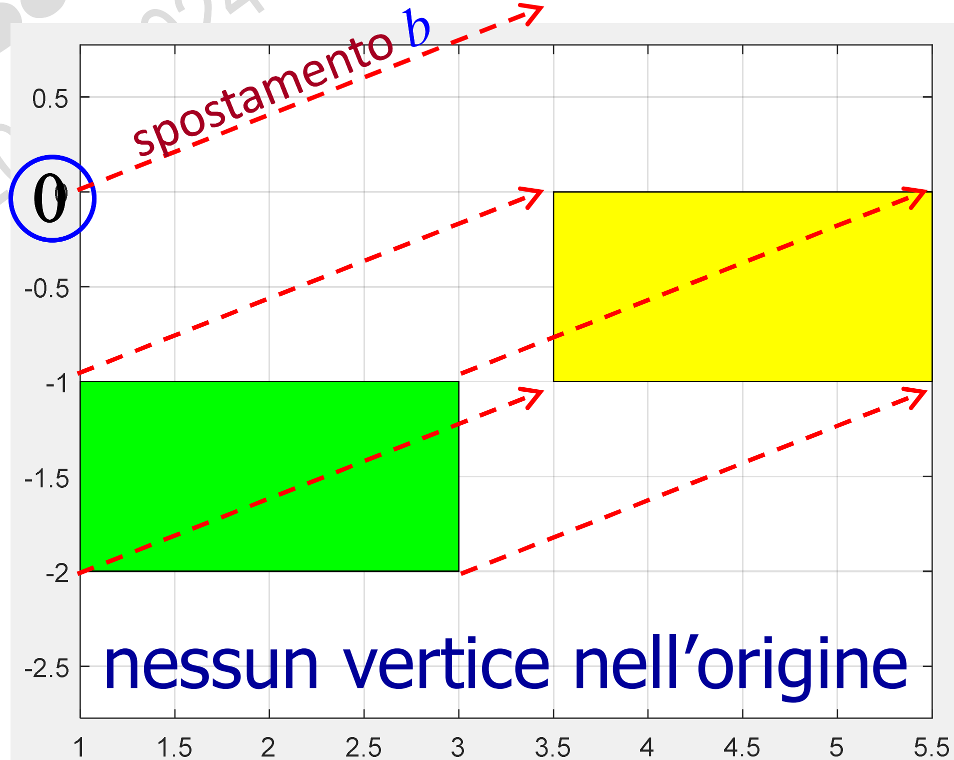
```
b=[2.5 1]';
X=[0 2 2 0]; Y=[0 0 1 1]; P=[X;Y];
patch(X,Y,'g'); axis('equal'); hold on
Q=P + repmat(b,1,size(P,2));
patch(Q(1,:),Q(2,:),'y')
```

```
b=[2.5 1]';
X=1+[0 2 2 0]; Y=-2+[0 0 1 1]; P=[X;Y];
patch(X,Y,'g'); axis('equal'); hold on
Q=P + repmat(b,1,size(P,2));
patch(Q(1,:),Q(2,:),'y')
```

isometria



un vertice nell'origine



nessun vertice nell'origine

Exampio di affinità: Traslazione in $\mathbb{R}^2$ in coordinate omogenee

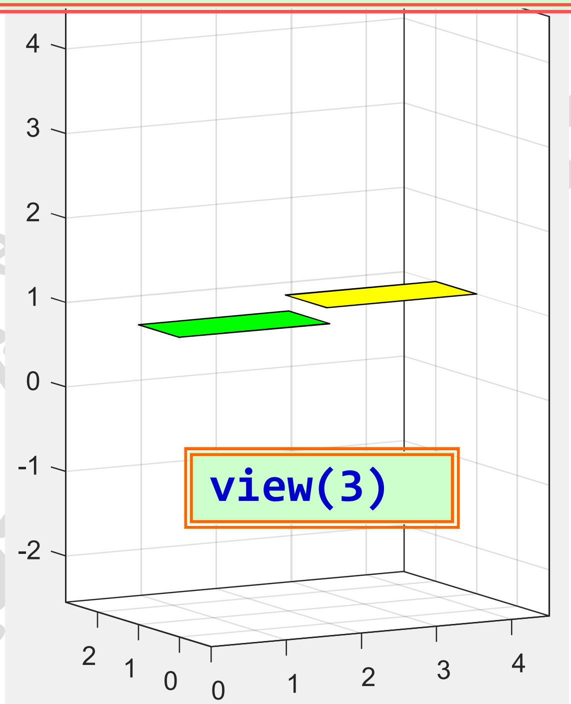
Una Traslazione in $\mathbb{R}^n$ diventa una trasformazione lineare se $\mathbb{R}^n$ si esprime in coordinate omogenee (in $\mathbb{R}^{n+1}$).

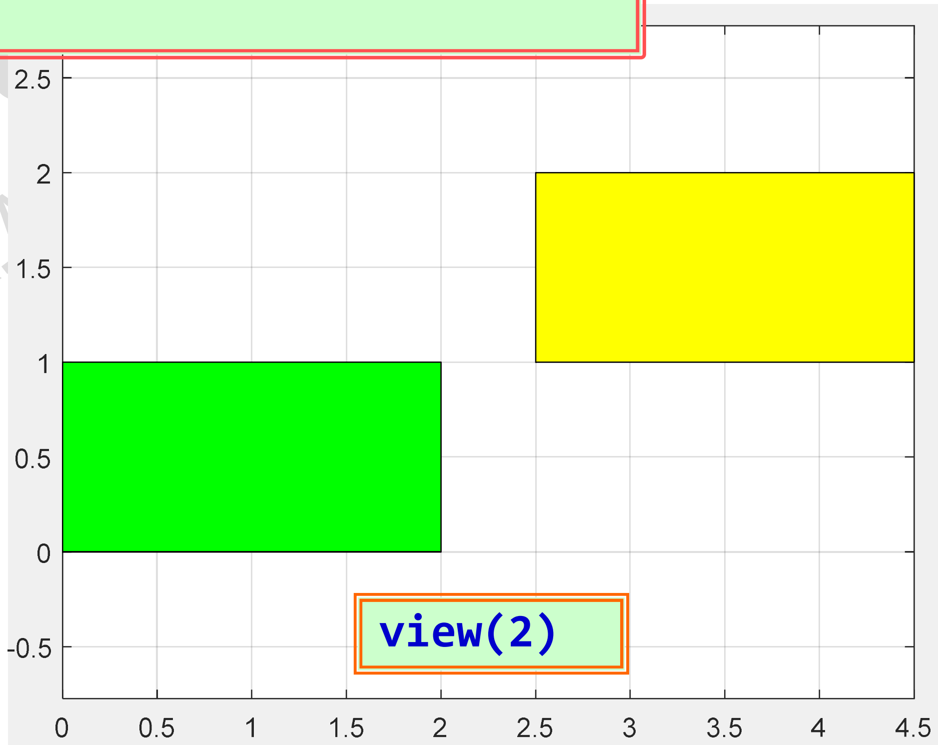
$$\Psi \; : \; x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^3 \qquad A = \begin{pmatrix} I_2 & \vec{b} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b=[2.5 1]'; A=[eye(2) b;0 0 1];
X=[0 2 2 0];Y=[0 0 1 1]; P=[X;Y;ones(size(X))];
patch(P(1,:),P(2,:),P(3,:),'g'); axis('equal'); hold on
Q=A*P;
patch(Q(1,:),Q(2,:),Q(3,:),'y')
```

matrice della traslazione in coordinate omogenee

traslazione in coordinate omogenee come prodotto matrice-vettore

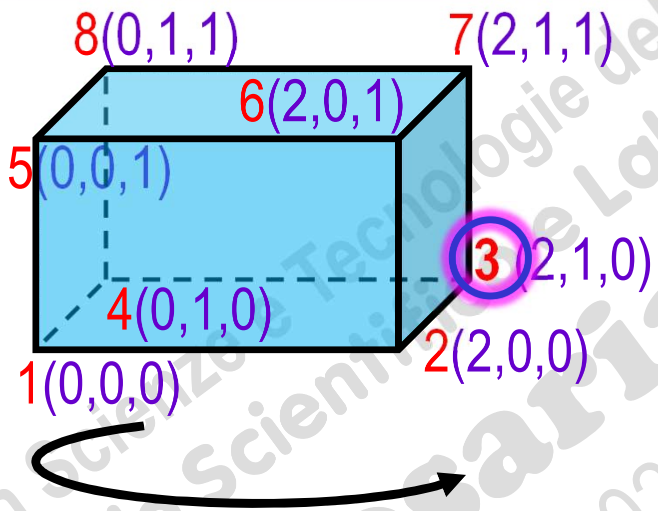




Come usare MATLAB **patch()** per tracciare oggetti 3D

1) Stabilire le coordinate dei vertici dell'oggetto

```
vert=[0 0 0;   % 1
      2 0 0;   % 2
      2 1 0;   % 3
      0 1 0;   % 4
      0 0 1;   % 5
      2 0 1;   % 6
      2 1 1;   % 7
      0 1 1]   % 8
vert =
     0     0     0
     2     0     0
     2     1     0
     0     1     0
     0     0     1
     2     0     1
     2     1     1
     0     1     1
```



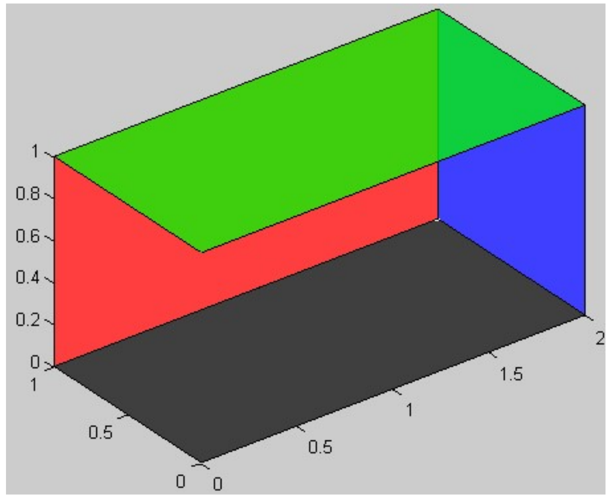
0) Enumerare i vertici

2) Stabilire le sue facce

```
face=[1 2 3 4;   % 1
      3 7 8 4;   % 2
      2 3 7 6;   % 3
      5 6 7 8];  % 4
```

3) Stabilire i colori delle facce come terna RGB

```
col=[0 0 0;   % 1
     1 0 0;   % 2
     0 0 1;   % 3
     0 1 0];  % 4
```



4) Disegnare l'oggetto con i parametri "Name"-"Value"

```
patch('Faces',face,'Vertices',vert, ...
      'FaceVertexCData',col, ...
      'FaceColor','flat', ...
      'FaceAlpha',0.5) % transparenza α∈[0,1]
view(3); axis equal; axis tight
```

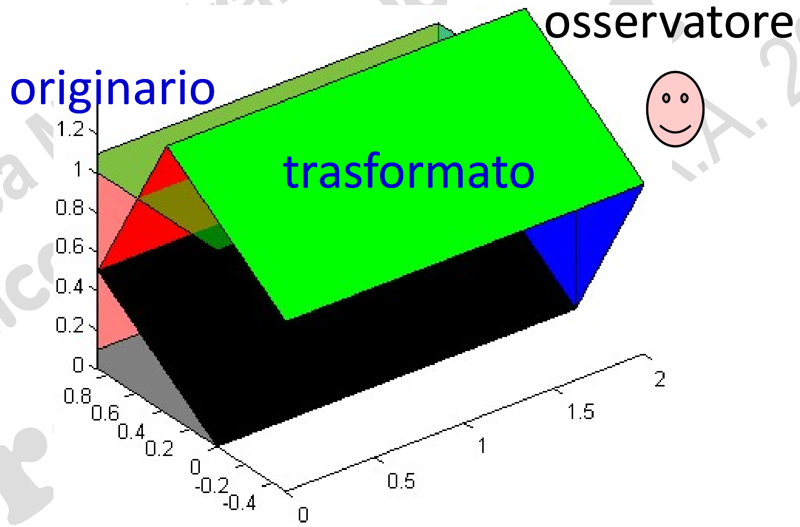
5) Se si vuole, aggiungere effetti di luce

Esempio di affinità: rotazione attorno all'asse X di $\alpha=\pi/6$ in $\mathbb{R}^3$

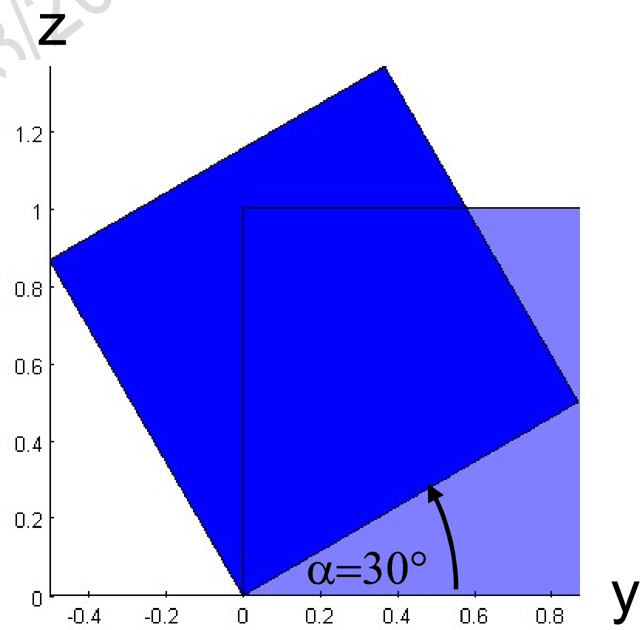
$$\Psi \quad : \quad x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

```
vert=...; fac=...; col=...;
alpha=pi/6; A=blkdiag(1,[cos(alpha) -sin(alpha);sin(alpha) cos(alpha)]);
B=A*vert';
patch('Faces',face,'Vertices',B','FaceVertexCData',col,'FaceColor','flat')
view(3); axis equal; axis tight; hold on
patch('Faces',face,'Vertices',vert, ...
```



un vertice nell'origine

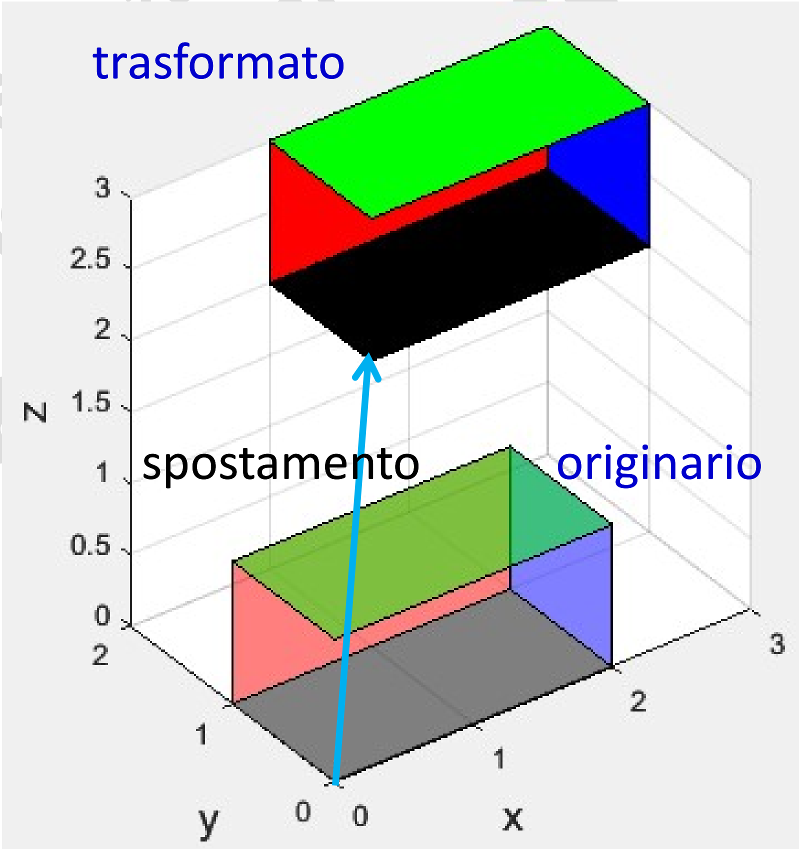


punto di vista dell'osservatore

Esempio di affinità: traslazione di passo $(1,1,2)^T$ in $\mathbb{R}^3$

$$\Psi \;:\; x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = x + b \in \mathbb{R}^3$$

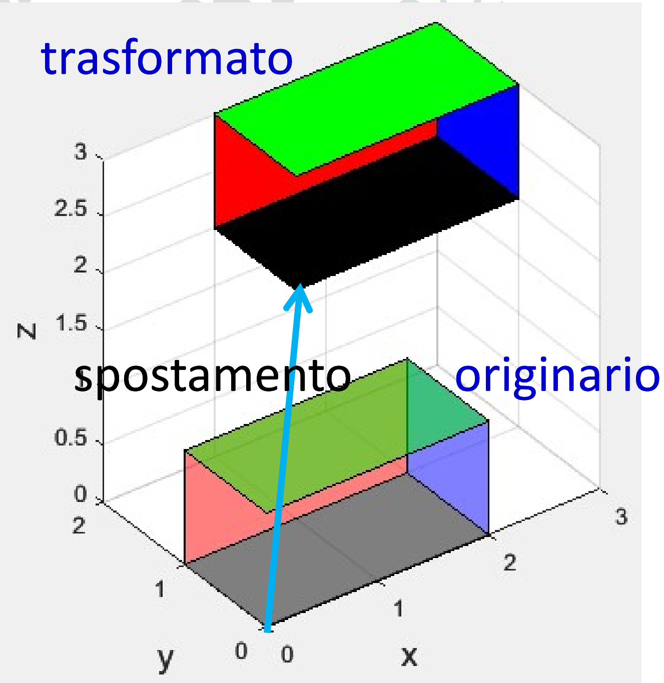
```
vert=...; fac=...; col=...;
b=[1;1;2]; B=vert' + b;
patch('Faces',face,'Vertices',B','FaceVertexCData',col,'FaceColor','flat')
view(3); axis equal; axis tight; hold on
patch('Faces',face,'Vertices',vert, ...
```



Esempio di affinità: traslazione di passo $(1,1,2)^T$ in $\mathbb{R}^3$ in coordinate omogenee

$$\Psi \quad : \quad x \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^4 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
vert=...; fac=...; col=...;
b=[1;1;2]; A=[eye(3) b;0 0 0 1];
B=A*[vert';ones(1,size(vert,1))]; B=B(1:3,:);
patch('Faces',face,'Vertices',B','FaceVertexCData',col,'FaceColor','flat')
view(3); axis equal; axis tight; hold on
patch('Faces',face,'Vertices',vert, ...
```



Esercizio: stabilire se le seguenti trasformazioni sono lineari o affini, e stabilire se esse sono invertibili. Per una trasformazione invertibile, trovarne l'inversa. Mostrare graficamente in MATLAB l'effetto della trasformazione e della sua inversa su un quadrato unitario.

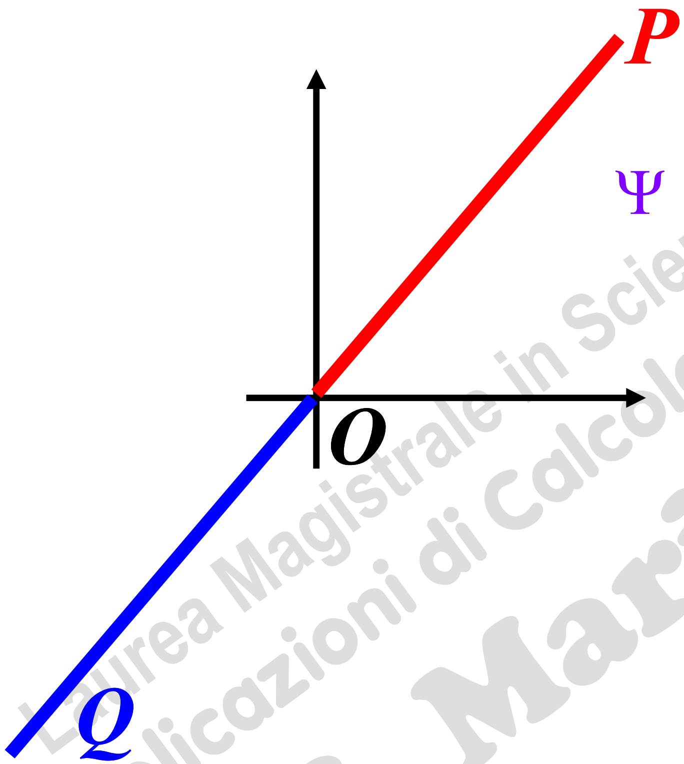
$$\phi \ : \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ -x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\phi \ : \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\phi \ : \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3$$

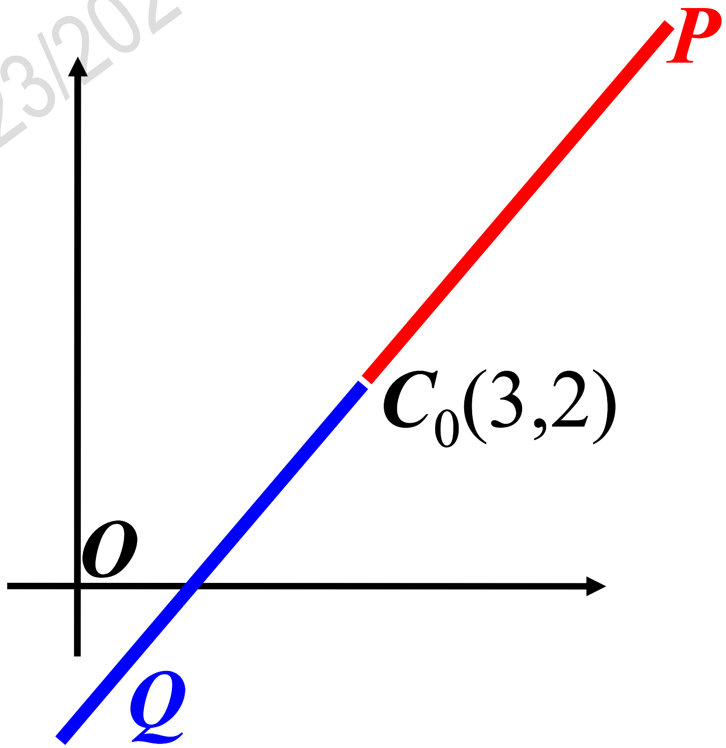
$$\phi \ : \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3$$

Esercizio: trovare l'equazione matriciale di una simmetria centrale rispetto all'origine del piano reale (automorfismo), e quella di una simmetria centrale rispetto ad un generico centro $C_0(x_0,y_0)$ (affinità).
Scrivere anche l'equazione matriciale in coordinate omogenee.



$$\Psi \; : \; P=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow Q = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Psi \; : \; P=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow Q = \, ? \in \mathbb{R}^2$$



Esercizi sulle trasformazioni affini

Trovare la forma matriciale della rotazione (del piano reale) di un angolo θ attorno ad un punto $P_0(x_0,y_0)$ diverso dall'origine.

Trovare la forma matriciale della rotazione (dello spazio tridimensionale reale) di un angolo θ attorno ad un asse passante per un punto $P_0(x_0,y_0)$ e parallelo ad una direzione data dal vettore (α,β,γ).