Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_05c

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - **Inverse generalizzate, Teor. ABCD, pseudoinverse ed inverse sinistre o destre (one sided inverses).**
  - **Soluzioni di un sistema indeterminato.**
  - **Soluzione di un sistema indeterminato con Minima norma Euclidea.**

Inverse generalizzate di una matrice

Sia A una matrice (m×n) di rango r:

G (n×m) è detta un'*inversa generalizzata* di A $\Longleftrightarrow^{\text{def}}$ AGA = A

G esiste sempre, ma in generale potrebbe non essere unica.

A: quadrata ed invertibile $\Rightarrow$ $G = IGI = A^{-1}AGAA^{-1} = A^{-1}A\,A^{-1} = A^{-1}$

ciò porta al nome di inversa generalizzata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Esempio

```
A=[1 2;2 4;3 6]; G=[1 0 0;0 0 0]; AGA=A*G*A
AGA =
     1     2
     2     4
     3     6
```

G è un'*inversa generalizzata* di **A**

G è unica?

```
NA=null(sym(A));
syms a b c real
G1=G + NA*[a b c]
G1 =
[1 - 2*a, -2*b, -2*c]
[      a,    b,    c]
AG1A=A*G1*A
```

$\forall$a,b,c

```
AG1A =
     1     2
     2     4
     3     6
```

G1 *inversa generalizzata*

numero infinito di matrici **G1**

```
AG=A*G
AG =
     1     0     0
     2     0     0
     3     0     0
```

```
GA=G*A
GA =
     1     2
     0     0
```

Inverse generalizzate di una matrice
(g-inverse)

Teorema ABCD

Sia A una matrice m×n con rank(A)=r≤min{m,n}. Si dimostra che, **dopo un opportuno riordinamento delle sue righe e colonne**, A può essere scritta in forma partizionata come:

A **permutata** $$A = \begin{pmatrix} A_r & B \\ C & D \end{pmatrix}$$ dove

A_r è r×r ed invertibile,
B è r×(n−r),
C è (m−r)×r,
D è (m−r)×(n−r)

In tal caso $D = C A_r^{-1} B$; pertanto si ha:

$$A = \begin{pmatrix} A_r & B \\ C & CA_r^{-1}B \end{pmatrix}$$

Costruzione di un'inversa generalizzata

Sia A come nel Teor. ABCD, allora un'inversa generalizzata di A **permutata** è $G_{n\times m}$ di size (n×m):

$$G_{n\times m} = \begin{pmatrix} A_r^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$$

Inverse generalizzate di una matrice: esempio 1

La sottomatrice A_r non richiede un riordinamento delle righe e delle colonne di A

Teor. ABCD

1

```
A=sym([1 2 3;4 5 6;7 8 9]);
[m,n]=size(A);
r=rank(A)
r =
     2
S=rref(A)
S =
[1, 0, -1]
[0, 1,  2]
[0, 0,  0]
```

$$A = \begin{array}{cc} A_r & B \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) & \\ C & D \end{array}$$

2

```
Ar=A(1:r,1:r)
Ar =
[1, 2]
[4, 5]
rank(Ar)
ans =
     2
```

3

```
B=A(1:r, (r+1):n)
B =
3
6
C=A((r+1):m,1:r)
C =
[7, 8]
% D=C*inv(Ar)*B
D=C/Ar*B
D =
9
```

G: g-inverse

```
G=[inv(Ar) zeros(r,m-r); zeros(n-r,m)]
G =
[-5/3,  2/3, 0]
[ 4/3, -1/3, 0]
[   0,    0, 0]
all(all(isAlways(A*G*A == A)))   verifica
ans =
  logical
   1
```

unicità di G?

```
NA=null(A);    syms a b c real
G1=G + NA*[a b c];
all(all(isAlways(A*G1*A == A)))
ans =
  logical
   1
```

∞ g-inverse

Inverse generalizzate di una matrice: esempio 2

Teor. ABCD

... "opportuno riordinamento delle righe e colonne di A" ...

matrice simbolica o numerica

```
A=sym([1 2;1 2;1 1]);
[m,n]=size(A);
r=rank(A)
r =
     2
```

$r = n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
S=rref(A)
S =
[1, 0]
[0, 1]
[0, 0]
```

Le colonne 1 e 2 di A sono lin. ind., ma le righe 1 e 2 no

```
[~,~,Prow]=lu(A)
Prow =
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

matrice di permutazione

```
PA=Prow*A
PA =
[1, 2]
[1, 1]
[1, 2]
```

Ora le righe 1 e 2 di PA sono linearmente indipendenti

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A_r , C

```
Ar=PA(1:r,1:r)
Ar =
[1, 2]
[1, 1]
rank(Ar)
ans =
     2
```

```
G=[inv(Ar) zeros(r,m-r); zeros(n-r,m)]
G =
[-1,  2, 0]
[ 1, -1, 0]
all(all(isAlways(A*G*A == A)))
ans =
  logical
   0
```

G non è inversa generalizzata di A

```
all(all(isAlways(PA*G*PA == PA)))
ans =
  logical
   1
```

G è inversa generalizzata di PA

G è inversa generalizzata di PA

$\cancel{P_{row}} A G P_{row} A = \cancel{P_{row}} A$

$\Downarrow$

$\boxed{A(GP_{row})A = A}$

```
GP=G*Prow
GP =
[-1, 0,  2]
[ 1, 0, -1]
all(all(isAlways(A*GP*A == A)))
ans =
  logical
   1
```

permuta le colonne di G

GP è inversa generalizzata di A

Inverse generalizzate di una matrice: esempio 2 (cont.)

Algoritmo 1

matrice simbolica o numerica

Teor. ABCD

... "opportuno riordinamento delle righe e colonne di A" ...

1

```
A=sym([1 2;1 2;1 1]);
[m,n]=size(A); r=rank(A)
r =
     2
[~,~,Prow]=lu(A)
Prow =
  1     0     0
  0     0     1
  0     1     0
[~,~,Pcol]=lu(A')
Pcol =
     1     0
     0     1
```

matrice di permutazione delle righe

matrice di permutazione delle colonne

in realtà, qui non serve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice A permutata

2

```
PrAPc=Prow*A*Pcol
PrAPc =
[1, 2]
[1, 1]
[1, 2]
Ar=PrAPc(1:r,1:r)
Ar =
[1, 2]
[1, 1]
rank(Ar)
ans =
     2
```

sottomatrice Ar di rango r=2

G: g-inverse

```
G=[inv(Ar) zeros(r,m-r); zeros(n-r,m)]
G =
[-1,  2, 0]
[ 1, -1, 0]
all(all(isAlways(A*G*A == A)))
ans =
  logical
   0
all(all(isAlways(PrAPc*G*PrAPc == PrAPc)))
ans =
  logical
   1
```

verifica

G non è una g-inverse di A

G è una g-inverse della matrice permutata

g-inverse della matrice **A**

$$A^* \boxed{(P_{col} * G * P_{row})} * A = A$$

G è inversa generalizzata di $P_{row}*A*P_{col}$

$$\cancel{P_{row}} * A * P_{col} * G * P_{row} * A * \cancel{P_{col}} = \cancel{P_{row}} * A * \cancel{P_{col}}$$

(prof. M. Rizzardi)

Inverse generalizzate di una matrice: esempio 3

$\boxed{\text{Teor. ABCD}}$

… “opportuno riordinamento delle righe e colonne di A” …

Algoritmo 1

```
A=sym([4 8 4 -2;4 8 4 -2;-2 -4 -2 10]);
[m,n]=size(A)
m =
     3
n =
     4
r=rank(A)
r =
     2
[~,~,Prow]=lu(A)
Prow =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
[~,~,Pcol]=lu(A')
Pcol =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
```

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

in realtà, qui non serve

matrice A permutata

$\boxed{2}$

```
PrAPc=Prow*A*Pcol
PrAPc =
[ 8,  4, -2,  4]
[ 8,  4, -2,  4]
[-4, -2, 10, -2]
Ar=PrAPc(1:r,1:r)
Ar =
[8, 4]
[8, 4]
rank(Ar)
ans =
     1
```

la sottomatrice **Ar** non ha rango r=2

Algoritmo 1: NON SEMPRE VA BENE!

Inverse generalizzate di una matrice: esempio 3 (cont.)

Teor. ABCD

... "opportuno riordinamento delle righe e colonne di A" ...

```
A=[4 8 4 -2;4 8 4 -2;-2 -4 -2 10];
[m,n]=size(A)
m =
     3
n =
     4
r=rank(A)
r =
     2
[~,pCOL]=rref(A)
pCOL =
     1     4
AA=[A(:,pCOL) A(:,setdiff((1:n),pCOL))]
AA =
     4    -2     8     4
     4    -2     8     4
    -2    10    -4    -2
[~,pROW]=rref(AA')
pROW =
     1     3
AAA=[AA(pROW,:);AA(setdiff((1:m),pROW),:)]
AAA =
     4    -2     8     4
    -2    10    -4    -2
     4    -2     8     4
```

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

sintassi valida solo per matrici numeriche

le prime r=2 colonne sono linearmente indipendenti, ma non le prime r=2 righe

la sottomatrice Ar r×r ha rango 2

Algoritmo 2

```
[m,n]=size(A); r=rank(A);
[~,pCOL]=rref(A)
pCOL =
     1     4
Pcol=eye(n);
Pcol=[Pcol(:,pCOL) Pcol(:,setdiff((1:n),pCOL))]
Pcol =
     1 0 0 0
     0 0 1 0
     0 0 0 1
     0 1 0 0
[~,pROW]=rref(A')
pROW =
     1     3
Prow=eye(m);
Prow=[Prow(pROW,:);Prow(setdiff((1:m),pROW),:)]
Prow =
     1 0 0
     0 0 1
     0 1 0
PAP=Prow*A*Pcol; Ar=PAP(1:r,1:r)
Ar =
     4    -2
    -2    10
G=[inv(Ar) zeros(r,m-r); zeros(n-r,m)];
all(all(A* (Pcol*G*Prow) *A == A))
ans =
  logical
   1
```

solo per matrici numeriche (rref(A))

matrice di permutazione delle colonne

solo per matrici numeriche (rref(A'))

matrice di permutazione delle righe

la sottomatrice Ar r×r ha rango 2

(Pcol*G*Prow): g-inverse di A

Esercizio

Calcolare un'inversa generalizzata di

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

e di **`diag(diag(A))`**

Altri tipi di inverse generalizzate: matrice pseudoinversa (inversa di Moore-Penrose)

A matrice reale* (m×n) di rango r:

* per matrici complesse, sostituire T con H

Una matrice B (n×m) è detta pseudoinversa of A, e denotata da $B=A^+$, se B soddisfa le seguenti quattro condizioni:

(1) ABA = A (B è un'inversa generalizzata di A)

(2) BAB = B (A è un'inversa generalizzata di B)

B è un'inversa generalizzata riflessiva di A

(3) $(AB)^T = AB$ (AB è simmetrica)

(4) $(BA)^T = BA$ (BA è simmetrica)

def ⇒ $B=A^+$ e $A=B^+$

Teorema dell'inversa di Penrose

Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la pseudoinversa di A, A^+, esiste sempre ed è unica.

La funzione MATLAB **pinv()** usa la fattorizzazione SVD per la pseudoinversa A^+ di A:

$$A = U\Sigma V^T = U\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \Rightarrow \Sigma^+ = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^+ = V\Sigma^+ U^T}$$

Pseudoinversa: esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

È A_p, l'inversa di Moore-Penrose di **A**, calcolata mediante SVD?

```
A=[1 2 0; 0 1 1];
```

```
[U,S,V]=svd(A);
```

o

```
[U,S,V]=svd(A,'econ');
```

o

```
[U,S,V]=svd(A,0);
Sp=[inv(S(:,1:2));zeros(1,2)]
Ap=V*Sp*U'
Ap =
   0.33333     -0.33333
   0.33333      0.16667
  -0.33333      0.83333
```

pseudo-inversa

```
[U,S,V]=svd(A,0); S
S =
     2.4495        0        0
     0             1        0
```

```
pinv(A)
ans =
   0.33333     -0.33333
   0.33333      0.16667
  -0.33333      0.83333
```

uguali

```
[U,S,V]=svd(A);
Sp=[diag(diag(S(:,1:2)).^(-1)); zeros(1,2)]
Ap=V*Sp*U'
Ap =
   0.33333     -0.33333
   0.33333      0.16667
  -0.33333      0.83333
```

nessuna inversa è calcolata perché **S** è una matrice diagonale

Pseudoinversa: esempio 2

```
A=sym([1 2 3;4 5 6;7 8 9]);
rank(A)
ans =
     2
```

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

Ps è l'inversa di Moore-Penrose di A

```
Ps=pinv(A);
all(all(isAlways(A*Ps*A == A)))
ans =
  logical       (1)      OK
   1
all(all(isAlways(Ps*A*Ps == Ps)))
ans =
  logical       (2)      OK
   1
all(all(isAlways((A*Ps)' == A*Ps)))
ans =
  logical       (3)      OK
   1
all(all(isAlways((Ps*A)' == Ps*A)))
ans =
  logical       (4)      OK
   1
```

G è un'inversa generalizzata di A

```
S=rref(A)... Ar=A(1:2,1:2);
G=[inv(Ar) zeros(r,n-r); zeros(m-r,n)]
G =
[-5/3,  2/3, 0]
[ 4/3, -1/3, 0]
[   0,    0, 0]
```

G è la pseudoinversa di A?

```
all(all(isAlways(A*G*A == A)))
ans =
  logical       (1)      OK
   1
all(all(isAlways(G*A*G == G)))
ans =
  logical       (2)      OK
   1
all(all(isAlways((A*G)' == A*G)))
ans =
  logical       (3)      NO
   0
all(all(isAlways((G*A)' == G*A)))
ans =
  logical       (4)      NO
   0
```

unicità di Ps: P1 non è inversa di Moore-Penrose di A

```
NA=null(A); syms a b c real
assumeAlso(a>0 & b>0 & c>0)
P1=Ps + NA*[a b c];                      ∀a,b,c
all(all(isAlways(A*P1*A == A)))
ans = logical              (1), (3)   OK
       1
eig(P1*A*P1-P1)'
ans =
[0, 0, 2*b - a - c]        (2)        NO
all(all(isAlways((P1*A)' == P1*A)))
ans = logical              (4)        NO
       0
```

Altri tipi di inverse generalizzate: inversa sinistra o destra (one-sided inverses)

Sia A una matrice (m×n) di rango r:

C matrice (n×m) è detta **inversa destra** di A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $AC = I_m$

B matrice (n×m) è detta **inversa sinistra** di A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $BA = I_n$

Se A ha sia un'inversa destra che un'inversa sinistra, allora A è quadrata e invertibile.

per matrici a rango massimo

Teor. (esistenza ⇔ suriettività)

Il sistema $Ax=b$ ammette almeno una soluzione x per ogni b se, e solo se, $\mathscr{R}(A)=\mathbb{R}^m$ (cioè r=m). Ciò è possibile solo quando m≤n.

In questo caso esiste una matrice **inversa destra** C: $C = A^T\left(AA^T\right)^{-1}$

Teor. (unicità ⇔ iniettività)

Se il sistema $Ax=b$ è compatibile, esso ha al più una soluzione x per ogni b se, e solo se, $\mathscr{R}(A^T)=\mathbb{R}^n$ (cioè r=n). Ciò è possibile solo se n≤m. In questo caso esiste una sola matrice **inversa sinistra** B:

$$B = \left(A^TA\right)^{-1}A^T$$

Se m=n=r, i due teoremi assicurano l'esistenza e l'unicità di A^{-1}.

(prof. M. Rizzardi)

Inverse destre di una matrice a rango massimo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ rango = 2 = m < n $\Rightarrow$ $\exists$ matrice inversa destra C:

$$\boxed{A}\ \boxed{C} = \boxed{I_2}$$

2 sistemi lineari

$$\begin{pmatrix}A & I_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

coefficienti — termini noti

$\boxed{AC=I_2}$ $\Leftrightarrow$ sistema multiplo indeterminato

2 sistemi indeterminati

$$\begin{cases}x_1+2x_2 = 1\\ x_2+x_3 = 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1+2x_2 = 0\\ x_2+x_3 = 1\end{cases}$$

variabile libera

$$\begin{cases}2x_2 = 1-x_1\\ x_3 = 0-x_2\end{cases}\qquad \begin{cases}2x_2 = 0-x_1\\ x_3 = 1-x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x_1\\ x_3 = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_1\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 = 0-\tfrac{1}{2}x_1\\ x_3 = 1+\tfrac{1}{2}x_1\end{cases}$$

soluzioni particolari $x_1=0$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

soluzioni generali

```
A=[1 2 0; 0 1 1];
[m,n]=size(A);
format rational
xp=A\eye(2)
xp =
       0             0
       1/2           0
      -1/2           1
xn=null(A,"rational")
xn =
       2
      -1
       1
syms a b real
C=xp + xn*[a b]
C =
[     2*a,    2*b]
[1/2 - a,      -b]
[a - 1/2, b + 1]
disp(A*C)
[1, 0]
[0, 1]
```

xp: soluzioni particolari

soluzione sistema omogeneo

$\mathcal{N}(A)=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$

C: inversa destra generale

```
disp(A*xp)
            1          0
-1.1102e-16          1
```

xp: inversa destra particolare

Come sono le pseudoinverse di matrici a rango max?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad AX_p=I_2\quad X_p=\begin{bmatrix}0&0\\\frac12&0\\-\frac12&1\end{bmatrix}\quad AC=I_2\quad C=\left(\begin{pmatrix}0\\\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

X_p: inversa destra particolare — C: inversa destra generale

Esercizio: Verificare che X_p non è la pseudoinversa di A.

Si decompongano le colonne di X_p lungo $\boxed{\mathcal{R}(A^T)}$ e lungo $\boxed{\mathcal{N}(A)}$ mantenendo solo quelle in $\mathcal{R}(A^T)$

$\mathcal{R}(A^T)\oplus\mathcal{N}(A)=\mathbb{R}^3$ $\quad X_p=\boxed{X_r}+X_n$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\\frac12&0\\-\frac12&1\end{pmatrix}$$

cambiamento di base di $\mathbb{R}^3$

```
Xp=sym(xp);
NA=sym(xn);
coef=[A' NA]\Xp
coef =
[ 1/3, -1/3]
[-1/3,  5/6]
[ 1/3, -5/6]
Xr=A'*coef(1:2,:)
Xr =
[ 1/3, -1/3]
[ 1/3,  1/6]
[-1/3,  5/6]
A'*inv(A*A')
ans =
[ 1/3, -1/3]
[ 1/3,  1/6]
[-1/3,  5/6]
A'/(A*A')
ans =
[ 1/3, -1/3]
[ 1/3,  1/6]
[-1/3,  5/6]
```

o equivalentemente con la proiezione ortogonale su $\mathcal{R}(A^T)$

```
RAT=orth(A');   base orto-normale
Po=RAT*RAT';
Xr=Po*Xp
Xr =
[ 1/3, -1/3]
[ 1/3,  1/6]
[-1/3,  5/6]
```

Se r=m<n una **pseudoinversa destra** C è:

$$C=A^T\left(AA^T\right)^{-1}$$

essendo AA^T invertibile.

Se r=n<m una **pseudoinversa sinistra** B è:

$$B=\left(A^TA\right)^{-1}A^T$$

essendo A^TA invertibile.

```
all(all(isAlways(A*Xr*A == A)))
ans =  logical
   1                (1)      OK
all(all(isAlways(Xr*A*Xr == Xr)))
ans =  logical
   1                (2)      OK
all(all(isAlways((A*Xr)' == A*Xr)))
ans =  logical
   1                (3)      OK
all(all(isAlways((Xr*A)' == Xr*A)))
ans =  logical
   1                (4)      OK
```

Xr è la pseudoinversa destra di A

Inverse sinistre di una matrice a rango massimo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ rango = 2 = n < m $\Rightarrow$ ∃ matrice inversa sinistra B: $\boxed{B}\,\boxed{A} = \boxed{\mathbf{I}_3}$

$BA = I_2 \Leftrightarrow (BA)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} = I_2$ $\boxed{A^{\mathsf{T}}}\,\boxed{B^{\mathsf{T}}} = \boxed{\mathbf{I}_2}$

2 sistemi lineari

$\Leftrightarrow$ $\boxed{A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} = I_2}$ sistema multiplo indeterminato $\begin{pmatrix}A^{\mathsf{T}} & I_2\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$

coefficienti | termini noti

Esercizio

Applicare a A^{T} l'algoritmo dell'esempio precedente per calcolare una matrice particolare X_p e la forma generale delle inverse sinistre della matrice A (3×2).

Calcolare anche la pseudoinversa sinistra di A come proiezione ortogonale di X_p su $\mathscr{R}(A^{\mathsf{T}})$, confrontandola con B:

Se r=n<m una **pseudoinversa sinistra** B è:

$$B = \left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1}A^{\mathsf{T}}$$

essendo $A^{\mathsf{T}}A$ invertibile.

Sistemi lineari indeterminati

un sistema $Ax=b$ di equazioni lineari è detto **indeterminato** se ci sono più incognite che equazioni, in contrapposizione ad un **sistema sovradeterminato**, dove ci sono più equazioni che incognite.

Un **sistema lineare indeterminato** può avere **nessuna soluzione** oppure **infinite soluzioni**.

Esempio: 3 incognite, 2 equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \text{infinite soluzioni}$$

Teorema di Rouché–Capelli: per la **compatibilità** del **sistema**

$$\text{rank}(\boxed{A}) = \text{rank}(\boxed{[A\ b]})$$

matrice dei coefficienti

matrice aumentata o completa

Soluzione con Minima norma Euclidea di un sistema indeterminato $Mx = y, \quad M(r \times c)$

r: num colonne
c: num righe

$\mathscr{R}(M^{\mathsf{T}}) \oplus \mathscr{N}(M) = \mathbb{R}^c \qquad \mathscr{R}(M^{\mathsf{T}}) = \mathscr{N}(M)^{\perp} \qquad \mathscr{N}(M) = \mathscr{R}(M^{\mathsf{T}})^{\perp}$

La soluzione generale x del sistema indeterminato compatibile $Mx=y$ è data da:

$$X = \{x : Mx = y\} = \{x = x_p + z : Mx_p = y \ \wedge \ z \in \mathscr{N}(M)\}$$

x_p: una qualsiasi soluzione particolare

Spazio Nullo di M

Teorema

è unica

soluzione di minima norma: $\|x_{LN}\|_2 = \min\limits_{x:Mx=y} \|x\|_2 \Leftrightarrow \boxed{x_{LN}} \in \mathscr{R}(M^{\mathsf{T}}) \cap X$

Se rank$(M) = c < r$ (massimo): $\Rightarrow$ $\mathscr{N}(M) = \{\underline{0}\}$ $\Rightarrow$ $\exists ! x = x_{LN} : Mx = y$

sistema determinato $\qquad x_{LN} = \left[(M^{\mathsf{T}} M)^{-1} M^{\mathsf{T}}\right] y \qquad$ pseudoinversa sinistra di M

Se rank$(M) = r < c$ (massimo): $\Rightarrow$ dim$[\mathscr{N}(M)] = c - r > 0$

sistema indeterminato $\qquad x_{LN} = \left[M^{\mathsf{T}} (M M^{\mathsf{T}})^{-1}\right] y \qquad$ pseudoinversa destra di M

Se rank$(M) = k < \min\{r,c\}$ (non massimo): $\Rightarrow$ sistema indeterminato

x_{LN} è la proiezione ortogonale di x_p su $\mathscr{R}(M^{\mathsf{T}}) = \mathscr{N}(M)^{\perp}$

Esempi: risolvere sistemi indeterminati

$$X=\{x: Mx=y\}=\{x=x_p+z : Mx_p=y \ \wedge \ z\in\mathcal{N}(M)\}$$

soluzione generale

soluzione di minima norma 2 $\|x_{LN}\|_2=\min_{x:Mx=y}\|x\|_2 \Leftrightarrow x_{LN}\in\mathcal{R}(M^\top)$

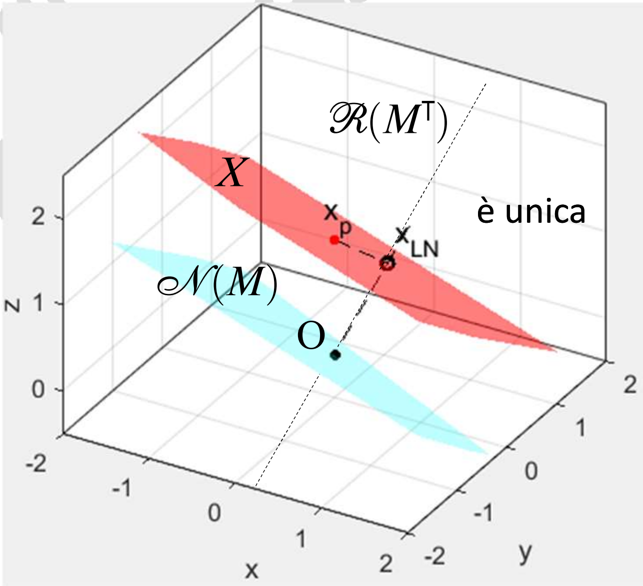
matrice rettangolare

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

rank(M)=1 < r=2 < c=3

```
M=[1 1;2 2;3 3]'; y=[4;4];
xp=M\y;      % soluzione particolare
N=null(M)  % base per lo Spazio Nullo
syms a b real; n=N*[a;b]; X=xp + n;
RMT=orth(M');  % base ortonormale di R(M^T)
P=RMT*RMT';  % matrice di proiezione ortogonale
Pxp=P*xp;      % proiezione di xp su R(M^T)
xLN=pinv(M)*y;
disp([norm(xLN) norm(Pxp) norm(xp)])
       1.069     =     1.069     <     1.3333
```

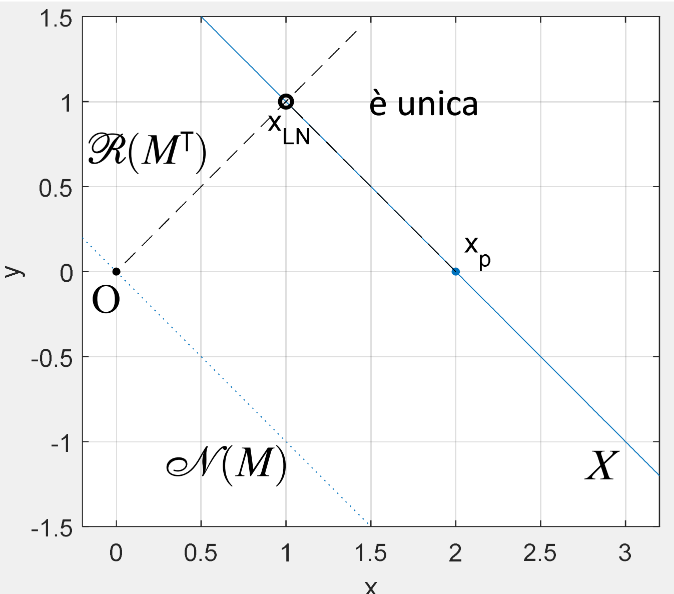


$$M=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

rank(M)=1 < c=2 < r=3

```
M=[1 1;2 2;3 3]; y=[2;4;6];
xp=M\y;      % soluzione particolare
N=null(M)  % base per lo Spazio Nullo
syms a real; n=N*a; X=xp + n;
RMT=orth(M');  % base ortonormale di R(M^T)
P=RMT*RMT';  % matrice di proiezione ortogonale
Pxp=P*xp;      % proiezione di xp su R(M^T)
xLN=pinv(M)*y;
disp([norm(xLN) norm(Pxp) norm(xp)])
       1.4142    =     1.4142     <       2
```



Esempi: risolvere sistemi indeterminati

$$X=\{x: Mx=y\}=\{x=x_p+z: Mx_p=y \ \wedge \ z\in\mathcal{N}(M)\}$$

soluzione generale

$$M=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&3&9\\2&2&8\end{pmatrix} \quad y=\begin{pmatrix}6\\7\\6\end{pmatrix}$$

rank(M)=2 < r=c=3

matrice quadrata singolare

soluzione di minima norma 2 $\|x_{LN}\|_2=\min\limits_{x:Mx=y}\|x\|_2 \Leftrightarrow x_{LN}\in\mathcal{R}(M^T)$

```
M=[1 4 7;2 3 9;2 2 8]; y=[6;7;6];
xp=M\y      % soluzione particolare
Warning: Matrix is singular to working precision.
xp =
   NaN
   NaN
   NaN
```

???

```
[m,n]=size(M)
m =
     3
n =
     3
rank(M)
ans =
     2
```

```
rank([M y])
ans =
     2
```

sistema compatibile indeterminato

per risolvere il sistema usa la fattoriz. P*M=L*U

```
[L,U,P]=lu(M)
L =
           1           0           0
         0.5           1           0
           1        -0.4           1
U =
           2           3           9
           0         2.5         2.5
           0           0           0
P =
     0     1     0
     1     0     0
     0     0     1
```

1) risolve L*w=P*y

2) risolve U(1:r)*xp=w(1:r)

```
w=L\(P*y)
w =
           7
         2.5
           0
```

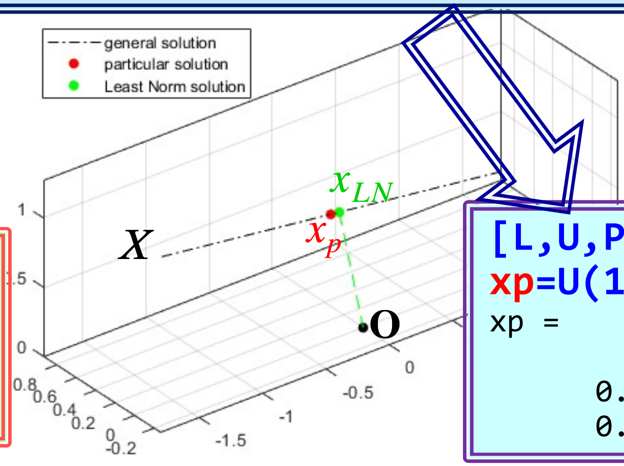
```
xp=U(1:r,:)\w(1:r)
xp =
           0
     0.33333
     0.66667
```

soluzione particolare

soluzione generale del sistema

```
N=null(A)
N =
    -0.90453
    -0.30151
     0.30151
syms a [n-r 1] real
Xg=xp + N*a
Xg =
  -(3*11^(1/2)*a1)/11
1/3 - (11^(1/2)*a1)/11
(11^(1/2)*a1)/11 + 2/3
```

soluzione generale




```
[L,U,P]=lu([M y]);
xp=U(1:r,1:n)\U(1:r,n+1)
xp =
           0
     0.33333
     0.66667
```

1) + 2)

soluzione Least Norm

```
RMT=orth(M'); P=RMT*RMT'; Pxp=P*xp;
xLN=pinv(M)*y;
disp([norm(xLN) norm(Pxp) norm(xp)])
     0.73855   =   0.73855   <   0.74536
```