Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_05b

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - **Esempi di trasf. lineari 2D** (scaling uniforme e non uniforme, simmetria, rotazione, particolari shear, traslazione in coordinate omogenee, roto-traslazione, proiezione ortogonale su una retta).
  - **Fattorizzazione di una 2D t_A in trasf. lineari elementari.**
  - **Esempi di trasf. lineari 3D** (scaling uniforme e non uniforme, rotazione propria ed impropria, simmetrie e loro proprietà, proiezione ortogonale su di una retta e su di un piano).
  - **Proprietà di una matrice ortogonale.**

Trasformazioni Lineari elementari 2D

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

(t_A automorfismo)

Omotetia radiale di fattore ρ centrata in O
(o **scaling uniforme** o **scaling isotropico**)

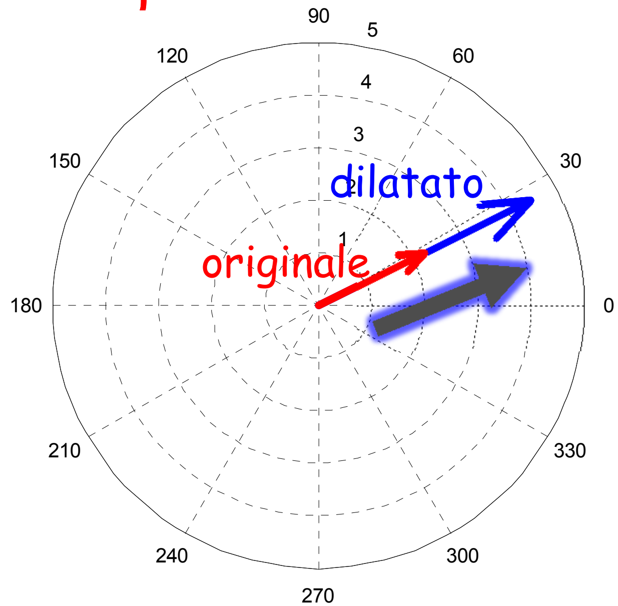
$0 < \rho < 1$ contrazione

$1 < \rho$ dilatazione

Esempio: omotetia di fattore $\rho=2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
rho=2; A=rho*eye(2);
x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3)
hold on; axis('tight')
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```



Trasformazioni Lineari elementari 2D

$$t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \rho, \eta \in \mathbb{R} \quad \rho, \eta \neq 0$$

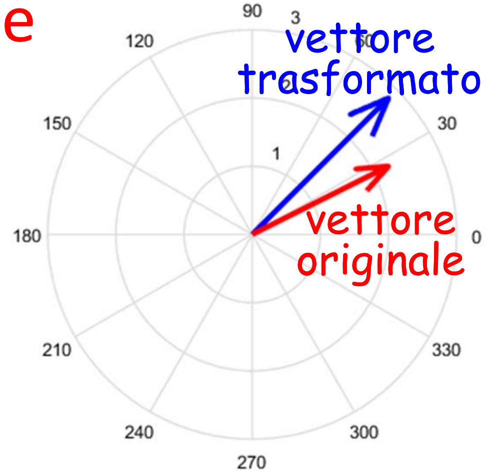
(t_A automorfismo)

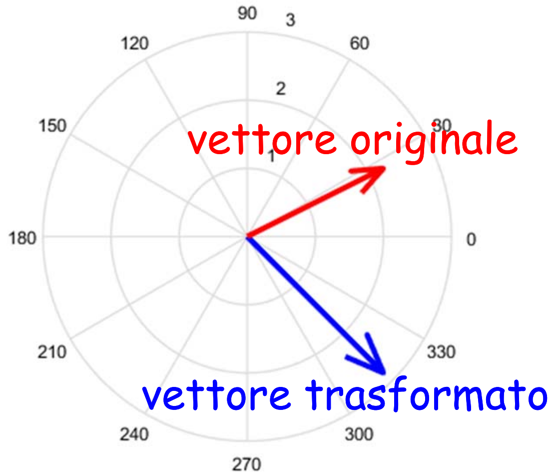
Scaling non uniforme (o **scaling anisotropo**) centrato in O

Esempi: scaling non uniforme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A=diag([1 2]);
x=[2 1]'; y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3); hold on
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```






```
A=diag([1 -2]);
x=[2 1]'; y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3); hold on
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```

Cosa fa questa matrice?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(prof. M. Rizzardi)

Particolari simmetrie descritte da scaling non uniforme

(o riflessioni)

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

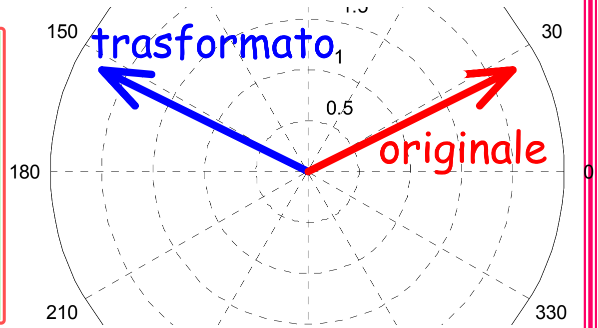
Riflessione elementare rispetto all'asse y

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
disp(det(A))
-1
```

```
disp(eig(A))
    -1
     1
```

```
A=diag([-1 1]);
x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3)
hold on; axis('tight')
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```



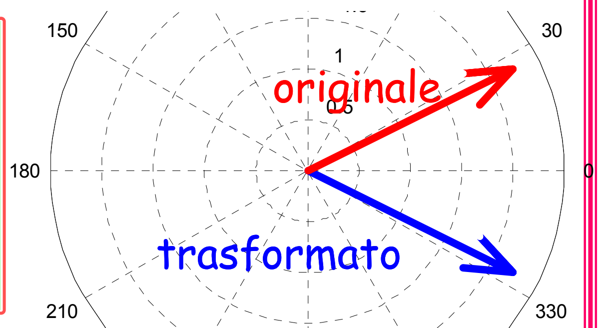
Riflessione elementare rispetto all'asse x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
disp(det(A))
-1
```

```
disp(eig(A))
    -1
     1
```

```
A=diag([1 -1]);
x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3)
hold on; axis('tight')
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```



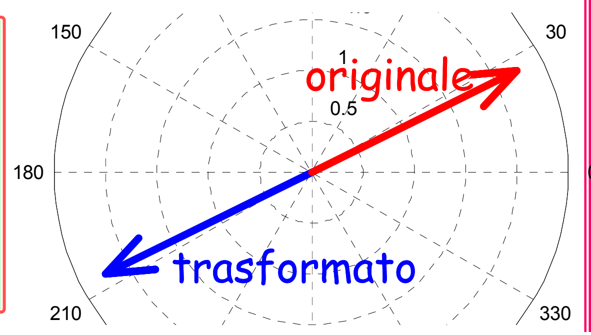
Riflessione rispetto all'origine (le due precedenti combinate insieme)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
disp(det(A))
 1
```

```
disp(eig(A))
    -1
    -1
```

```
A=diag([-1 -1]);
x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b');
set(h,'LineWidth',3)
hold on; axis('tight')
h=compass(x(1),x(2),'r');
set(h,'LineWidth',3)
```

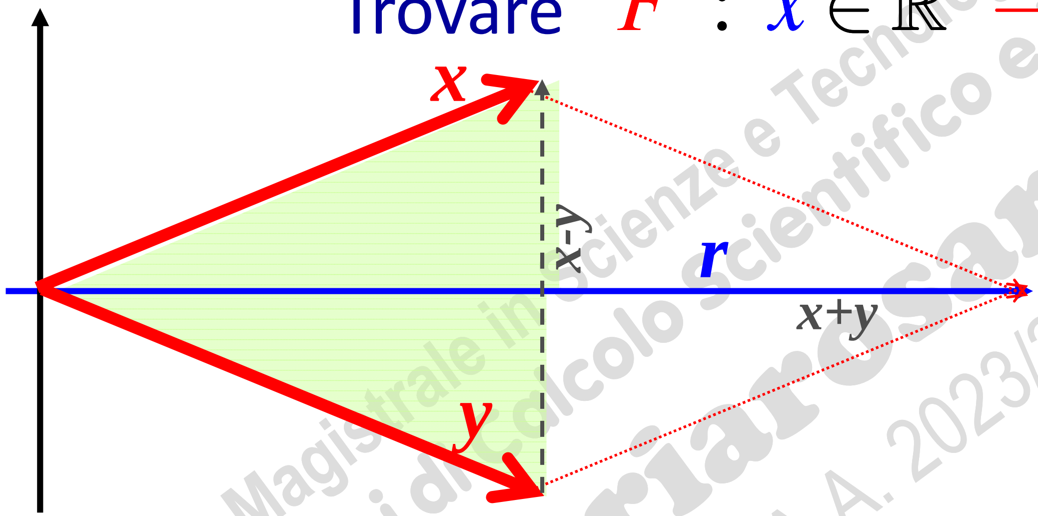


Esempio: Costruire* l'automorfismo di $\mathbb{R}^2$ corrispondente alla Simmetria Ortogonale rispetto all'asse delle ascisse:

$$r = \mathrm{span}\{a\} = \mathrm{span}\{(1,0)^T\}.$$

* L'abbiamo già determinato come (scaling non unif.) t_A dove A è la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Trovare $F : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y \in \mathbb{R}^2$ tale che



Proprietà $\begin{cases} x + y \in r \\ x - y \perp r \\ \|x\| = \|y\| \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \left\langle x - y, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \end{cases}$$

$$F = t_A \ : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} \boxed{x + y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}} \\ \boxed{\left\langle x - y, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0} \\ \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x_1 + y_1 = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ x_2 + y_2 = 0 \end{matrix}} \\ \boxed{x_1 - y_1 = 0} \\ \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -x_2 \\ x_1 - y_1 = 0 \\ \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 x_1 \\ -1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

simmetria ortogonale
risp. all'asse x A

```
a=[1 0]'; syms lambda real
syms x y [2 1] real
P1=x+y-lambda*a;    P2=a'*(x-y);
Y=solve(P2,P1(2),y1,y2);
y=[Y.y1;Y.y2]
y             %  y = A*x = x1*A(:,1) + x2*A(:,2)
  x1          %  y = A*x = x1* [1]   + x2* [ 0]
 -x2          %                [0]   +     [-1]
A=zeros(2); trova la matrice di trasformazione
for k=1:2
    if simplify(symvar(y(k)) == x1)
        A(k,1)=y(k)/x1;
    end
    if simplify(symvar(y(k)) == x2)
        A(k,2)=y(k)/x2;
    end
end
A
 A =
     1     0
     0    -1
```

algoritmo più generale

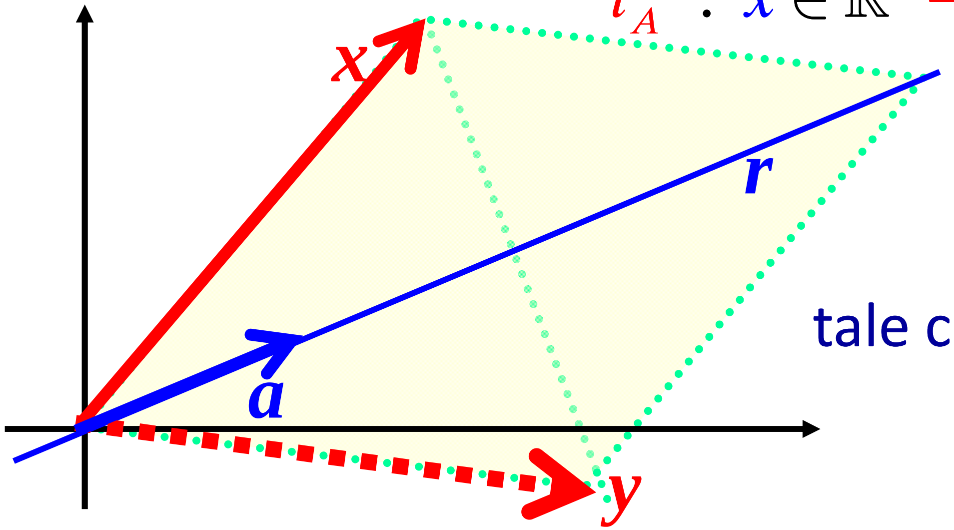
```
A=zeros(2);      trova la matrice di trasformazione
for k=1:2
    [c,t]=coeffs(y(k));
    for j=1:numel(t)
        if string(t(j)) == string(x(1))
            A(k,1)=c(j);
        end
        if string(t(j)) == string(x(2))
            A(k,2)=c(j);
        end
    end
end
```

Lab.: simmetria ortogonale rispetto ad una retta generica

$r = \mathrm{span}\{a\}$, $a \in \mathbb{R}^n$

come costruire la matrice A della trasformazione

$$t_A : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) \in \mathbb{R}^2, \quad A(2\times 2)$$



tale che $\begin{cases} x+y \in r \\ x-y \perp r \\ \boxed{\|x\| = \|y\| \text{ non usata}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \lambda a \\ \langle x-y, a\rangle = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \lambda a - x \\ \langle 2x - \lambda a, a\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda a - x \\ 2\langle x, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}$$

$$\Rightarrow y = 2a\frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2} - x = \frac{2}{\|a\|_2^2} aa^{\mathrm{T}} \boxed{x} - \boxed{x} = \left(\frac{2}{\|a\|_2^2} aa^{\mathrm{T}} - I_2\right)\boxed{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{2}{\|a\|_2^2} aa^{\mathrm{T}} - I_2\right)}$$

Esercizio

Chi sono $\mathcal{N}$(A), $\mathcal{R}$(A$^{\mathrm{T}}$), $\mathcal{N}$(A$^{\mathrm{T}}$) and $\mathcal{R}$(A)?

t_A è un automofismo?

Lab. MATLAB: simmetria rispetto alla retta r

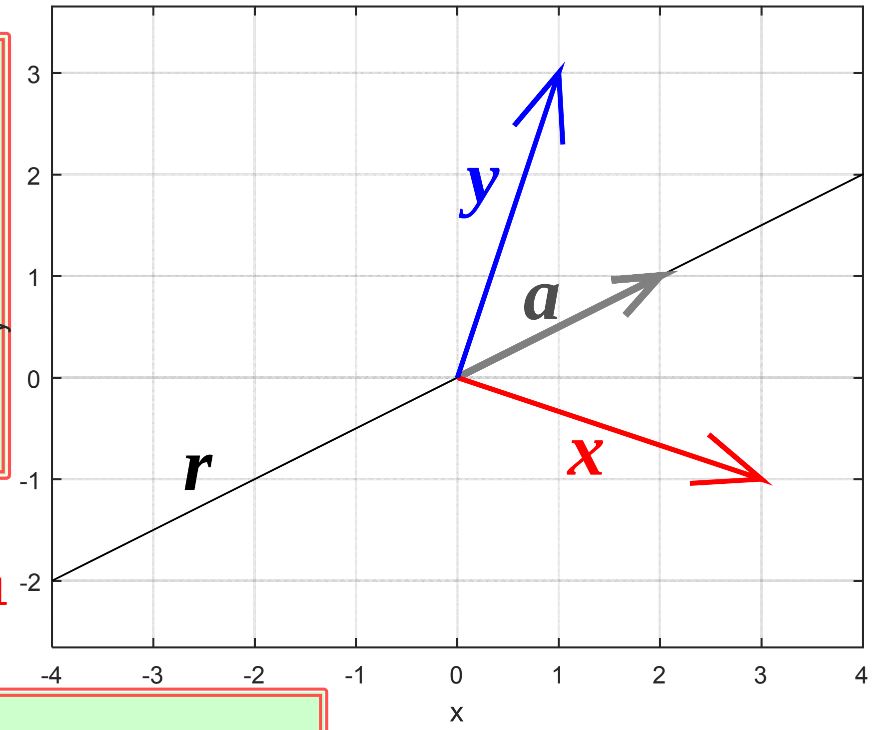
$$r = \text{span}\{a\} \quad : \quad a = (2,1)^T$$

Che proprietà caratterizzano la matrice della simmetria 2D?

Per questo esempio

```
a=[2 1]'; syms t real; r=t*a;
fplot(r(1),r(2),[-2 2]); hold on
compass(a(1),a(2))
x=[3 -1]'; compass(x(1),x(2),'r')
A = 2/norm(a)^2*a*a'-eye(size(a,1))
A =
          0.6            0.8
          0.8           -0.6
y = A*x; compass(y(1),y(2),'b')
```

simmetrica




```
disp(det(A))
-1
```

il determinante di A è uguale a -1

```
disp(eig(A))
    -1
     1
```

gli autovalori sono -1, 1

```
disp(A*A)
            1   -3.8858e-16
  -3.8858e-16             1
```

la matrice coincide con la sua inversa

```
disp(A'*A)
            1   -3.8858e-16
  -3.8858e-16             1
```

```
disp(A*A')
            1   -3.8858e-16
  -3.8858e-16             1
```

è una matrice ortogonale

Proprietà delle matrici di simmetria 2D

rispetto ad una retta

matrice di simmetria
rispetto ad una retta span{a}

$$A = \frac{2}{\|a\|_2^2} aa^\top - I_2$$

1. La matrice della simmetria è simmetrica.

2. L'inversa di una simmetria è la simmetria stessa

Dim.:

$$A \cdot A = \left[\frac{2}{\|a\|_2^2} aa^\top - I_2\right]\left[\frac{2}{\|a\|_2^2} aa^\top - I_2\right] = \frac{4}{\|a\|_2^{\cancel{4}\,2}} a\left[\cancel{a^\top a}\right]a^\top - \frac{4}{\|a\|_2^2} aa^\top + I_2 =$$

$$= \frac{4}{\|a\|_2^{\cancel{4}\,2}} a\left(\cancel{a^\top a}\right)a^\top - \frac{4}{\|a\|_2^2} aa^\top + I_2 = I_2$$

$\boxed{a^\top a = \|a\|^2}$

3. La matrice della simmetria è ortogonale.

4. Il determinante è -1 e gli autovalori sono −1, +1.

Nota

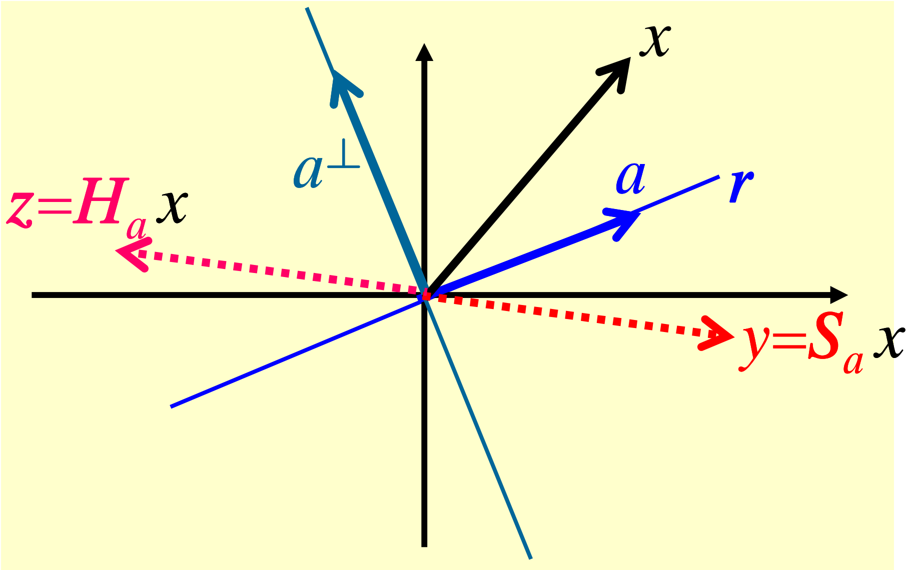
La matrice di una simmetria rispetto all retta $r = \text{span}\{a\}$

$$\boxed{S(a) = \frac{2}{\|a\|^2} aa^{\top} - I_2}$$

è diversa dalla seguente matrice:

$$\boxed{H(a) = I_2 - \frac{2}{\|a\|^2} aa^{\top}}$$

(Riflettore di Householder)



$$\boxed{H(a) = -S(a)}$$

$H(a)$ rappresenta una simmetria ortogonale rispetto alla retta: $t = \text{span}\{a^{\perp}\}$

Riflettore di Householder

Una sequenza di riflettori di Householder è usata nell'algoritmo della fattorizzazione A=QR per produrre la matrice triangolare superiore R a partire da una matrice A.

Per esempio, volendo azzerare tutte le componenti di un vettore x tranne la k-sima, si sceglie

$$\boxed{a = x + \|x\|_2\, e_k}$$

dove e_k è il versore dell'asse k-simo, cioè $e_k = (0,\dots,0,\overset{k}{1},0,\dots,0)^\mathsf{T}$.

Si costruisce poi la matrice H $\quad H(a) = I_2 - \dfrac{2}{\|a\|^2}\, a a^\mathsf{T}$

In Hx sono azzerate tutte le componenti di x tranne la k-sima.

```
pH=@(a) sym(eye(numel(a)))-2/norm(a)^2*a*a'; x=sym([2 1 3 -2]');
e=sym([1 0 0 0]'); a = x+norm(x)*e; H=pH(a); y1=simplify(H*x)
y1 =
-3*2^(1/2)        solo la 1a componente è non nulla
         0
         0
         0
e=sym([0 0 1 0]'); a = x+norm(x)*e; H=pH(a); y3=simplify(H*x)
y3 =
         0
         0
-3*2^(1/2)        solo la 3a componente è non nulla
         0
```

Trasformazioni Lineari elementari 2D

$$t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ rotazione attorno ad O di un angolo θ

È usata nella funzione grafica “rotate”

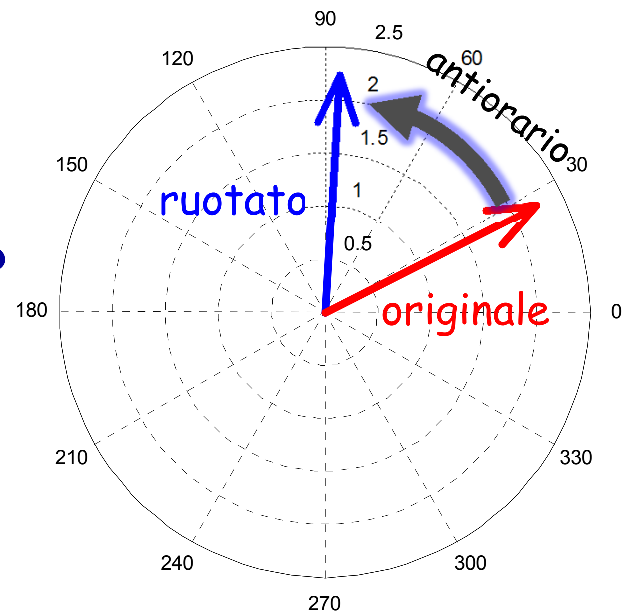
Esempio: Rotazione in $\mathbb{R}^2$ di angolo $\theta = \pi/3$ (automorfismo)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$\theta \geq 0$: antiorario
$\theta < 0$: orario

come agisce sui vettori?

```
theta=pi/3; c=cos(theta); s=sin(theta);
A=[c -s;s c];
x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b'); set(h,'LineWidth',3)
hold on; axis('tight')
h=compass(x(1),x(2),'r'); set(h,'LineWidth',3)
```



Proprietà di una matrice di rotazione 2D

rotazione

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \cos^2 + \sin^2 = 1$

$A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ $\quad A$: matrice ortogonale

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'inversa della rotazione di θ è la rotazione di un angolo $-\theta$

$$A = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ $\quad A$: matrice ortogonale

$\det(A) = -1$

Non è solo una rotazione 2D

matrice ortogonale $\Longleftrightarrow$ $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$, $\det(A) = \pm 1$

ricorda che: $\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}})$

... perché? dimostrarlo.

$$A \text{ ortogonale} \begin{cases} \det(A) = +1 \Rightarrow \text{rotazione propria} \\ \det(A) = -1 \Rightarrow \text{rotazione impropria (rotazione + simmetria)} \end{cases}$$

Trasformazioni Lineari elementari 2D

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

***r* fattore di shear**

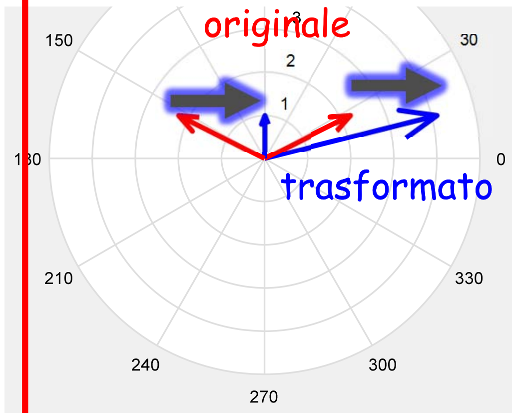
Shear orizzontale o scorrimento angolare orizzontale

Esempio: shear orizz. in $\mathbb{R}^2$ (automorfismo)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1

```
A=[1 2;0 1]; x=[2 1]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b'); set(h, …
h=compass(x(1),x(2),'r'); set(h, …
x=[-2 1]';  y=A*x; …
```



2

```
A=[1 2;0 1]; x=[5 0]'; y=A*x
y =
     5
     0
```

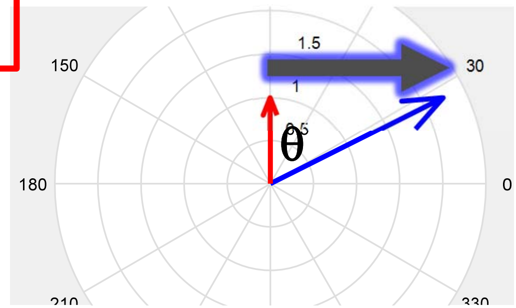
un vettore orizzontale rimane immutato

3

```
A=[1 2;0 1]; x=[0 1]';  y=A*x
y =
     2
     1
```

la freccia di un vettore verticale è spostata orizzontalmente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tan(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



4

```
th=acos(dot(x,y)/(norm(x)*norm(y))); disp(tan(th))
```

2

interpretazione geometrica di *r*: $r = \tan(\theta)$

Trasformazioni Lineari elementari 2D

$$t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

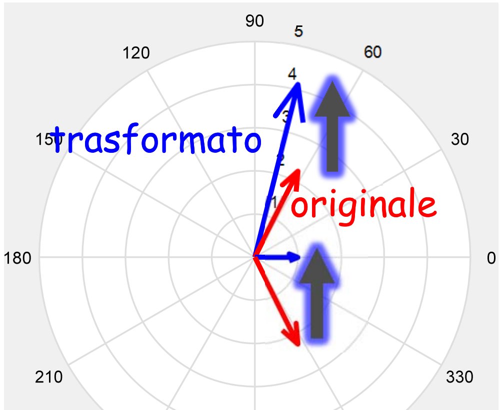
r fattore di shear

Shear verticale o scorrimento angolare verticale

Esempio: shear vertic. in $\mathbb{R}^2$ (automorfismo)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

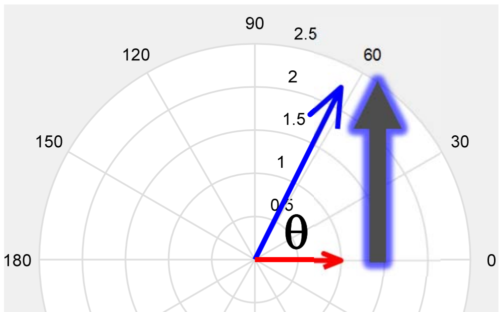
1
```
A=[1 0;2 1]; x=[1 2]';  y=A*x;
h=compass(y(1),y(2),'b'); set(h, …
h=compass(x(1),x(2),'r'); set(h, …
x=[1 -2]';  y=A*x; …
```



2
```
A=[1 0;2 1]; x=[0 5]'; y=A*x
y =
      0
      5
```
un vettore verticale rimane immutato

3
```
A=[1 0;2 1]; x=[1 0]';  y=A*x
y =
      1
      2
```
la freccia di un vettore orizzontale è spostata verticalmente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$



4
```
th=acos(dot(x,y)/(norm(x)*norm(y))); disp(tan(th))
```
2 interpretazione geometrica di ***r***: ***r*** = tan(θ)

(prof. M. Rizzardi)

La traslazione non è una trasf. lineare

Esempio

$$T \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Non esiste nessuna matrice $\boldsymbol{A}(2 \times 2)$ tale che $y = T(x) = \boldsymbol{A}x$

Ma T può scriversi come: $y = T(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = Ix + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$y = \boldsymbol{A}x + v$$

$$\boxed{F \quad : \quad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = \boldsymbol{A}x + v \in \mathbb{R}^m}$$

Forma matriciale di una trasformazione affine di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

La traslazione è una trasformazione affine

Coordinate omogenee

Una traslazione in $\mathbb{R}^n$ diventa una trasformazione lineare (in $\mathbb{R}^{n+1}$) se si usano le coordinate omogenee.

Esempio: coordinate omogenee in $\mathbb{R}^2$

$$P \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X_1}{X_3} \\ x_2 = \dfrac{X_2}{X_3} \end{cases}$$

$$P \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

coordinate omogenee

Il punto all'∞ è rappresentato come $\infty \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$

Esempio: traslazione in coordinate omogenee

traslazione $T \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 \boxed{-2} \\ x_2 \boxed{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

porta l'origine in $\mathbf{P}_0(x_0, y_0) = (2,1)$

e la vecchia origine si trasforma in $(-2,-1)$

T diventa in coordinate omogenee:

$$y = T(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{X_1}{X_3} - 2 \\ \dfrac{X_2}{X_3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X_1 - 2X_3}{X_3} \\ \dfrac{X_2 - X_3}{X_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 - 2X_3 \\ X_2 - X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = Y$$

cioè $\quad T = \begin{pmatrix} I & \boxed{\begin{matrix} -x_0 \\ -y_0 \end{matrix}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ spostamento $\quad \Longleftarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

spostamento

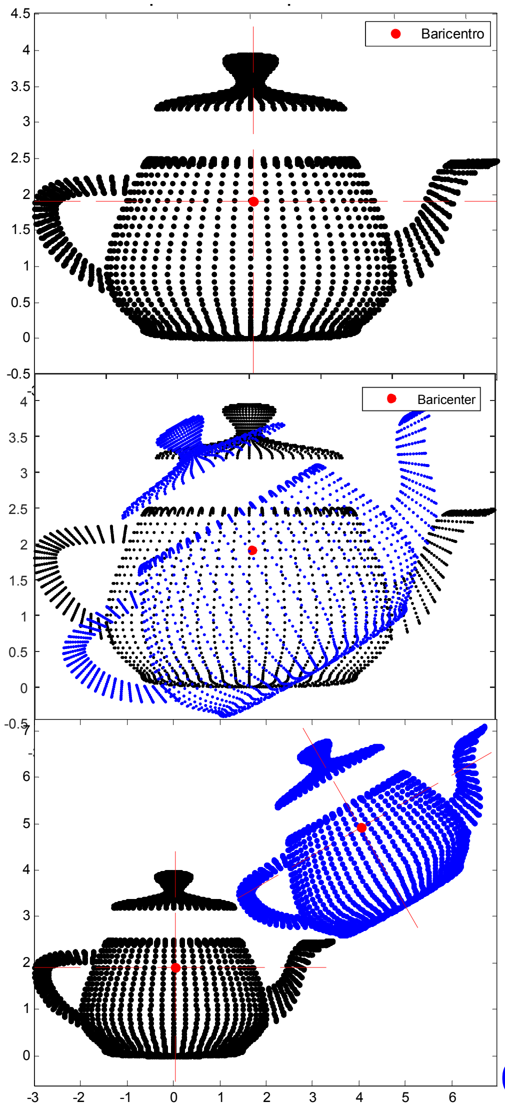
$$T = t_A \quad : \quad X \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow Y = \boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

matrice identica

(prof. M. Rizzardi)

Esempio: roto-traslazione di N punti

Rotazione di $\theta=30°$ attorno al baricentro e poi traslazione in $Q=(2,3)$



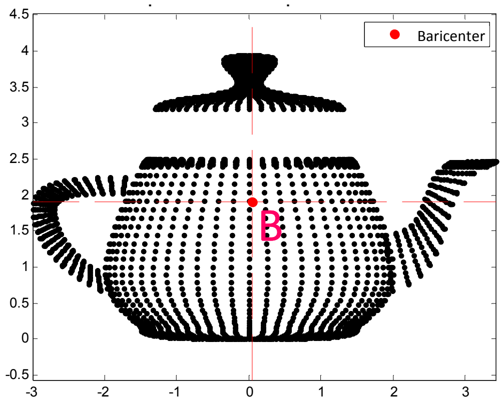
in coordinate cartesiane

	complessità computazionale
1) rotazione attorno al baricentro	
1.1) calcola il baricentro B	$O(N)$
1.2) trasla l'origine in B	$O(N)$
1.3) ruota attorno alla nuova origine (B)	$O(N)$
1.4) applica la traslazione inversa per riportare l'origine nella posizione iniziale	$O(N)$
2) traslazione in Q	$O(N)$

complessità computazionale totale: $O(5N)$

Esempio: (cont.)

Rotazione di $\theta=30°$ attorno al baricentro e poi traslazione in $Q=(2,3)$



in coordinate omogenee

1) Rotazione attorno al baricentro

complessità computazionale

1.1) calcola il baricentro B, $O(N)$

1.2) la matrice di traslazione $\boldsymbol{T}$

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -B(1)\\ 0 & 1 & -B(2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

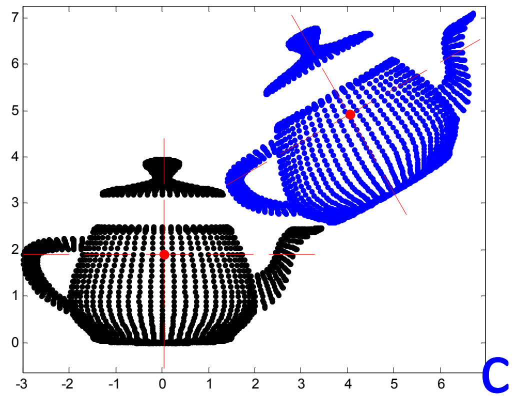
1.3) calcola la matrice di rotazione $\boldsymbol{R}$

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.4) calcola la matrice di traslazione $\boldsymbol{T}^{-1}$

($\boldsymbol{T}^{-1}$ non è realmente calcolata)

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & +B(1)\\ 0 & 1 & +B(2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



2) Matrice T_2 della traslazione in Q

$$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & Q(1)\\ 0 & 1 & Q(2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

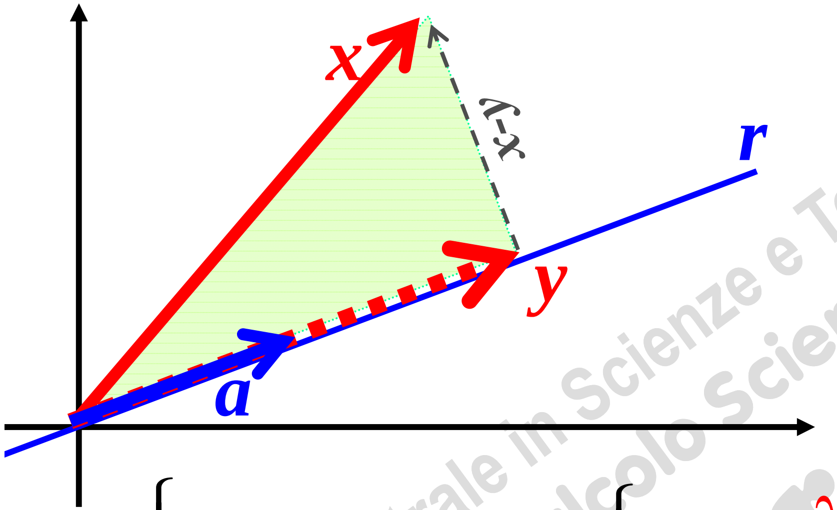
3) Calcola la matrice $M=T_2\times T^{-1}\times R\times T$ e le immagini dei punti P: M*P $O(N)$

complessità computazionale totale: $O(2N)$

Esempio: Costruire l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ corrispondente alla Proiezione Ortogonale sulla retta $\boldsymbol{r}=\mathbf{span}\{\boldsymbol{a}\}$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$.

$$t_A \;:\; x\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

$A\ (2\times 2)$



tale che $\begin{cases} y\in r \\ x-y\perp r\end{cases}$

$\langle,\rangle$ prodotto scalare standard

$$\begin{cases} y\in r \\ x-y\perp r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a\lambda \\ \langle x-y, a\rangle = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle} = \frac{a^{\mathsf{T}}x}{a^{\mathsf{T}}a}$$

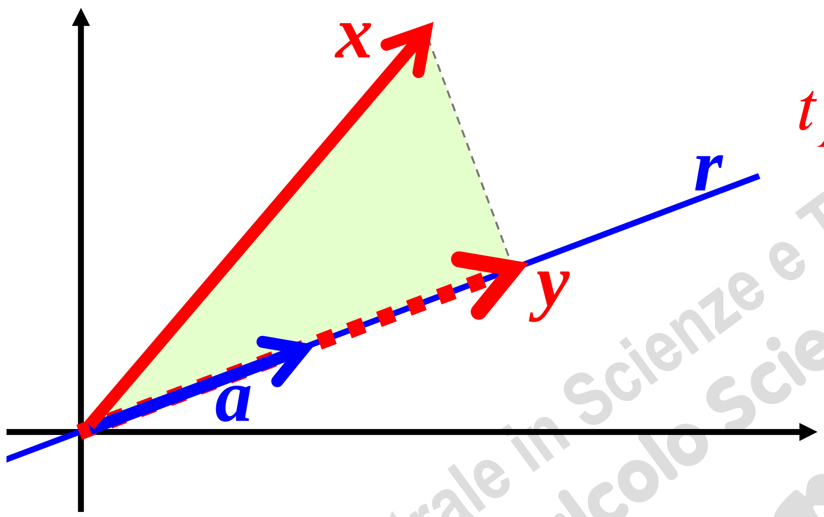
$\boldsymbol{a}$ è un vettore, allora $\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$ è uno scalare

$$t_A \;:\; x\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \frac{1}{\|a\|^2}aa^{\mathsf{T}}x \in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\|a\|^2}aa^{\mathsf{T}}}$$

Esercizio: Calcolare $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(\mathrm{I}-A)$: cosa rappresentano?

Esempio: caso particolare

Costruire l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ corrispondente alla Proiezione Ortogonale sulla retta $r = \mathbf{span}\{\underbrace{(2,1)^\mathsf{T}}_{a}\}$.

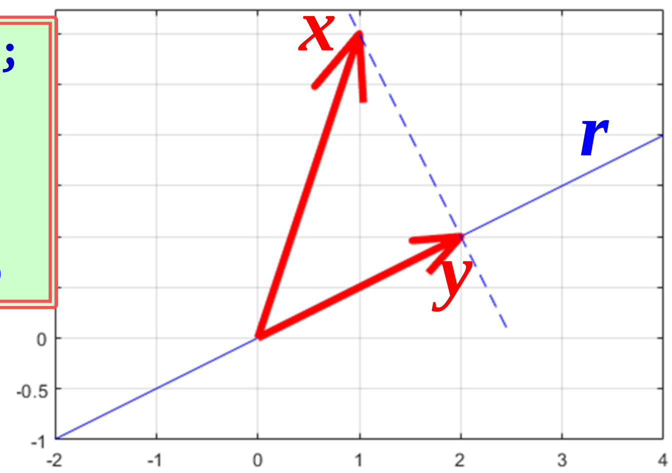


$$t_A \ : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \frac{1}{\|a\|^2} a a^\mathsf{T} x \in \mathbb{R}^2$$

$$y = t_A(x) = \left[\frac{1}{\|a\|^2} a a^T\right] x =$$

$$= \left[\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\right] x = 0.1\begin{pmatrix}9 & 3\\3 & 1\end{pmatrix} x$$

```
a=[2 1]'; syms b real; r=b*a; A=[a*a'/norm(a)^2];
x=[1 3]'; y=A*x; n=null(a'); % normal
fplot(r(1),r(2),[-2 2],'Color','b'); hold on
h=compass([x(1) y(1)],[x(2) y(2)] ,'r'); set(h, …
axis equal; grid on; fplot(a(1)+n(1),a(2)+n(2),[-1 2.5],
                          'Color','b','LineStyle','--')
```

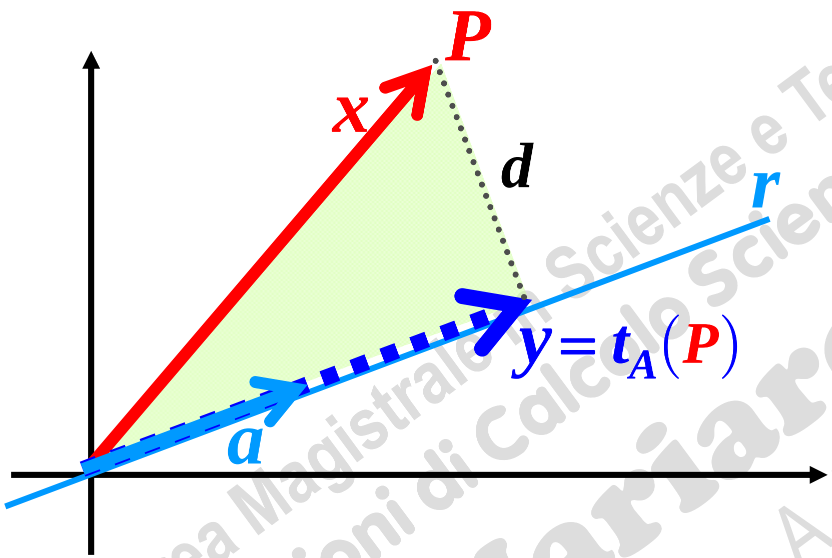


Cosa sono lo Spazio Nullo e lo Spazio Immagine di questa trasformazione?

Applicazione: distanza di un punto da una retta

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si definisce distanza di un punto **P** da una retta $\boldsymbol{r}$

$$d(P,r) = \|x - y\|_2 = \min \{d(P,Q)\ \forall Q \in r\}$$



dove $\boldsymbol{x}$ è il vettore corrispondente al punto **P** ed $\boldsymbol{y}$ è la sua proiezione ortogonale su $\boldsymbol{r}=\mathrm{span}\{\underline{a}\}$

$$y = \boxed{\left[\frac{1}{\|a\|^2} aa^T\right]} x \qquad \boxed{A}$$

```
a=[2 1]'; x=[1 3]';
A=[a*a' / norm(a)^2];    y=A*x;
[norm(x-y)  sqrt(sum((x-y).^2))]
ans =
        2.5298        2.5298
```

Esercizio

Calcolare la distanza tra due rette parallele

MATLAB Lab.: fattorizzare t_A in trasf. lineari elementari

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

1 $A = QR$

$$A = \begin{pmatrix} 0.81472 & 0.12699 \\ 0.90579 & 0.91338 \end{pmatrix}$$

```
A=rand(2);  disp(rank(A))
        2
[Q,R] = qr(A)
Q =
      -0.66874       -0.74349
      -0.74349        0.66874
R =
       -1.2183       -0.76401
        0              0.5164
```

Q è ortogonale

È Q una rotazione? $R_\alpha \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

```
disp(det(Q))
         -1      no!
```

Bisogna permutare le sue righe $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Che rappresenta P da un punto di vista geometrico?

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q, \quad Q_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.74349 & 0.66874 \\ -0.66874 & -0.74349 \end{pmatrix}}_{\text{rotazione}}$$

cos(α)<0, sin(α)<0 ⇒ α∈3° quadrante

```
disp(det(Q1))
          1     ok!
```

rotazione

di un angolo $\alpha = -138.03°$

atan(sine/cosine) atan2(sine,cosine)

```
P=[0 1;1 0]; Q1=P*Q;
disp(atan2(Q1(2,1),Q1(1,1))*180/pi)
   -138.03              3° quadrante (OK!)
disp(atan(Q1(2,1)/Q1(1,1))*180/pi)
      41.97              1° quadrante (NO!)
disp(asin(Q1(2,1))*180/pi)
        -41.97           4° quadrante (NO!)
disp(acos(Q1(1,1))*180/pi)
         138.03          2° quadrante (NO!)
```

$$A = QR$$

2 $A = P\,Q_1\,R$

Cos'è P?

Cos'è R?

(prof. M. Rizzardi)

MATLAB Lab.: fattorizzare t_A in trasf. lineari elementari (cont.)

$$A=\begin{pmatrix}0.81472 & 0.12699\\ 0.90579 & 0.91338\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}$$

Cos'è $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **?**

P è una particolare matrice di permutatione

Una matrice di permutazione elementare $\boldsymbol{P}$ è una matrice quadrata ottenuta dalla matrice identica, dello stesso size, mediante la permutazione di 2 righe (o 2 colonne). Una matrice di permutazione generale si ottiene moltiplicando due o più matrici di permutazione elementari.

oppure $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$

```
P=[0 1 0;1 0 0;0 0 1];
syms a b c d e f g h i real
B=[a b c;d e f; g h i];
```

$PB=\begin{pmatrix}d & e & f\\ a & b & c\\ g & h & i\end{pmatrix}$

```
disp(P*B)
[d, e, f]
[a, b, c]
[g, h, i]
```

molt. sx ⇔ permuta righe

molt. dx ⇔ permuta colonne

$BP=\begin{pmatrix}b & a & c\\ e & d & f\\ h & g & i\end{pmatrix}$

```
disp(B*P)
[b, a, c]
[e, d, f]
[h, g, i]
```

$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T$: simmetrica

```
all(all(P==P'))
ans =
  logical
   1
```

$\boldsymbol{PP}=\boldsymbol{I}$: idempotente

```
all(all(P*P==eye(3)))
ans =
  logical
   1
```

```
det(P)
ans =
    -1
```

$\Rightarrow$ tutte le permutazioni elementari P sono simmetrie

$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad P$ è una simmetria $\Rightarrow$ Asse? $\Rightarrow$ Quali vettori : $\boldsymbol{Pv}=\boldsymbol{v}$?

$\boldsymbol{Pv}-\boldsymbol{v}=0 \Rightarrow$

```
N=null(sym(P - eye(2)))
N =
  1
  1
```

$$(\boldsymbol{P}-\mathsf{I})\,\boldsymbol{v}=\underline{0}$$

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boldsymbol{P}$: simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° q.

MATLAB Lab.: fattorizzare t_A in trasf. lineari elementari (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 0.81472 & 0.12699 \\ 0.90579 & 0.91338 \end{pmatrix}$$

2 $A = P\,Q_1\,R$?

simmetria rotazione

3 ... e R?

$$R = \begin{pmatrix} -1.2183 & -0.76401 \\ 0 & 0.5164 \end{pmatrix}$$

R: matrice triangolare superiore

Può R contenere uno shear orizz.? $H = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si devono estrarre i pivot

```
S=diag(diag(R))
S =
      -1.2183            0
            0       0.5164
H=S\R  equivale a H=inv(S)*R      R = SH
H =
  shear      1       0.62712  tan(θ)
             0             1
theta=atan(H(1,2))*180/pi
theta =
      32.093     θ in gradi
```

$$R = SH$$

$$R = \underbrace{\begin{pmatrix} -1.2183 & 0 \\ 0 & 0.5164 \end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0.62712} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H}$$

tan(θ)

H shear orizz.

S scaling non uniforme + simmetria

$S = S_1 S_2$

```
S1=diag(sign(diag(S)))
S1 =
     -1      0     y-simmetria
      0      1
```

```
S2=S1\S
S2 = scaling non uniforme
    1.2183          0
         0     0.5164
```

$$A = PQ_1S_1S_2H$$

simmetria rotazione y-simmetria scaling non u. shear orizz.

(prof. M. Rizzardi)

Esercizio

A partire da una matrice quadrata **A**, calcolata come

```
A=rand(2);
```

spiegare quali trasformazioni lineari elementari si ottengono dalle seguenti fattorizzazioni di **A**:

- `[L,U,P]=lu(A);`
- `[U,S,V]=svd(A);`

Trasformazioni lineari elementari 3D

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

Omotetia radiale di centro O con fattore ρ

(o scaling uniforme o scaling isotropo)

$0 < \rho < 1$ contrazione

$1 < \rho$ dilatazione

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Scaling non uniforme (o scaling anisotropo) centrato in O

Particolari simmetrie

simmetrie elementari 3D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
disp(det(A))
-1
```

Simmetria risp. piano XY

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
disp(eig(A))
 -1
  1
  1
```

Simmetria risp. piano XZ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simmetria risp. piano YZ

prodotto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
disp(det(A))
 1
```

Simmetria risp. asse X

prodotto

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

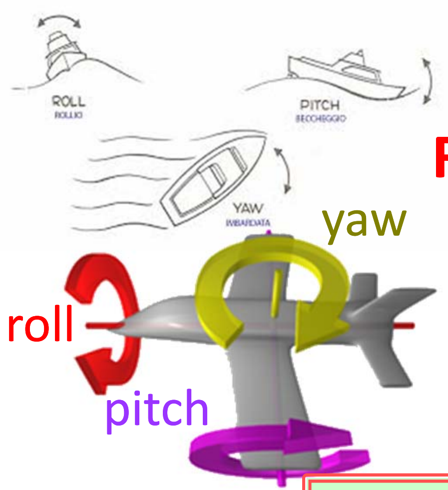
```
disp(eig(A))
 -1
 -1
  1
```

Simmetria risp. asse Y

prodotto

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simmetria risp. asse Z



Trasformazioni lineari elementari 3D

Rotazione centrata in O attorno ad un asse cartesiano

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$

matrice di permutazione

```
P=[0 0 1;
   1 0 0;
   0 1 0]
```

1

```
syms a real
A=[1      0       0;
   0 cos(a) -sin(a);
   0 sin(a)  cos(a)];
disp(simplify(det(A)))
1
```

2

```
B=P*A*P'; disp(B)
[ cos(a), 0, sin(a)]
[      0, 1,      0]
[-sin(a), 0, cos(a)]
disp(simplify(det(B)))
1
```

3

```
C=P*B*P'; disp(C)
[cos(a), -sin(a), 0]
[sin(a),  cos(a), 0]
[     0,       0, 1]
disp(simplify(det(C)))
1
```

Perché 2 e 3 derivano da 1 ?

1 $R_x(\alpha)$=**rotazione attorno all'asseX** di un angolo α

rollio (roll)

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2 $R_y(\beta)$=**rotazione attorno all'asse Y** di un angolo β

beccheggio (pitch)

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

3 $R_z(\theta)$=**rotazione attorno all'asse Z** di un angolo θ

imbardata (yaw)

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione generica 3D = $R_x(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\theta)$

Proprietà delle rotazioni 3D

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$

rotazione $\Rightarrow$ $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$, $\det(A) = 1$ $\quad$ A: matrice ortogonale

matrice ortogonale $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$, $\det(A) = \pm 1$ $\leftarrow$ Dimostrare

ricorda che: $\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}})$

$$A \text{ ortogonale} \begin{cases} \det(A) = +1 & \Rightarrow \text{rotazione propria} \\ \det(A) = -1 & \Rightarrow \text{rotazione impropria (rotazione + simmetria)} \end{cases}$$

Rotazione 3D di un angolo θ attorno ad un asse a

Teor.: Nello Spazio Lineare $\mathbb{R}^3$, la matrice $R_a(\theta)$ di una rotazione 3D attorno ad un asse $r = \text{span}\{a\}$ e di un angolo θ è data da:

$$R_{\boldsymbol{a}}(\theta) = \begin{pmatrix} \boxed{c+(1-c)a_x^2} & (1-c)a_xa_y - sa_z & (1-c)a_xa_z + sa_y \\ (1-c)a_xa_y + sa_z & \boxed{c+(1-c)a_y^2} & (1-c)a_ya_z - sa_x \\ (1-c)a_xa_z - sa_y & (1-c)a_ya_z + sa_x & \boxed{c+(1-c)a_z^2} \end{pmatrix}$$

dove $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ tale che $\|\boldsymbol{a}\|_2 = 1$.

Teor.: Data la matrice R di una rotazione propria, allora

- Il suo asse di rotazione $\boldsymbol{a}$ si può trovare come Spazio Nullo*:

$$R\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N}(R - I) = \text{span}\{\boldsymbol{a}\}$$

- ed il suo angolo di rotazione θ si può trovare dalle seguenti relazioni:

$$\text{Tr}(R) = 1 + 2c \quad \Rightarrow \quad c = \cos(\theta) = [\text{Tr}(R) - 1]/2$$

$$\text{Se } a_z \neq 0,\ R_{2,1} = (1-c)a_xa_y + sa_z \quad \Rightarrow \quad s = \sin(\theta) = [R_{2,1} - (1-c)a_xa_y]/a_z$$

$$\text{Se } a_y \neq 0,\ R_{1,3} = (1-c)a_xa_z + sa_y \quad \Rightarrow \quad s = \sin(\theta) = [R_{1,3} - (1-c)a_xa_z]/a_y$$

$$\text{Se } a_x \neq 0,\ R_{3,2} = (1-c)a_ya_z + sa_x \quad \Rightarrow \quad s = \sin(\theta) = [R_{3,2} - (1-c)a_ya_z]/a_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \text{atan2}(s, c)}$$

dove Tr() denota la traccia di una matrice.

traccia = somma degli elementi della diagonale principale

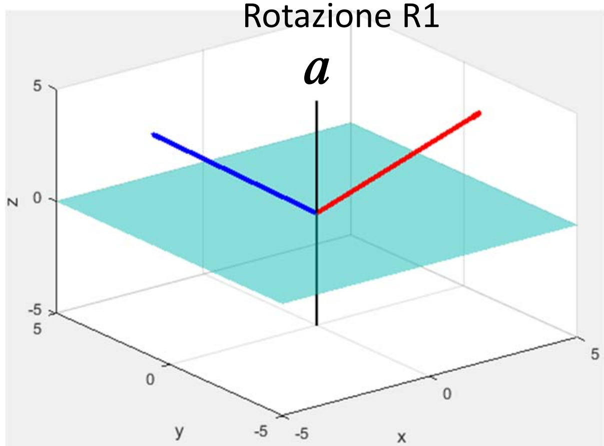
* Alternativamente, l'asse di rotazione $\boldsymbol{a}$ è dato da: $R\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, cioè è l'*autovettore* (unitario) di R relativo all'*autovalore* 1.

Rotazione 3D: esempio 1

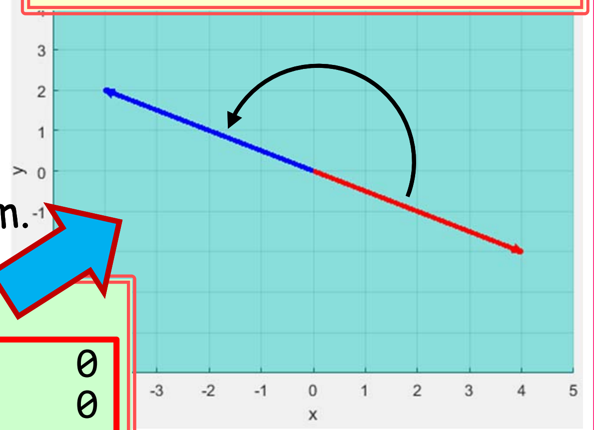
```
R=[-1 0 0;0 0 -1;0 1 0]
R =
    -1     0     0
     0     0    -1
     0     1     0
disp([R'*R  R*R'])
     1     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0     0     1     0     0     1
disp(det(R))
  -1
```

matrice ortogonale

rotazione impropria



view([a(1),a(2),a(3)])




```
P=[1 0 0;0 0 1;0 1 0]
P =
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
R1=R*P
R1 =
    -1     0     0
     0    -1     0
     0     0     1
```

P matrice di permutazione elem.

$\cos(\theta)$ $\sin(\theta)$

asse di rotazione

```
disp([R1'*R1  R1*R1'])
     1     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0     0     1     0     0     1
disp(det(R1))
     1
...
```

R1: rotazione propria

$\theta=180°$, asse = span$\{(0,0,1)^T\}$

R=R1*P

Esercizio

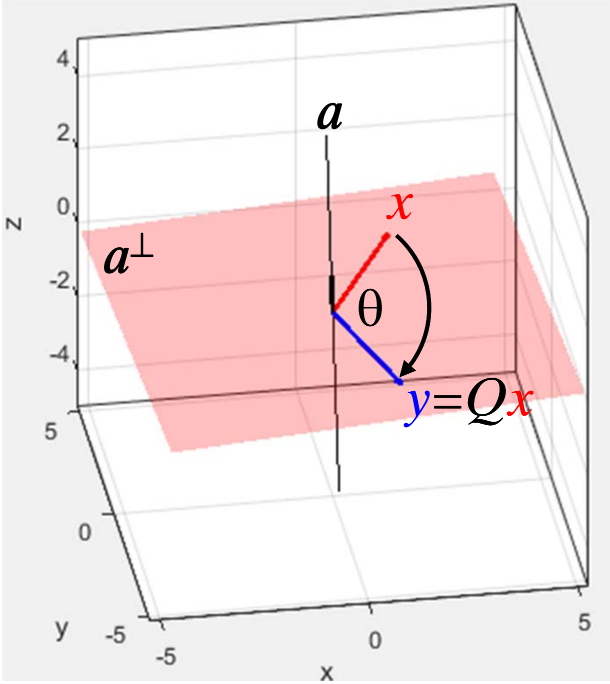
Che tipo di transformazione lineare induce la matrice di permutazione P? E P^{-1}? Visualizzare il loro effetto.

Rotazione 3D: esempio 2

```
rng('default');  A=rand(3);  [Q,R]=qr(A);
disp([Q'*Q  Q*Q'])
     1     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     1     0
     0     0     1     0     0     1
disp(det(Q))
   1
```

matrice ortogonale

rotazione propria



a: asse di rotazione

$$x \in a^\perp \quad \Rightarrow \quad y = Qx \in a^\perp$$

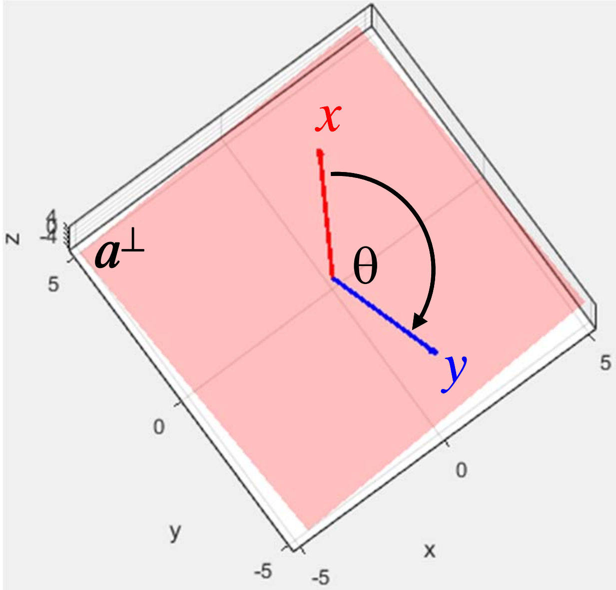
```
a=null(Q-eye(3))
a =
    -0.038844
     -0.05243
      0.99787
cosTh=(trace(Q)-1)/2
cosTh =
    -0.66766 < 0
sinTh=(Q(1,3)-(1-cosTh)*a(1)*a(3))/a(2)
    -0.74447 < 0
Th=rad2deg(atan2(sinTh,cosTh))
Th =
    -131.89
```

asse di rotazione

vettore normalizzato

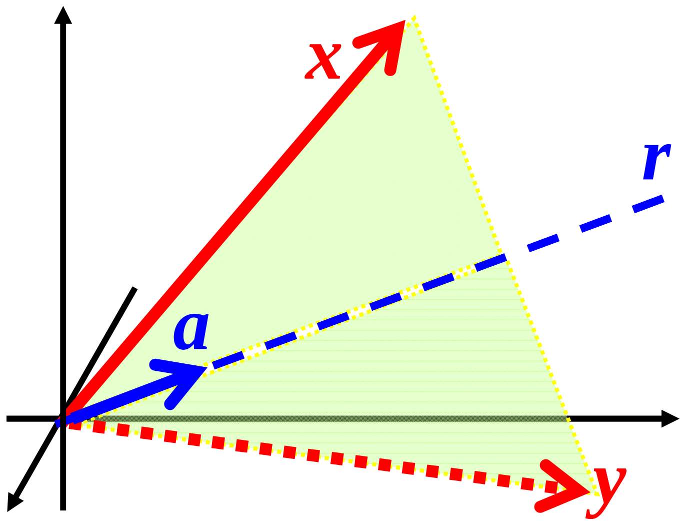
$s = \sin(\theta) = \left[R_{1,3} - (1-c)a_x a_z\right] / a_y$

angolo di rotazione



Simmetria ortogonale 3D attorno ad una retta r=span$\{a\}$:
come costruire la matrice della trasformazione

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$



t_A : tale che $\begin{cases} x + y \in r \\ x - y \perp r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda a \\ \langle x - y, a\rangle = 0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y = \lambda a - x \\ \langle 2x - \lambda a, a\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda a - x \\ 2\langle a, x\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2\frac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle} = 2\frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|_2^2} \Rightarrow y = 2a\frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|_2^2} - x = \frac{2}{\|a\|_2^2}aa^{\mathsf{T}}x - x = \left(\frac{2}{\|a\|_2^2}aa^{\mathsf{T}} - I_3\right)x$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{2}{\|a\|_2^2}aa^{\mathsf{T}} - I\right)}$$

Esercizio

Cosa sono $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^{\mathsf{T}})$, $\mathcal{N}(A^{\mathsf{T}})$ e $\mathcal{R}(A)$?
E $\mathcal{N}(A - I)$? È t_A un automofismo?

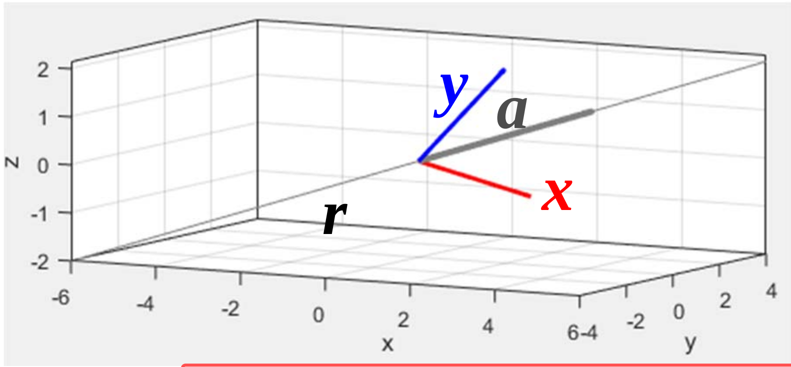
MATLAB Lab: simmetria 3D attorno ad una retta generica

$\boldsymbol{r}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}\} : \boldsymbol{a}=(3,2,1)^T$

Quali proprietà caratterizzano la matrice della simmetria 3D?

```
a=[3 2 1]';  syms t real
ezplot3(t*a(1),t*a(2),t*a(3),[-2 2]) r
axis equal; hold on; box on
h=quiver3(0,0,0,a(1),a(2),a(3),1); set(…
A = 2/norm(a)^2*a*a'-eye(size(a,1))
A =
   0.28571    0.85714    0.42857
   0.85714   -0.42857    0.28571
   0.42857    0.28571   -0.85714
x=[1 3 -1]'; y=A*x;
h=quiver3(0,0,0,x(1),x(2),x(3),1); set(…
h=quiver3(0,0,0,y(1),y(2),y(3),1); set(…
```

simmetrica




```
ax=null(A-eye(3)); % asse di rotazione
disp(rank([a ax]))
    1
cosTH=(trace(A)-1)/2;
sinTH=(A(1,3) - ...
       (1-cosTH)*ax(1)*ax(3))/ax(2);
TH=atan2(sinTH,cosTH)*180/pi
TH =
    -180
```

```
disp(det(A))
1
```

il determinante di A è uguale a 1*

*una simmetria con det(A)=1 è una rotazione attorno al suo asse di un angolo $= \pm\pi$

```
disp(eig(A))
            -1
            -1
             1
```

i suoi autovalori sono -1, 1

```
disp(A*A)
              1   -4.4409e-16             0
    -4.4409e-16             1             0
              0             0             1
```

la matrice coincide con la sua inversa

```
disp(A'*A)
              1   -1.5266e-16   -1.1102e-16
    -1.5266e-16             1   -2.7756e-17
    -1.1102e-16   -2.7756e-17             1
```

```
disp(A*A')
              1   -1.5266e-16   -1.1102e-16
    -1.5266e-16             1   -2.7756e-17
    -1.1102e-16   -2.7756e-17             1
```

matrice ortogonale

Simmetrie rispetto ad una retta $A=\left(\frac{2}{\|a\|_2^2}aa^{\mathrm{T}}-I\right)$

3D

```
N=3; syms a [N 1] real
A=simplify(2/norm(a)^2*a*a'- eye(N));
disp(det(A))
1
disp(eig(A))
-1
-1
 1
all(all(A == A.'))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A*A) == eye(N)))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A'*A) == eye(N)))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A*A' == eye(N))))
ans =
  logical
   1
ax=null(A-eye(N))
ax =
a1/a3
a2/a3
    1
cosTH=simplify((trace(A)-1)/2)
cosTH =
-1
```

rotazione propria

autovalori

matrice simmetrica

$A = A^{-1}$

$A = A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$

matrice ortogonale

a è l'asse della rotazione 3D

l'angolo di rotazione è 180°

4D

```
N=4; syms a [N 1] real
A=simplify(2/norm(a)^2*a*a'- eye(N));
disp(det(A))
-1
disp(eig(A))
-1
-1
-1
 1
all(all(A == A.'))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A*A) == eye(N)))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A'*A) == eye(N)))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A*A' == eye(N))))
ans =
  logical
   1
ax=null(A-eye(N))
ax =
a1/a4
a2/a4
a3/a4
    1
```

rotazione impropria

autovalori

matrice simmetrica

$A = A^{-1}$

$A = A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$

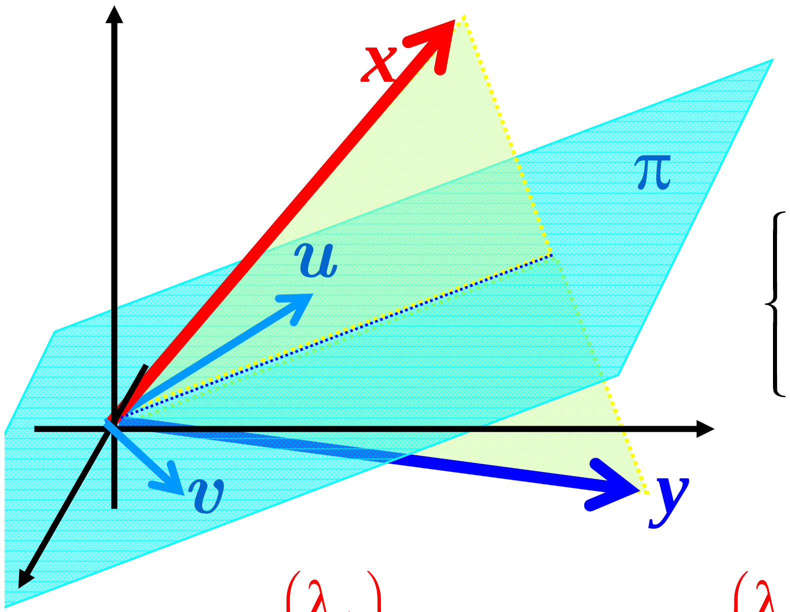
matrice ortogonale

a è l'asse della simmetria

solo per la rotazione 3D

Simmetria 3D rispetto ad un piano $\pi=\text{span}\{u,v\}$: come costruire la matrice della trasformazione

$$t_A \ :\ x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$



t_A tale che $\begin{cases} x+y \in \pi \\ x-y \perp \pi \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{c} U=[u,v] \\ \pi = \mathscr{R}(U) \\ x-y \in \pi^{\perp} \end{array}}$$

$$\begin{cases} x+y \in \mathscr{R}(U) \\ x-y \in \mathscr{N}(U^{\mathsf{T}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = U\lambda \\ U^{\mathsf{T}}(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$y = U\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} - x \Rightarrow U^{\mathsf{T}}\left[2x - U\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ U^{\mathsf{T}}U\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = 2U^{\mathsf{T}}x \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = 2\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}x \qquad \boxed{y = U\lambda - x \ \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\ y = U\left[2\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}x\right] - x = \left[\underbrace{2U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} - I_3}_{}\right]x$$

Notare la similitudine tra le formule delle simmetrie rispetto ad una retta e ad un piano

matrice della simmetria ortogonale rispetto a π

$$F = t_A : x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^3$$

Proprietà delle matrici di simmetria ortogonale 3D

$$A = 2U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} - I_3$$

rispetto ad una retta : $U=[u]$ (vettore)
rispetto ad un piano: $U=[u,v]$ (matrice)

1. la matrice della simmetria è una matrice simmetrica.
2. L'inversa di una simmetria è la simmetria stessa.

Dim.:

$$A \cdot A = \left[2U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} - I_3\right]\left[2U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} - I_3\right] =$$

$$= 4U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}\cancel{U^{\mathsf{T}}U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}}U^{\mathsf{T}} - 4U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} + I_3 =$$

$$= \cancel{4U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}} - 4U\left(U^{\mathsf{T}}U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}} + I_3 = I_3$$

3. La matrice della simmetria è una matrice ortogonale.
4. $U=[u,v] \Rightarrow$ gli autovalori di A sono $-1, +1, +1$ e il determinante è -1.
   $U=[u] \Rightarrow$ gli autovalori di A sono $-1, -1, +1$ e il determinante è $+1$.

Se la base è ortonormale

rispetto ad una retta: $U=[u]$ $\quad \|u\|=1$
rispetto ad un piano: $U=[u,v]$ $\quad U^{\mathsf{T}}U=\mathrm{I}$

$\Rightarrow$

$$A = 2u\,u^{\mathsf{T}} - I_3$$
$$A = 2UU^{\mathsf{T}} - I_3$$

non è più necessaria la matrice inversa: formula più semplice!

Esempio: simmetria 3D rispetto a $\pi=\text{span}\{\underbrace{u,v}_{U}\}$

numerico

```
u=[2 3 1]'; v=[3 1 0]'; U=[u v];
syms a b real; p=U*[a b]';
A=2*U*inv(U'*U)*U' - eye(3);
all(all(A == A'))
ans =
  logical
   1
all(all(abs(A*A - eye(3)) < 1e-10))
ans =
  logical
   1
x=10*rand(3,1); y=A*x;
disp(rank([U x+y]))
     2
disp((x-y)'*U)
  -5.3291e-15   4.4409e-16
disp(det(A))
                  -1
disp(eig(A))
                  -1
                   1
                   1
```

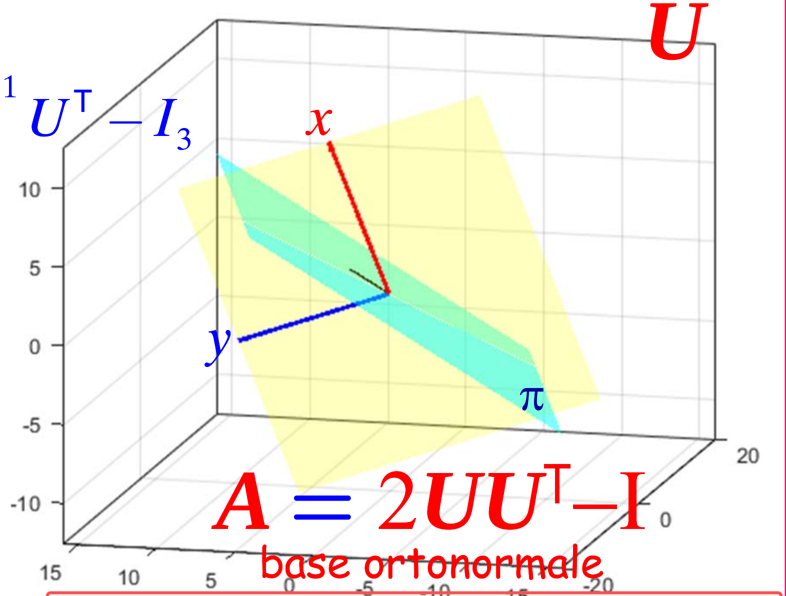
$A=2U\left(U^{\mathsf T}U\right)^{-1}U^{\mathsf T}-I_3$

matrice simmetrica

$A = A^{-1}$

$x+y\in\mathscr{R}(U)$

$(x-y)\perp\pi$



$A = 2UU^{\mathsf T}-I$

base ortonormale

simbolico

```
syms u v [3 1] real;  U=[u v];
A=simplify(2*U*inv(U'*U)*U'-eye(3));
disp(simplify(det(A)))
-1
disp(simplify(eig(A)))
-1
 1
 1
all(all(A == A'))
ans =
  logical
   1
all(all(simplify(A*A) == eye(3)))
ans =
  logical
   1
disp(rank([U x+y]))
2
disp(simplify((x-y)'*U))
[0, 0]
```

matrice simmetrica

$A = A^{-1}$

$x+y\in\mathscr{R}(U)$

$(x-y)\perp\pi$

```
u=[2 3 1]'; v=[3 1 0]';
U=orth([u v]);
disp(U'*U)
               1    2.0817e-17
   2.0817e-17            1
A=2*U*U'-eye(3);
x=10*rand(3,1); y=A*x;
disp(rank([U x+y]))
     2
disp((x-y)'*U)
  -5.3291e-15   4.4409e-16
all(all(A == A'))
ans =
  logical
   1
disp(det(A))
   -1
disp(eig(A))
              -1
               1
               1
```

base ortonormale

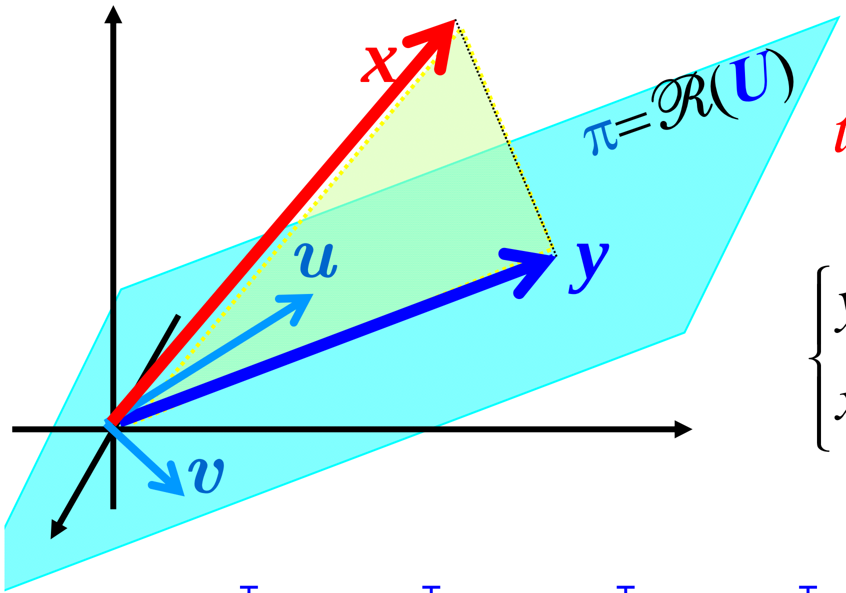
$x+y\in\mathscr{R}(U)$

$(x-y)\perp\pi$

il prodotto degli autovalori dà il valore del determinante

Proiezione ortogonale su un piano $\pi = \text{span}\underbrace{\{u, v\}}_{U}$

$$t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$



t_A tale che $\begin{cases} y \in \pi \\ x - y \perp \pi \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{c} U = [u, v] \\ \pi = \mathscr{R}(U) \\ x - y \in \pi^{\perp} \end{array}}$$

$$\begin{cases} y \in \mathscr{R}(U) \\ x - y \in \mathscr{N}(U^{\mathsf{T}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = U\lambda \\ U^{\mathsf{T}}(x - y) = 0 \end{cases}$$

matrice di Gram

$$\Leftrightarrow U^{\mathsf{T}}x - U^{\mathsf{T}}y = U^{\mathsf{T}}x - U^{\mathsf{T}}\,U\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{U^{\mathsf{T}}U}\lambda = U^{\mathsf{T}}x$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \left(U^{\mathsf{T}}\,U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}x \qquad y = U\lambda \;\Rightarrow\; y = U\left(U^{\mathsf{T}}\,U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}x$$

A: matrice della proiezione ortogonale su $\mathscr{R}(U)$

$$y = \boxed{\left[U\left(U^{T}U\right)^{-1}U^{T}\right]}x \qquad A = U(U^{\mathsf{T}}U)^{-1}U^{\mathsf{T}}$$

Se U ha colonne ortonormali $\Rightarrow$ $U^{\mathsf{T}}U = I$ $\Rightarrow$ più semplice $A = UU^{\mathsf{T}}$

(prof. M. Rizzardi)

Esempio: proiezione ortogonale 3D su $\pi=\text{span}\underbrace{\{u,v\}}_{U}$

$$A = U(U^{\mathsf{T}}U)^{-1}U^{\mathsf{T}}$$

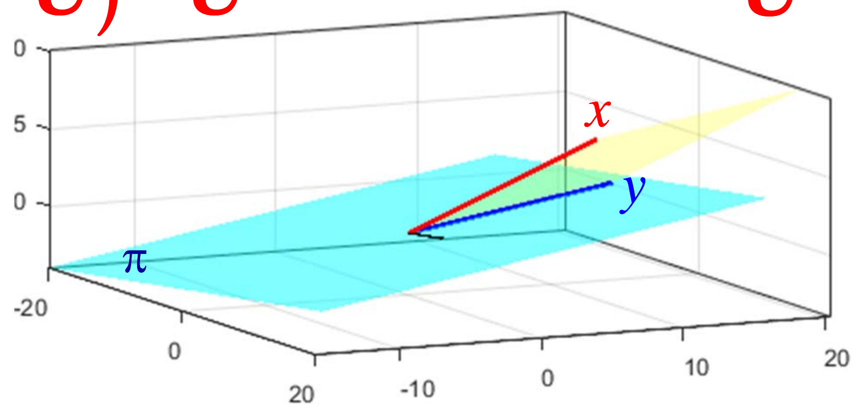
numerico

```
u=[2 3 1]'; v=[3 1 0]'; U=[u v];
syms a b real; p=U*[a b]';
A=U*inv(U'*U)*U';
all(all(abs(A - A') < 1e-10))
ans =
  logical
   1
all(all(abs(A*A - A) < 1e-10))
ans =
  logical
   1
x=10*rand(3,1); y=A*x;
disp(y'*(x-y))
     6.728e-14
disp(rank([U y]))
         2
disp(rank(A))
         2
disp(det(A))
  -2.3051e-17
disp(eig(A))
  -4.1973e-17
            1
            1
```

matrice simmetrica

A*A=A idempotente

$y \perp (x-y)$



$$A = UU^{\mathsf{T}}$$

base ortonormale

simbolico

```
syms u v [3 1] real;  U=[u v];
A=simplify(U*inv(U'*U)*U');
all(all(A == A'))
ans =
  logical
   1
syms x [3 1] real; y=A*x;
disp(simplify(y'*(x-y)))
0
disp(rank([U y]))
     2
disp(rank(A))
     2
disp(simplify(det(A)))
0
disp(simplify(eig(A)))
0
1
1
```

matrice simmetrica

$y \perp (x-y)$

$y \in \mathscr{R}(U)$

il prodotto degli autovalori dà il valore del determinante

```
u=[2 3 1]'; v=[3 1 0]';
U=orth([u v]);
disp(U'*U)
             1    2.0817e-17
   2.0817e-17             1
A=U*U'; x=10*rand(3,1); y=A*x;
disp(rank([U y]))
   2
disp(y'*(x-y))
   2.4869e-14
all(all(A == A'))
ans =
  logical
   1
disp(det(A))
   0
disp(eig(A))
   8.3267e-17
            1
            1
```

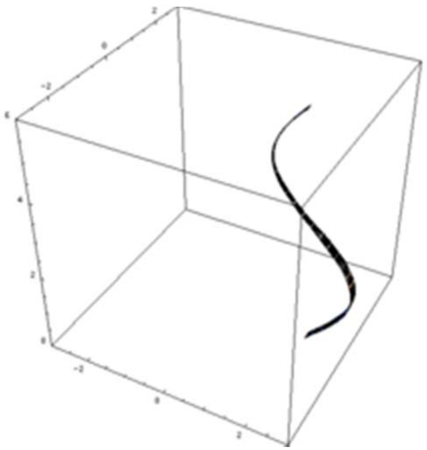
base ortonormale

$y \in \mathscr{R}(U)$

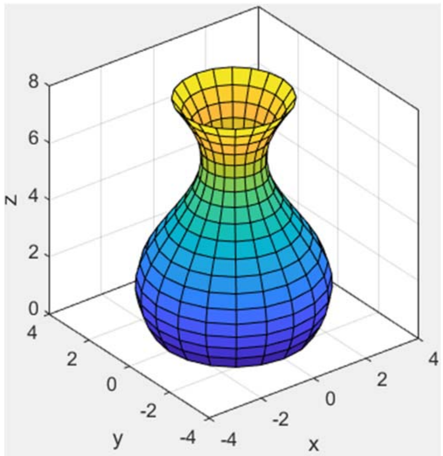
$y \perp (x-y)$

Esercizio su un solido di rotazione

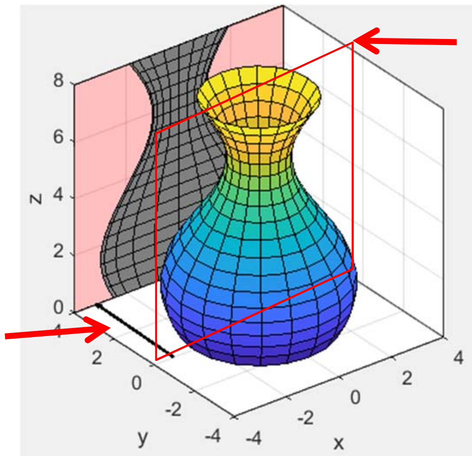
Disegnare l'ombra parallela al piano XZ (o al piano YZ) di un solido di rotazione. Tale ombra può essere calcolata come proiezione ortogonale del solido su quel piano, e poi traslata su una faccia laterale della figura grafica.



```
t=(-pi/3:pi/10:2*pi-pi/2)';
y=2+cos(t);
[X,Y,Z]=cylinder(y); Z=8*Z;
figure(1); surf(X,Y,Z); axis equal
box on; hold on
set(gca,'FontSize',12)
AX=[-4 4 -4 4 0 8]; axis(AX)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```

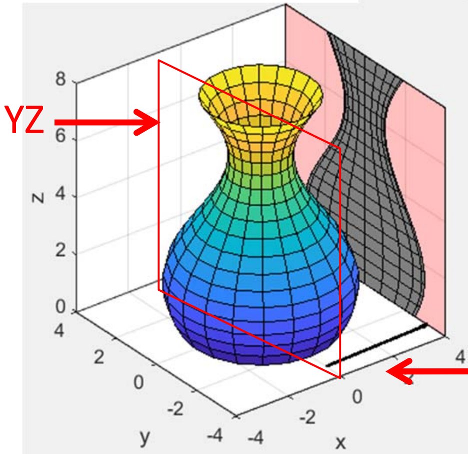


piano XZ



traslazione
del piano XZ

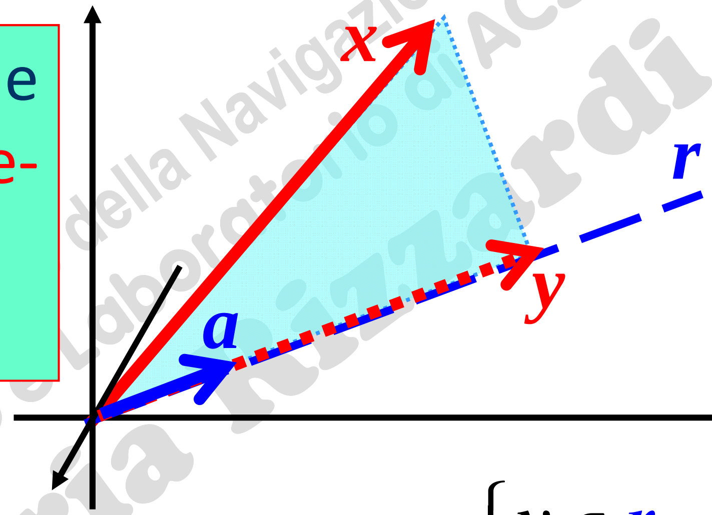
piano YZ



traslazione
del piano YZ

Esercizi

1 Trovare la forma matriciale dell'endomorfismo per la proiezione ortogonale su una retta $r = \text{span}\{a\}$, assegnato $a \in \mathbb{R}^3$.



Suggerimenti

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} y \in r \\ x - y \perp r \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in r \\ x - y \perp r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda a \\ \langle x - y, a \rangle = 0 \end{cases}$$

2 Calcolare la distanza tra un punto e
- una retta r
- un piano π.