Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS (12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_05a

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - **Trasformazioni Lineari (omomorfismi) e proprietà. Isomorfismi, endomorfismi, automorfismi.**
  - **Kernel (o Spazio Nullo) $\mathscr{N}(F)$ e Range (o Spazio Immagine) $\mathscr{R}(F)$ di una trasformazione lineare.**
  - **Trasf. lineari iniettive e suriettive.**
  - **Teor.: isomorfismo tra $\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$.**
  - **Automorfismo come cambiamento di base.**
  - **Vantaggio nell'uso di una base ortonormale.**

Trasformazioni Lineari

DEFINIZIONE

Siano U e V due spazi lineari sul campo di scalari K; un'***applicazione*** (o ***trasformazione***) F

$$F \quad : \quad U \longrightarrow V$$

si dice ***applicazione lineare*** (o ***trasformazione lineare***) quando:

♣ $\forall u, v \in U \qquad F(u+v) = F(u) + F(v)$

♣ $\forall u \in U, \forall \alpha \in K \qquad F(\alpha u) = \alpha F(u)$

... cioè, in pratica, vale la proprietà di linearità

$$\forall u, v \in U, \forall \alpha, \beta \in K \quad F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Esempio 1

➢ È lineare la seguente trasformazione

$$\Phi \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 4x+y \\ y-x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Dim.: si verifichi che vale la proprietà di linearità

Si considerino: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$: $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

dalla definizione di Φ si ha:

$$\Phi(\alpha u + \beta v) = \Phi\begin{pmatrix} \alpha x_u + \beta x_v \\ \alpha y_u + \beta y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\alpha x_u + \beta x_v) + (\alpha y_u + \beta y_v) \\ (\alpha y_u + \beta y_v) - (\alpha x_u + \beta x_v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\alpha x_u + \alpha y_u \\ \alpha y_u - \alpha x_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta x_v + \beta y_v \\ \beta y_v - \beta x_v \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 4x_u + y_u \\ y_u - x_u \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4x_v + y_v \\ y_v - x_v \end{pmatrix} =$$

$$= \quad = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$$

$\Rightarrow$ Φ è una trasformazione lineare

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie dell'Innovazione — Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio ACS — prof. Mariarosaria Rizzardi — A.A. 2022/2023

Esempio 2

➢ <u>Non</u> è lineare la seguente trasformazione

$$\Phi \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Dim.:

Si considerino: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$: $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\Phi(\alpha u + \beta u) = \Phi\begin{pmatrix} \alpha x_u + \beta x_v \\ \alpha y_u + \beta y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_u + \beta x_v) + 1 \\ (\alpha y_u + \beta y_v) - (\alpha x_u + \beta x_v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_u + 1 \\ \alpha y_u - \alpha x_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta x_v + 1 \\ \beta y_v - \beta x_v \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v) = \alpha\begin{pmatrix} x_u + 1 \\ y_u - x_u \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_v + 1 \\ y_v - x_v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ non è lineare}$$

Prof. Mariarosaria Rizzardi A.A. 2022/2023

Esempio 3

➢ La seguente trasformazione è lineare

$$F \; : \; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \Pi_2 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^3$$

La proprietà di linearità segue dalle definizioni di addizione tra due polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

Dim.:

$$\begin{array}{l} P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \end{array} \Rightarrow$$

$$F\big(\alpha P(x) + \beta Q(x)\big) = \big(\alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2\big) =$$

$$= \big(\alpha a_0 + \beta b_0, \quad \alpha a_1 + \beta b_1, \quad \alpha a_2 + \beta b_2\big)^T$$

$$\big\Updownarrow =$$

$$\alpha F\big(P(x)\big) + \beta F\big(Q(x)\big) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi \text{ è lineare}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie per l'Ambiente ... Applicazioni di Calcolo Scientifico e Algebra ... prof. Mariarosaria Rizzardi A.A. 2022/2023

Proprietà

- Ogni trasformazione che proviene da una matrice $A(m\times n)$ è una trasformazione lineare t_A.
- t_A è detta trasformazione indotta dalla matrice A

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$$

La proprietà di linearità segue dal prodotto righe-colonne di matrici.

- Viceversa, ogni trasformazione lineare come F

$$F \quad : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

può sempre essere scritta come trasformazione indotta da una matrice opportuna $A(m\times n)$

Laurea in Scienze e Tecnologie per la Comunicazione Applicazioni Scientifiche prof. Mariarosaria Rizzardi

Esempio:

$$F \quad : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la matrice della trasformazione $\boldsymbol{F}$

$$F \;:\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y \in \mathbb{R}^2$$

si interpreta il vettore immagine $\boldsymbol{y=Ax}$ come combinazione lineare delle colonne di $\boldsymbol{A}$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 1x_2 \\ -1x_1 + 1x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

DEFINIZIONI

Sia F una trasformazione lineare

$$F : U \longrightarrow U$$

stesso spazio

$\Leftrightarrow$ def **endomorfismo**

$$F : U \longrightarrow V$$

F biettiva

$\Leftrightarrow$ def **isomorfismo**

$$F : U \longrightarrow U$$

stesso spazio

F biettiva

$\Leftrightarrow$ def **automorfismo**

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022-2023

Esempi

- È un ***automorfismo*** la seguente trasform. lineare

$$F \;:\; (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (4x+y,\, y-x)^T \in \mathbb{R}^2$$

- È un ***endomorfismo*** la trasform. associata ad una matrice quadrata $A(n\times n)$

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^n$$

- È un ***automorfismo*** la trasform. associata ad una matrice quadrata invertibile $A(n\times n)$

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^n$$

- È un ***isomorfismo*** la seguente trasformazione

$$F \;:\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \Pi_2 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^3$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Maria Rosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Kernel $\mathscr{N}$ e Range $\mathscr{R}$ di una trasf. lineare

Sia $F : U \longrightarrow V$ una trasformazione lineare.

Il **Kernel** (o **Spazio Nullo**) della trasformazione è:

DEF

$$\mathscr{N}(F) = \{u \in U : F(u) = \underline{0} \in V\}$$

Se F è una t_A, cioè la trasformazione associata ad una matrice A, allora il Kernel di F coincide con lo **Spazio Nullo** della matrice:

$$\mathscr{N}(F) = \mathscr{N}(A)$$

Il **Range** (o **Spazio Immagine**) della trasformazione è:

DEF

$$\mathscr{R}(F) = \{v \in V : \exists u \in U : F(u) = v\} = F(U)$$

Se F è una t_A, cioè la trasformazione associata ad una matrice A, allora il Range di F coincide con lo **Spazio delle Colonne** della matrice:

$$\mathscr{R}(F) = \mathscr{R}(A)$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Teorema $\mathcal{N}(F)\subseteq U$ e $\mathcal{R}(F)\subseteq V$ sono ***sottospazi lineari***.

Dim. (dal Teor. "un sottospazio lineare contiene le combinazioni lineari dei suoi vettori"):

Per $\mathcal{N}(F)$, ricordando che la trasformazione F è lineare, si ha:

$$\forall u,v\in\mathcal{N}(F) \quad\Rightarrow\quad F(u)=F(v)=\underline{0}$$

$$\Rightarrow\quad \forall\alpha,\beta\in K,\quad F(\alpha u+\beta v)=\alpha F(u)+\beta F(v)=\underline{0}$$

cioè $\alpha u+\beta v\in\mathcal{N}(F)$.

Per $\mathcal{R}(F)$, ricordando che la trasformazione F è lineare, si ha:

$$\forall u,v\in\mathcal{R}(F) \quad\Rightarrow\quad \exists x,y\in U: F(x)=u\wedge F(y)=v$$

$$\Rightarrow\quad \forall\alpha,\beta\in K, \alpha u+\beta v=\alpha F(x)+\beta F(y)=F(\alpha x+\beta y)$$

anche $\alpha u+\beta v\in\mathcal{R}(F)$.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratori prof. Maria Rosaria Rizzardi A.A. 2022/2023

Esempio 1: Kernel e Range di F

$$F\ :\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

F coincide con $t_A\ :\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

rank(A)=2

$$\mathcal{N}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : F(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Longleftrightarrow \mathcal{N}(F) = \{\underline{0}\}$$

$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(A)$

dim $\mathcal{N}(A)$=0

$$\mathcal{R}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \Longleftrightarrow \mathcal{R}(F) \text{ è il piano orizzontale di } \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{R}(F) = \mathcal{R}(A)$

dim $\mathcal{R}(A)$=2

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Esempio 2: Kernel e Range di F

$$F : A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow F(A) = A - A^{\mathrm{T}} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\mathscr{N}(F) = \{A :\ F(A) = A - A^{\mathrm{T}} = \underline{0}\} \Longleftrightarrow$$

$\mathscr{N}(F)$ è il sottospazio delle *matrici simmetriche* di size (3×3)

$$\mathscr{R}(F) = \left\{ A - A^{\mathrm{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ -(a_{12} - a_{21}) & 0 & a_{23} - a_{32} \\ -(a_{13} - a_{31}) & -(a_{23} - a_{32}) & 0 \end{pmatrix}} \right\} \Longleftrightarrow$$

$\mathscr{R}(F)$ è il sottospazio delle *matrici antisimmetriche* di size (3×3)

$$\boxed{M = -M^{\mathrm{T}}}$$

Esercizio: Perché F è una trasformazione lineare?

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi

Esercizio

Continuando il codice MATLAB sotto, calcolare mediante *Symbolic Math Toolbox* il Kernel ed il Range di F dove F è la trasformazione lineare dell'Esempio 2 (pagina precedente).

```
F=@(M) M - M.';
N=3; A=sym('a',N,'real')
A =
[a1_1, a1_2, a1_3]
[a2_1, a2_2, a2_3]
[a3_1, a3_2, a3_3]
assumptions
ans =
[in(a1_1, 'real'), in(a1_2, 'real'), ...
FA=F(A)
FA =
[          0, a1_2 - a2_1, a1_3 - a3_1]
[a2_1 - a1_2,           0, a2_3 - a3_2]
[a3_1 - a1_3, a3_2 - a2_3,           0]
```

```
isAlways(FA == FA.')
...
all(all(isAlways(FA == FA.')))
...
```

$\Rightarrow$ $\mathscr{R}$(FA)=...

```
S=solve(tril(FA),'ReturnConditions',true)
...
```

$\Rightarrow$ $\mathscr{N}$(FA)=...

Esempio

➢ La trasformazione che associa ad ogni funzione derivabile $f(x)$ la sua derivata $f'(x)$ è lineare

La proprietà di linearità segue dalle proprietà della derivata:

- La derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivate.
- La derivata del prodotto di uno scalare per una funzione è il prodotto dello scalare per la derivata della funzione.

Esercizio

Quale è il Kernel di tale trasformazione?

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

$$\underset{\text{dominio}}{} \qquad \underset{\text{codominio}}{}$$

$F \; : \; U \longrightarrow V$ $\quad F$ è una trasf. lineare tra spazi vettoriali.

Teorema

$$F \; : \; U \longrightarrow V$$

F **iniettiva** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}(F) = \{\underline{0}\}$

e

F **suriettiva** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}(F) = V$

In particolare per $t_{A(m\times n)} : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow Ax \in \mathbb{R}^m$

t_A **iniettiva** $\Longleftrightarrow$ $\text{rango}(A) = n \qquad \mathcal{N}(t_A) = \mathcal{N}(A)$

e

t_A **suriettiva** $\Longleftrightarrow$ $\text{rango}(A) = m \qquad \mathcal{R}(t_A) = \mathcal{R}(A)$

Esempio

$$F : (u_1,u_2)^T \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (u_1,u_2,0)^T \in \mathbb{R}^3$$

è una ***trasformazione lineare iniettiva***.

È lineare perché

$$F \equiv t_A : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$$

dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ed è iniettiva perché …

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow F(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq F(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}(F)=\{\underline{0}\}$ e $\mathcal{R}(F)$=piano cartesiano di eq. $z=0$ dello spazio tridimensionale.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Esempio: Fissato un vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, la trasformazione

$$F\ :\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \alpha = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

è una trasformazione lineare suriettiva, ma non iniettiva.

per esempio, $\boldsymbol{v} = (3\ 2\ 1)^T$

È lineare perché $\quad F \equiv t_A : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{y} = t_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

dove $\quad A = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)$

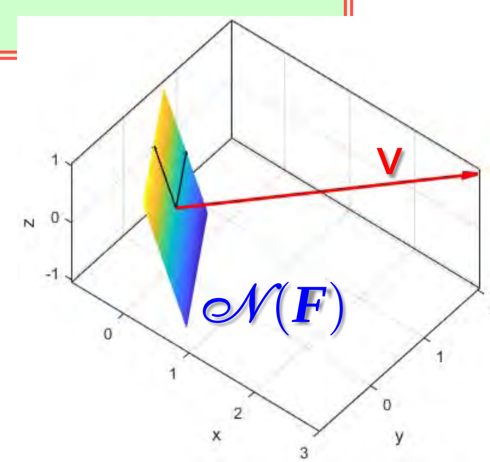
È suriettiva perché … $\forall \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \exists ?\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \alpha \quad \Leftrightarrow$

$A\boldsymbol{u} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \alpha \quad$ sistema lineare inderdeterminato

$\Rightarrow$ F non è iniettiva.

```
syms a b real;              v=[3 2 1]';
x=sym('x',[3 1],'real'); y=sym('y',[3 1],'real');
F=@(u) dot(v,u);
F1=F(a*x + b*y); F2=a*F(x) + b*F(y);
isAlways(F1 == F2) % Linearità
ans =
  logical
   1
```

```
A=[3 2 1]; isAlways(F(x) == A*x)
ans =
  logical
   1
```



Esercizio

dato v=[3;2;1], mediante il Symbolic Math Toolbox:

- verificare che F è suriettiva, ma non iniettiva;
- calcolare e visualizzare i sottospazi $\mathcal{N}(F)$ e $\mathcal{R}(A^T)$.

Rappresentazione grafica della trasformazione lineare t_A associata ad una matrice $A(m\times n)$

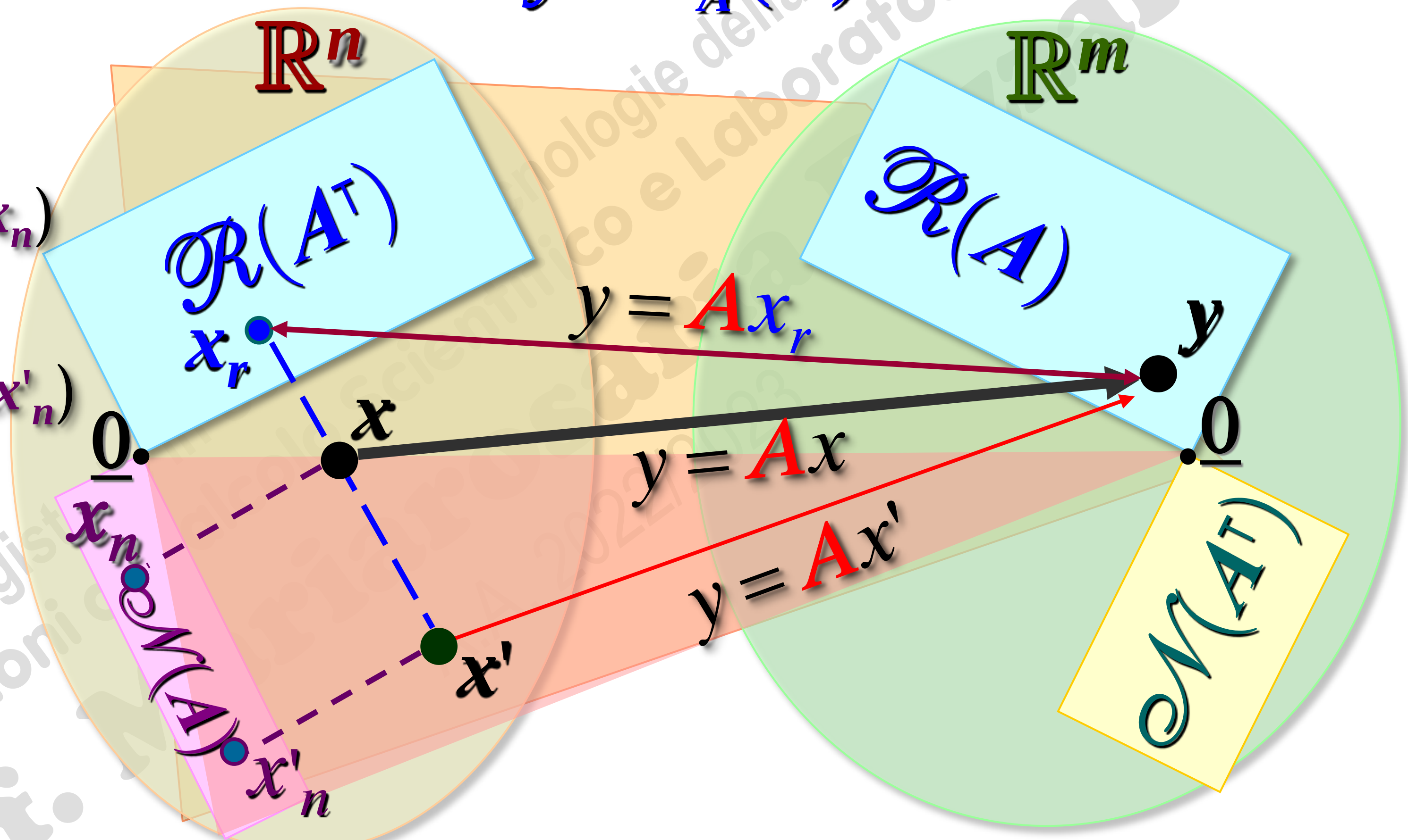
$$t_A \ : \ x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$x = x_r + x_n$

$Ax = A(x_r + x_n)$

$x' = x_r + x'_n$

$Ax' = A(x_r + x'_n)$



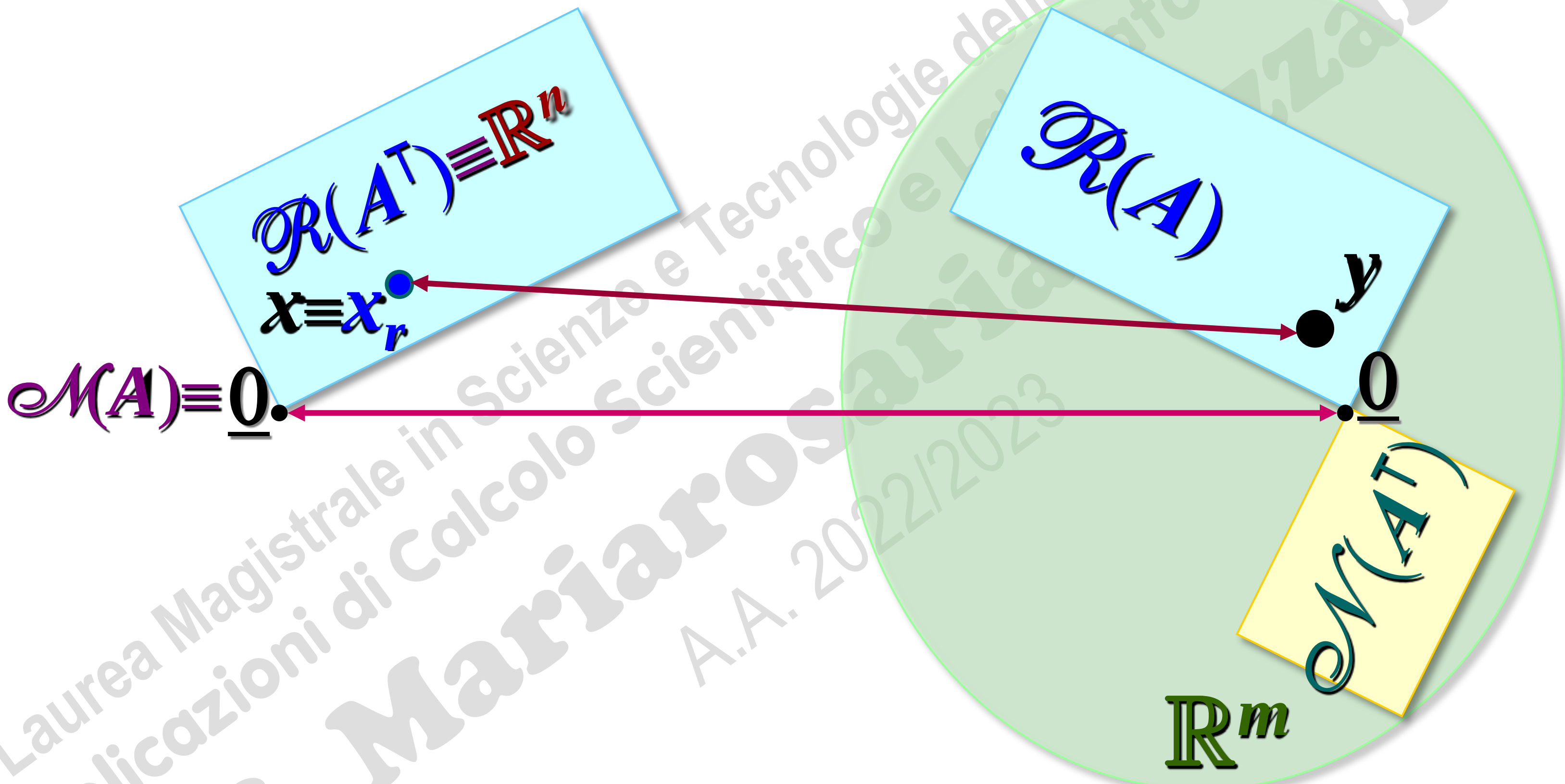
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T) \qquad \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$$

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^{\perp} \qquad \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^T)^{\perp}$$

Laurea Magistrale ... Applicazioni ... prof. ... Tecnologie della Navigazione ... Scientifico e Laboratorio di ... 2022/2023

Caso di trasformazione t_A iniettiva

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$$



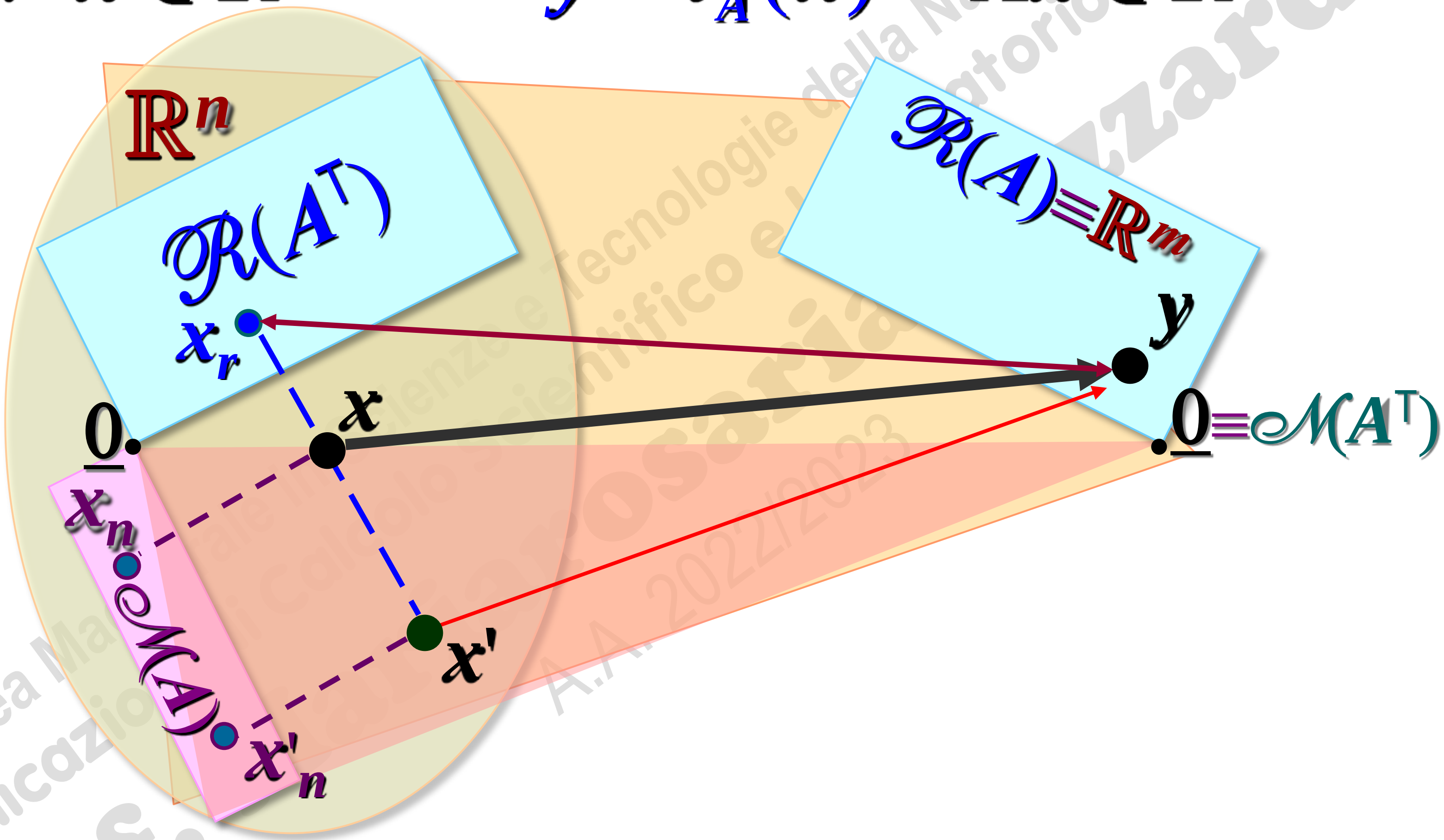
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \qquad \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$$

$$\mathcal{N}(A) = \{\underline{0}\} \qquad \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^T)^{\perp}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Caso di trasformazione t_A suriettiva

$$t_A \quad : \quad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$$



$$\mathbb{R}^n = \mathscr{N}(A) \oplus \mathscr{R}(A^T) \qquad \mathbb{R}^m = \mathscr{R}(A)$$

$$\mathscr{N}(A) = \mathscr{R}(A^T)^\perp \qquad \mathscr{N}(A^T) = \{\underline{0}\}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

$$t_A : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow Ax = y \in \mathbb{R}^m$$

$$\Phi = \boxed{t_{A/\mathscr{R}(A^T)}} : x_r \in \mathscr{R}(A^T) \longrightarrow Ax_r = y \in \mathscr{R}(A)$$

Φ è la restrizione di t_A a $\mathscr{R}(A^T)$

Teorema

La restrizione Φ (della trasformazione t_A) tra lo Spazio delle Righe $\mathscr{R}(A^T)$ e lo Spazio delle Colonne $\mathscr{R}(A)$, è **biettiva**.

Ciò significa che:

$\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$ sono **isomorfi**.

In pratica, $\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$ hanno la stessa "forma" geometrica!

(prof. M. Rizzardi)

Dimostrazione

Tesi: $A(m\times n)\ \forall y\in\mathscr{R}(A)\ \ \exists!\, x_r\in\mathscr{R}(A^T)\ :\ Ax_r = y$

$$\Phi\ :\ x_r\in\mathscr{R}(A^T)\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow Ax_r = y\in\mathscr{R}(A)\subseteq\mathbb{R}^m$$

Per definizione di *Spazio delle Colonne*, $\forall y\in\mathscr{R}(A)$, $\exists x\in\mathbb{R}^n :\ Ax = y$.

Poiché $\mathbb{R}^n=\mathscr{N}(A)\oplus\mathscr{R}(A^T)$, in generale $x\in\mathbb{R}^n$ può scriversi come:

$$x = x_r + x_n\ :\ \ x_r\in\mathscr{R}(A^T)\ \text{ and }\ x_n\in\mathscr{N}(A)$$

$$\forall y\in\mathscr{R}(A) \Longrightarrow \exists x_r : y = Ax = Ax_r + Ax_n = Ax_r,\ \ x_r\in\mathscr{R}(A^T)$$

Questo prova che Φ è **suriettiva**, cioè $\forall y$, y è l'immagine mediante Φ di un vettore $x_r\in\mathscr{R}(A^T)$.

Per provare che Φ è **iniettiva**, si supponga che due vettori abbiano la stessa immagine: $\exists\ x_r, x'_r\in\mathscr{R}(A^T) : Ax_r = Ax'_r = y$

$$\Longrightarrow A(x_r - x'_r) = \underline{0} \Longrightarrow (x_r - x'_r)\in\mathscr{R}(A^T)\cap\mathscr{N}(A)$$

Ma ciò è possibile se, e solo se, $x'_r=x_r$ essendo $\mathbb{R}^n=\mathscr{N}(A)\oplus\mathscr{R}(A^T)$.

Attenzione!

1 $\Phi : x_r \in \mathscr{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi(x_r) = Ax_r = y \in \mathscr{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$

2 $\Phi^{-1} : y \in \mathscr{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \Phi^{-1}(y) = x_r \in \mathscr{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$

3 $\Phi_{A^T} : y \in \mathscr{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow A^T(y) = A^TAx \in \mathscr{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$

La prima trasformazione è un isomorfismo tra $\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$; le altre due sono isomorfismi tra $\mathscr{R}(A)$ e $\mathscr{R}(A^T)$.

La seconda trasformazione è l'isomorfismo inverso della prima.

La seconda e terza trasformazione sono generalmente diversi; esse coincidono solo se A è una matrice ortogonale.

(prof. M. Rizzardi)

Esempio 1: $t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G\downarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

pivot $\Rightarrow$ rank(A)=1

```
A=sym([…])
S=rref(A)
```

Teor.

t_A non è né iniettiva e né suriettiva

```
RAT = colspace(A');
NA  = null(A);
```

```
RA  = colspace(A);
NAT = null(A');
```

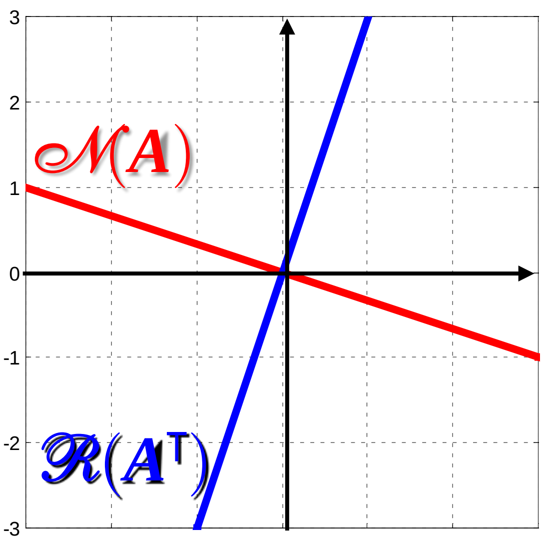
$\mathcal{R}(A^\top)=\text{span}\{(1,3)^\top\}$

$\mathcal{N}(A)=\text{span}\{(-3,1)^\top\}$

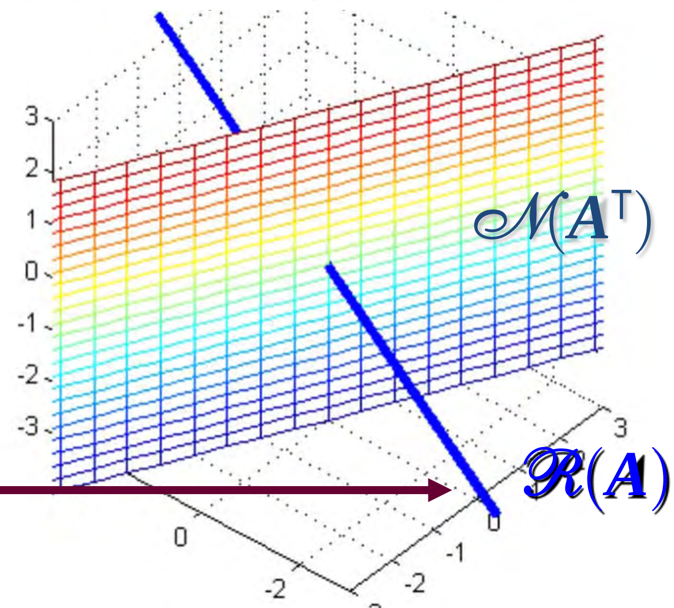
$\mathcal{R}(A)=\text{span}\{(1,2,0)^\top\}$

$\mathcal{N}(A^\top)=\mathcal{R}(A)^\perp=\text{span}\{(-2,1,0)^\top,(0,0,1)^\top\}$

$\mathbb{R}^2$



retta



$\mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}(A^\top)$ e $\mathcal{R}(A)$ isomorfi

Quale isomorfismo tra $\mathcal{R}(A^\top)$ e $\mathcal{R}(A)$?

Trovare l'somorfismo tra $\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

rank(A)=1

$\mathscr{R}(A^T)=\text{span}\{(1,3)^T\}$ $\quad$ $\mathscr{R}(A)=\text{span}\{(1,2,0)^T\}$

$\mathscr{N}(A)=\text{span}\{(-3,1)^T$ $\quad$ $\mathscr{N}(A^T)=\text{span}\{(-2,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

si cerca $\quad \Phi \;:\; x_r \in \mathscr{R}(A^T) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Phi(x_r) = Ax_r = y \in \mathscr{R}(A) \subset \mathbb{R}^3$

biettiva

Per la biettività, $\forall y \in \mathscr{R}(A)$ si vuol trovare un solo x_r ($\exists!\, x_r$) tale che

$$\Phi^{-1} : y \in \mathscr{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Phi^{-1}(y) = \boxed{x_r} \in \mathscr{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\mathscr{R}(A)=\text{span}\{(1,2,0)^T\}$

$\forall y \in \mathscr{R}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : y=\alpha(1,2,0)^T$, ed $\exists\, x \in \mathbb{R}^2 \;:\; Ax=y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 + 3x_2 = \alpha \\ \cancel{2x_1 + 6x_2 = 2\alpha} \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\; x_1 + 3x_2 = \alpha$ $\quad$ sistema lineare inderdeterminato $\Longrightarrow$ ∞ soluzioni

La soluzione generale x del sistema indeterminato si scrive $\Leftrightarrow$ $x = x_p + x_n$ dove: x_n è un vettore in $\mathscr{N}(A)$ e x_p è una soluzione particolare di $Ax=y$.

$x_p = \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = \alpha \end{matrix}$

```
syms a real; y=a*RA; xp=A\y;
```

In generale $x_p \in \mathbb{R}^2$, ma $x_p \notin \mathscr{R}(A^T)$. Poiché $\mathbb{R}^2=\mathscr{R}(A^T)\oplus\mathscr{N}(A)$ $\Longrightarrow$ $x_p = \boxed{x_r} + x'_n$ e tale decomposizione è unica.

```
B=[RAT NA]; % base di R^2
coef=B\xp;   xr=RAT*coef(1)
```


(prof. M. Rizzardi)

Appunti di ... Mariarosaria Rizzardi ... A.A. 2022/2023

Esempio 2: $t_A \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$

dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = S \Rightarrow t_A$ suriettiva

pivot

rank(A)=2

in $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{N}(A)=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$

$\mathcal{R}(A^T)=\text{span}\{(1,2,0)^T,(0,1,1)^T\}$

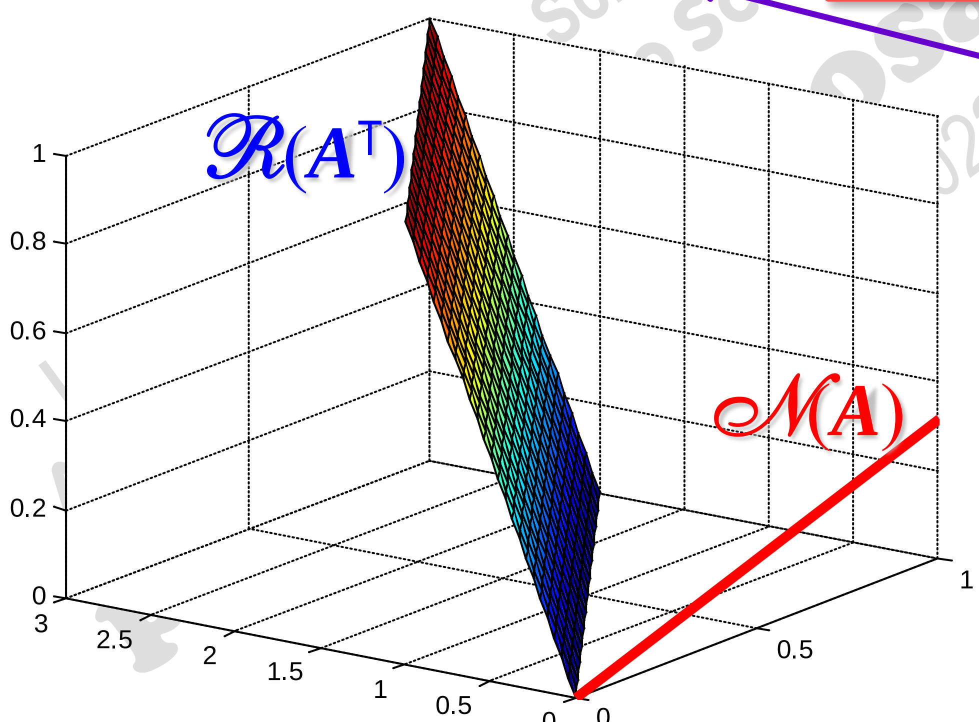
```
A = sym([…]);
RAT = colspace(A');
NA  = null(A);
RA  = colspace(A);
NAT = null(A');
```

in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{N}(A^T)=\{\underline{0}\}$

$\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^2$

piani



$\mathcal{R}(A^T)$ e $\mathcal{R}(A)$ isomorfi

Quale isomorfismo tra $\mathcal{R}(A^T)$ e $\mathcal{R}(A)$?

$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Trovare l'somorfismo tra $\mathcal{R}(A^T)$ e $\mathcal{R}(A)$

$\mathcal{R}(A^T)=\text{span}\{(1,2,0)^T,(0,1,1)^T\}$ $\quad$ $\mathcal{R}(A)=\text{span}\{(1,0)^T,(2,1)^T\}$

$\mathcal{N}(A)=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$ $\quad$ $\mathcal{N}(A^T)=\{\underline{0}\}$

si cerca $\quad \Phi \ : \ x_r \in \mathcal{R}(A^T) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Phi(x_r) = Ax_r = y \in \mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}^2$

Esercizio: Calcolare l'isomorfismo come visto nell'esempio precedente.

Si può procedere come prima, ma ora si può sfruttare il fatto che **A** sia una matrice di rango massimo dove il rango = num. righe.

$\forall x_r \in \mathcal{R}(A^T) \quad x_r = A^T(\alpha,\beta)^T \longrightarrow \Phi(x_r) = y = A\,x_r = \boxed{AA^T}(\alpha,\beta)^T \in \mathcal{R}(A)$ invertibile

$$\forall x_r \in \mathcal{R}(A^T) \iff x_r = A^T(\alpha,\beta)^T$$

$$t_M \ : \ (\alpha,\beta)^T \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = AA^T(\alpha,\beta)^T \in \mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$$

$$t_M^{-1} : y \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{R}(A) \longrightarrow (\alpha,\beta)^T = [AA^T]^{-1} y \in \mathbb{R}^2$$

$$\Phi^{-1}(y) = x_r = A^T(\alpha,\beta)^T \in \mathcal{R}(A^T)$$

Esercizio: Implementare tale algoritmo e verificare il risultato.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Esempio 3: $t_A \; : \; x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^3$

dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

rank(A)=2

pivot

➡ t_A iniettiva

```
A = sym([…]);
RAT = colspace(A');
NA  = null(A);
RA  = colspace(A);
NAT = null(A');
```

in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{N}(A)=\{\underline{0}\}$

$\mathcal{R}(A^T)=\mathbb{R}^2$

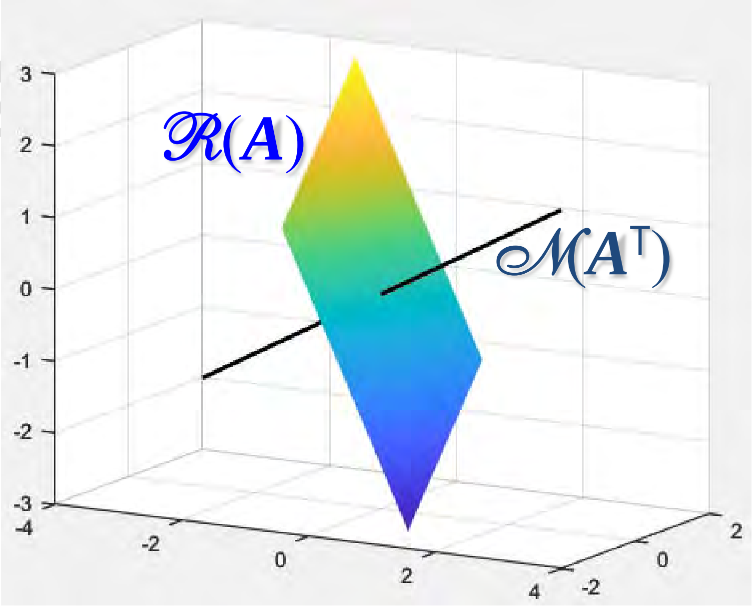
in $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{N}(A^T)=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$

$\mathcal{R}(A)=\text{span}\{(1,0,-2)^T,(0,1,1)^T\}$

piani

$\mathcal{R}(A^T)$ e $\mathcal{R}(A)$ isomorfi



Quale isomorfismo tra $\mathcal{R}(A^T)$ e $\mathcal{R}(A)$?

Trovare l'somorfismo tra $\mathscr{R}(A^T)$ e $\mathscr{R}(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$\mathscr{N}(A)=\{\underline{0}\}$ $\qquad$ $\mathscr{N}(A^T)=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$

$\mathscr{R}(A^T)=\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\mathscr{R}(A)=\text{span}\{(1,0,-2)^T,(0,1,1)^T\}$

si cerca $\quad \Phi\ :\ x_r\in\mathscr{R}(A^T)\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \Phi(x_r)=Ax_r=y\in\mathscr{R}(A)\subset\mathbb{R}^3$

Per la biettività, $\forall y\in\mathscr{R}(A)$ si vuol trovare un solo x_r ($\exists!\ x_r$) tale che

$$\Phi^{-1}: y\in\mathscr{R}(A)\subseteq\mathbb{R}^3 \longrightarrow \Phi^{-1}(y)=\boxed{x_r}\in\mathscr{R}(A^T)\subseteq\mathbb{R}^2$$

Ora si può sfruttare il fatto che A sia una matrice di rango massimo dove il rango = num. colonne.

$$\forall y\in\mathscr{R}(A) \Leftrightarrow \exists\, x\in\mathbb{R}^2 : Ax=y \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{A^TA}\,x=A^Ty$$

invertibile

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x=(A^TA)^{-1}A^Ty}$$

Ma $x\in\mathbb{R}^2=\mathscr{R}(A^T)$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $\boxed{x}=(A^TA)^{-1}A^Ty$

Esercizio: Implementare tale algoritmo e verificare il risultato.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Cambiamento di base

$$t_A : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^n$$

Se $A(n\times n)$ è una matrice non singolare, allora l'automorfismo dato da t_A può essere considerato un cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$

Le colonne di U sono una base di $\mathbb{R}^n$
$U = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n)$

Le colonne di V sono un'altra base di $\mathbb{R}^n$
$V = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x = U\underline{\alpha}$$

$\underline{\alpha}$: componenti di x rispetto alla base U

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x = V\underline{\beta}$$

$\underline{\beta}$: componenti di x rispetto alla base V

$$t_A : \underline{\alpha} \longrightarrow \underline{\beta}$$

$$\underline{x} = \boxed{U\underline{\alpha} = V\underline{\beta}} = \underline{x}$$

il vettore x è lo stesso, ma è scritto rispetto a basi diverse

$$U\underline{\alpha} = V\underline{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\beta} = \boxed{V^{-1}U}\,\underline{\alpha} \longleftarrow A$$

matrice del cambiamento di base

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie Applicazioni di Calcolo Scientifico e ... prof. Mariarosaria Rizzardi A.A. 2022/2023

Esempio 3

In un esempio precedente, si sono calcolate le componenti di

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$ rispetto alla base data dalle colonne di $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\underline{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ $\quad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\parallel$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}\underline{\beta}\in\mathbb{R}^3$$ rispetto alla base $\quad \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\beta}=\boxed{V^{-1}U}\;\underline{\alpha}$$

A: matrice del cambiamento di base

```
U=eye(3); V=[1 1 1;0 1 2;0 0 3];
A=V\U;  % ⇔ inv(V)*U matrice di cambio di base
alpha=[2;-1;1]; format rat; beta=A*alpha
beta =
      10/3
      -5/3
       1/3
```

```
disp(V*beta)
       2
      -1
       1
```

$\boldsymbol{x}$

OK!

Si è ottenuto lo stesso risultato di prima, quando è stato risolto un sistema lineare

Vantaggio: se la matrice del cambiamento di base è nota, allora non si deve risolvere un sistema lineare per ogni vettore $\boldsymbol{x}$.

prof.ssa Rosaria Rizzardi - Corso di Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione - Laboratorio di Calcolo Scientifico e ACS - 2022/2023

Esempio 4

Vantaggio nell'usare una base ortonormale

U vecchia base $\qquad \underline{\beta} = \boxed{V^{-1}U}\,\underline{\alpha} \qquad$ V nuova base

matrice del cambiamento di base

V base ortonormale $\Longrightarrow$ $\underline{\beta} = \boxed{V^{T}U}\,\underline{\alpha}$

matrice del cambiamento di base

$$\boxed{V^{-1} = V^{T}}$$

più veloce e più accurata, perché non si è dovuta calcolare la matrice inversa!

```
U=[1 0 1;1 1 0;1 2 3]'; [Q,R]=qr(U); disp([inv(Q) Q'])
   -0.7071   -0.0000   -0.7071        -0.7071         0   -0.7071
   -0.4082   -0.8165    0.4082        -0.4082   -0.8165    0.4082
   -0.5774    0.5774    0.5774        -0.5774    0.5774    0.5774
```

=

Q matrice ortogonale

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Appunti di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2022/2023

Esempio 3 (cont.)

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \mathscr{R}(V)$$

```
U=eye(3);  alfa=[2;-1;1];  x1=U*alfa
x1 =
     2
    -1
     1
V=[1 1 1;1 2 0;0 3 0];  beta=(V\U)*alfa;
x2=V*beta
x2 =
     2
    -1
     1
[Q,R]=qr(V);  gamma=(Q'*U)*alfa;
x3=Q*gamma
x3 =
     2
    -1
     1
```

α : x rispetto alla base standard (1ª base)

β : x rispetto alle colonne di V (2ª base: matrice di cambio base)

γ : x rispetto alle colonne di Q (3ª base: base ortonormale)

i vettori sono gli stessi!