SIS Scuola Interdipartimentale delle Scienze, dell'Ingegneria e della Salute

DiST Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_04

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - Spazi e sottospazi Affini.
  - Proprietà.
  - Parallelismo tra sottospazi affini.
  - Intersezione di sottospazi affini.
  - Punti affinemente indipendenti e sistemi di riferimento affini di sottospazi.

Spazi Affini

Da un punto di vista geometrico, le curve e le superfici sono solitamente considerate come insiemi di "punti" con alcune proprietà speciali. Tipicamente, si è interessati a proprietà geometriche invarianti rispetto a determinate trasformazioni come, ad esempio, traslazioni, rotazioni, proiezioni, ecc.

Modellare lo spazio dei punti come uno Spazio Lineare non è molto soddisfacente, soprattutto perché il punto corrispondente al vettore nullo, chiamato **origine**, svolge un ruolo speciale, quando in realtà non c'è motivo di avere un'origine privilegiata.

Uno Spazio Affine è una struttura geometrica che rende possibile trattare punti, curve, superfici, etc., indipendentemente da una scelta specifica di un sistema di coordinate (nessuna origine privilegiata).

Definizione di Spazio Affine

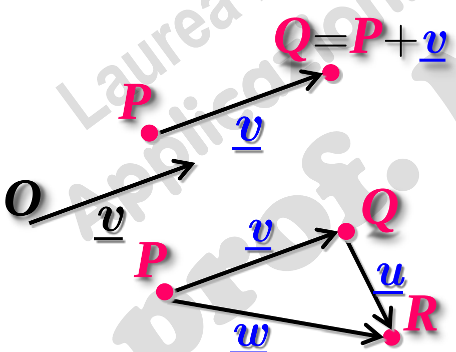
La struttura $\langle \Sigma, \mathbb{V}, \varphi \rangle$ è detta **Spazio Affine** Σ, se:

- Σ (detto spazio geometrico) è un insieme non vuoto di **punti** P;
- $\mathbb{V}$ (detto spazio direttore) è uno Spazio Lineare sul campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$);
- φ (detta funzione differenza) $\varphi \,:\, (P,Q) \in \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \varphi(P,Q) = \vec{v} \in \mathbb{V}$ è un'applicazione, di solito denotata come

$$\varphi(P,Q) = \boxed{Q - P} = \overrightarrow{PQ} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad Q = P + \underline{v}$$

($\underline{v}$: vettore spostamento o traslazione)

e tale che:



(1) $\forall P \in \Sigma, \forall v \in \mathbb{V} \quad \exists! Q \in \Sigma \,:\, \varphi(P,Q) = v$

(2) $\forall P,Q,R \in \Sigma \quad \varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) = \varphi(P,R)$

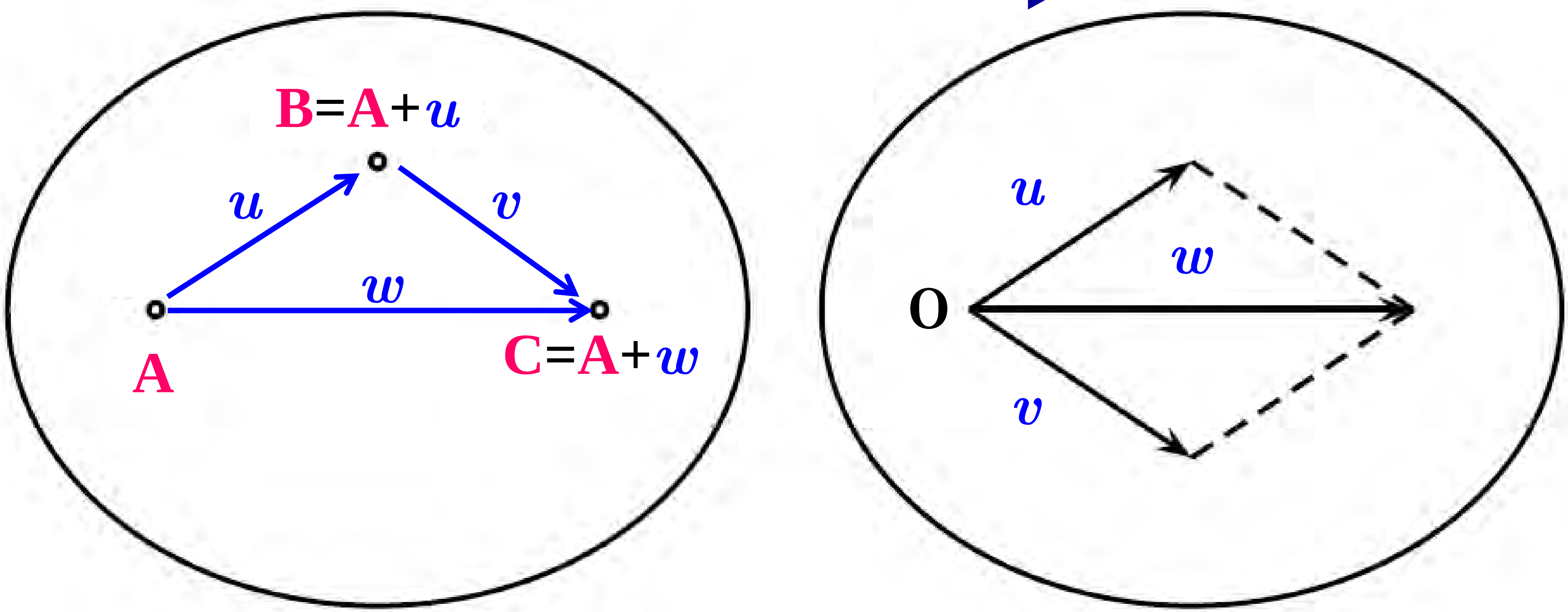
Assioma "Testa-Coda" ("Head-to-Tail" Axiom)

Rappresentazione intuitiva di Spazio Affine

$$\langle \Sigma, \mathbf{V}, \varphi \rangle$$

A, **B**, **C**: punti $\qquad$ u, v, w: vettori

$$\Sigma \xrightarrow{\varphi(P,Q)} \mathbf{V}$$



Esempi di Spazi Affini

- L'insieme dei punti di una retta di $\mathbb{R}^n$, anche non passante per l'origine.
- L'insieme dei punti di un piano di $\mathbb{R}^n$, anche non passante per l'origine.
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $Ax=b$ non omogeneo e compatibile.

Gli Spazi Lineari contengono i cosiddetti vettori liberi.

Gli Spazi Affini introducono la "somma tra un punto ed un vettore":

$$\varphi(P,Q)=Q-P=\overrightarrow{PQ}=\vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad Q=P+\varphi(P,Q)=P+\vec{v}$$

Essi contengono i cosiddetti vettori applicati (o vettori Euclidei o geometrici) che collegano un punto iniziale P ad un punto finale Q.

Proprietà

Si fissi un punto $O \in \Sigma$, e si ponga $\forall P \in \Sigma, \quad \varphi(O,P) = \overrightarrow{OP}$, allora

- $\forall P \in \Sigma, \quad \varphi(P,P) = \vec{0}$
- $\forall P,Q \in \Sigma, \ \varphi(P,Q) + \varphi(Q,P) = \vec{0} \implies$ si scrive $\varphi(Q,P) = -\varphi(P,Q)$

- Ogni Spazio Lineare V può essere dotato di struttura di Spazio Affine $\langle V,V,\varphi\rangle$ [scegliendo un'origine O e definendo $\varphi(O,A) = a$ e $\varphi(A,B) = b - a$, $\forall a,b \in V$, in modo che risulti $V = \{A : A = O + \varphi(O,A) = O + a, \ \forall a \in V\}$]
- Ogni Spazio Affine Σ può essere dotato di struttura di Spazio Lineare [definendo i vettori dello Spazio Lineare direttore come $a = \varphi(O,A) \ \forall A \in \Sigma$, dove O è l'origine]

Uno **Spazio Affine** Σ, il cui spazio direttore V è uno Spazio Lineare Normato è detto Spazio Euclideo.

- La dimensione di uno Spazio Affine $\langle \Sigma, \boldsymbol{V}, \varphi \rangle$ è definita come

$$\dim \Sigma = \dim \boldsymbol{V}$$

Per assegnare un sistema di riferimento ad uno Spazio Affine [sistema di riferimento affine $\mathscr{R}(\boldsymbol{O}, \mathrm{B})$], è necessario:

- stabilire un punto $\boldsymbol{O} \in \Sigma$ (l'origine del riferimento $\mathscr{R}$).
- scegliere una base $\mathrm{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ per $\boldsymbol{V}$.

Nel sistema di riferimento $\mathscr{R}(\boldsymbol{O}, \mathrm{B})$, le coordinate affini $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ di un punto $\mathbf{P}$ sono definite come le componenti del vettore $\varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{P})$: $\mathbf{P} = \boldsymbol{O} + \varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{P})$, rispetto alla base B e all'origine $\boldsymbol{O}$.

Il vettore che collega due punti ha per componenti la differenza tra le coordinate dei due punti.

DIM.: se $\boldsymbol{V} = \mathrm{span}\{\mathrm{B}\} = \mathrm{span}\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ allora $\forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Sigma$

$\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{O}) = -\varphi(\mathbf{O}, \mathbf{P})$ $\Rightarrow$

(2)

$$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = \boxed{\varphi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \varphi(\mathbf{P}, \boldsymbol{O}) + \varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{Q})} = \varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{Q}) + \varphi(\mathbf{P}, \boldsymbol{O}) =$$

$$= \varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{Q}) - \varphi(\boldsymbol{O}, \mathbf{P}) = (q_1 - p_1)\underline{b}_1 + (q_2 - p_2)\underline{b}_2 + \dots + (q_n - p_n)\underline{b}_n$$

Un sottoinsieme non vuoto $\Sigma' \subseteq \Sigma$ si dice **Sottospazio Affine** di $\langle \Sigma, V, \varphi \rangle$ se esiste V', sottospazio lineare di V, tale che la restrizione di φ a Σ' ammetta V' come spazio direttore.

Particolari sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ ($\Sigma = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$)

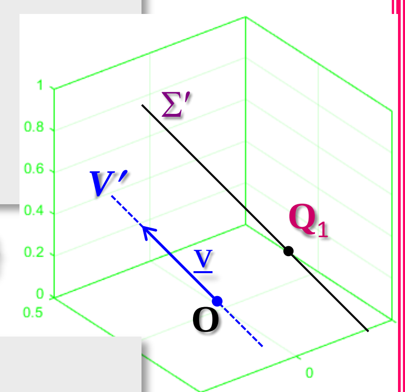
L'unico sottospazio lineare di $V = \mathbb{R}^n$ con dim$=0$ è $\{\underline{0}\}$: quindi tutti i punti di $\Sigma = \mathbb{R}^n$ sono gli unici sottospazi affini con dim$=0$.

Le rette di $\mathbb{R}^n$ sono gli unici sottospazi affini con dim$=1$.

Infatti, dato $\underline{v} \in V$: $V' = \text{span}\{\underline{v}\} = \lambda\, \underline{v}$ (dim $V'=1$), una retta ha eq. parametrica $\longrightarrow \Sigma' = \{\mathbf{P} \in \Sigma : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \lambda\, \underline{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

(Σ' è detto sottospazio affine passante per P_0 e parallelo a V')

Per esempio, $\Sigma' \subseteq \mathbb{R}^3$ è la retta : $\Sigma' \equiv \mathbf{Q}_1 + V'$, parallela a $V' = \text{span}\{\underline{v}\}$



I piani di $\mathbb{R}^n$ sono gli unici sottospazi affini con dim$=2$.

eq. parametrica $\longrightarrow \Sigma'' = \{\mathbf{P} \in \Sigma : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \lambda\, \underline{v} + \mu\, \underline{w} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Per esempio, $\Sigma'' \subseteq \mathbb{R}^3$ è il piano : $\Sigma'' \equiv \mathbf{P}_0 + V''$, parallelo a $V'' = \text{span}\{\underline{v}, \underline{w}\}$

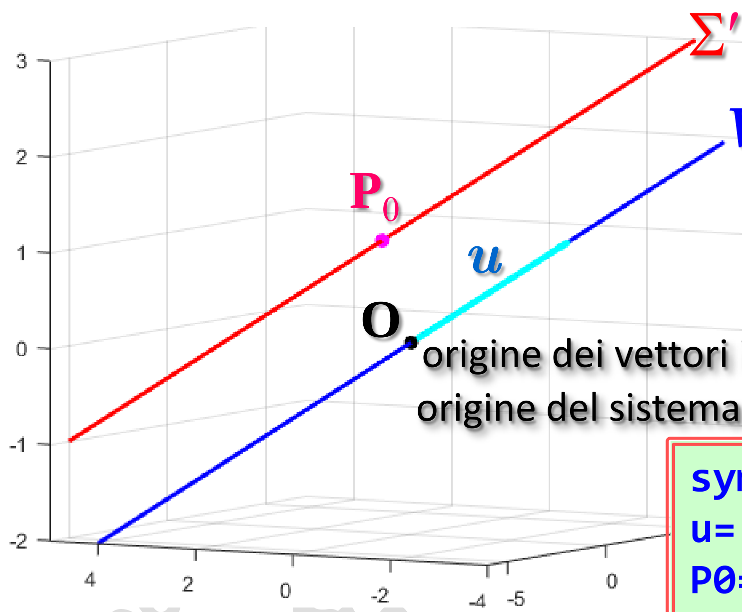
Esempi di Sottospazi Affini reali

- L'insieme dei punti di una retta di $\mathbb{R}^3$, anche non passante per l'origine:

$$\Sigma' = \left\{ \mathbf{P} \in \Sigma = \mathbb{R}^3 \;:\; \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \lambda\, \underline{\boldsymbol{u}},\;\; \lambda \in \mathbb{R},\; \underline{\boldsymbol{u}} \in V = \mathbb{R}^3 \right\}$$

(eq. parametrica)

V: spazio direttore di $\mathbb{R}^3$



$$V' = \text{span}\{\underline{\boldsymbol{u}}\}$$

V': spazio direttore di Σ'

```
syms a real
u=[3 -2 1]'; V=a*u;  % sottospazio direttore della retta
P0=[1 1 1]'; S=P0+V;  % retta per P0: sottospazio affine
fplot3(S(1),S(2),S(3),[-2 2],'Color','r','LineWidth',2)
hold on
fplot3(V(1),V(2),V(3),[-2 2],'Color','b','LineWidth',2)
plot3(0,0,0,'ok','MarkerFaceColor','k')
plot3(P0(1),P0(2),P0(3),'om','MarkerFaceColor','m')
quiver3(0,0,0,u(1),u(2),u(3),1,'Color','c','LineWidth',3)
```

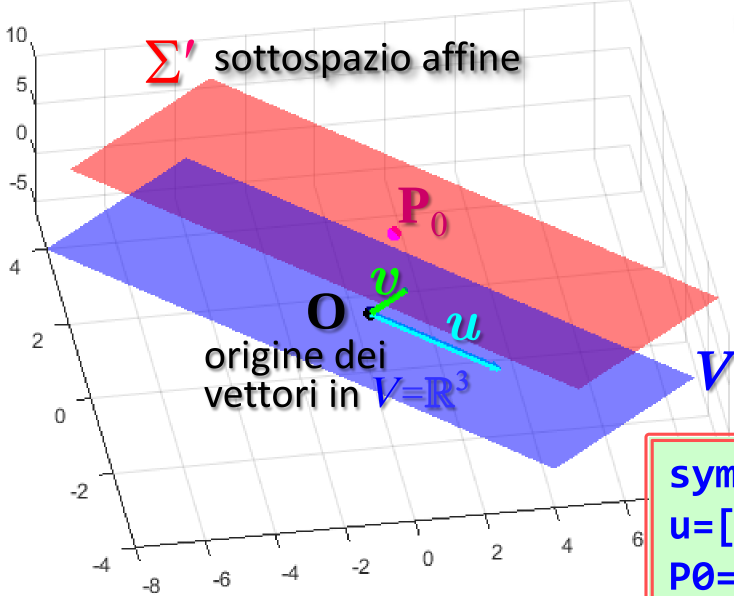
Esempi di Sottospazi Affini reali

- L'insieme dei punti di un piano di $\mathbb{R}^3$, anche non passante per l'origine:

$$\Sigma' = \{ \mathbf{P} \in \Sigma = \mathbb{R}^3 : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underline{u}, \underline{v} \in V = \mathbb{R}^3 \}$$

(eq. parametrica)

V: spazio direttore di $\Sigma = \mathbb{R}^3$



$V' = \text{span}\{\underline{u}, \underline{v}\}$

V': spazio direttore di Σ'

```
syms a b real
u=[3 -2 1]'; v=[1 0 2]'; V=[u v]*[a;b];
P0=[1 1 4]'; S=P0+V;
fmesh(V(1),V(2),V(3),[-2 2],'EdgeColor','none', ...
                            'FaceColor','b','FaceAlpha',0.5)
hold on
quiver3(0,0,0,u(1),u(2),u(3),1,'Color','c','LineWidth',3)
quiver3(0,0,0,v(1),v(2),v(3),1,'Color','g','LineWidth',3)
fmesh(S(1),S(2),S(3),[-2 2],'EdgeColor','none', ...
                            'FaceColor','r','FaceAlpha',0.5)
plot3(P0(1),P0(2),P0(3),'om','MarkerFaceColor','m')
plot3(0,0,0,'ok','MarkerFaceColor','k')
```

Parallelismo e intersezione tra Sottospazi Affini

Due **sottospazi affini** $\Sigma_1,\Sigma_2\subseteq\Sigma$, di **egual dimensione**, si dicono paralleli se hanno lo stesso spazio direttore.

Esempi: rette parallele; piani paralleli.

Due **sottospazi affini** $\Sigma_1,\Sigma_2\subseteq\Sigma$ di **dimensioni diverse**, si dicono paralleli se lo spazio direttore del più piccolo è contenuto nello spazio direttore dell'altro.

Esempio: una retta parallela ad un piano.

L'intersezione $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ tra due **sottospazi affini** $\Sigma_1,\Sigma_2\subseteq\Sigma$ è l'insieme di punti in Σ che appartengono ad entrambi. Questi punti devono soddisfare entrambe le equazioni parametriche di Σ_1 e di Σ_2.

Esempi: intersezione tra rette, tra piani, tra una retta e un piano.

Esercizi

Verificare quali tra i seguenti sottospazi affini sono fra loro paralleli.

In $\mathbb{R}^2$

Σ_1 : $x - 2*y + 1 = 0$

Σ_2 : $x - 2*y + 3 = 0$

Σ_3 : $2*x + y + 1 = 0$

Σ_4 : $x - y + 1 = 0$

In $\mathbb{R}^3$

Σ_1 : $P = [2;1;2] + \rho[0;0;1]$

Σ_2 : $x - y = 0$

Σ_3 : $P = [1;0;0] + \rho[1;-1;0]$

Σ_4 : $x - y + z + 1 = 0$

Disegnare in MATLAB i sottospazi ed i loro spazi direttori.

Laboratorio

Trovare l'intersezione tra i due sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$:

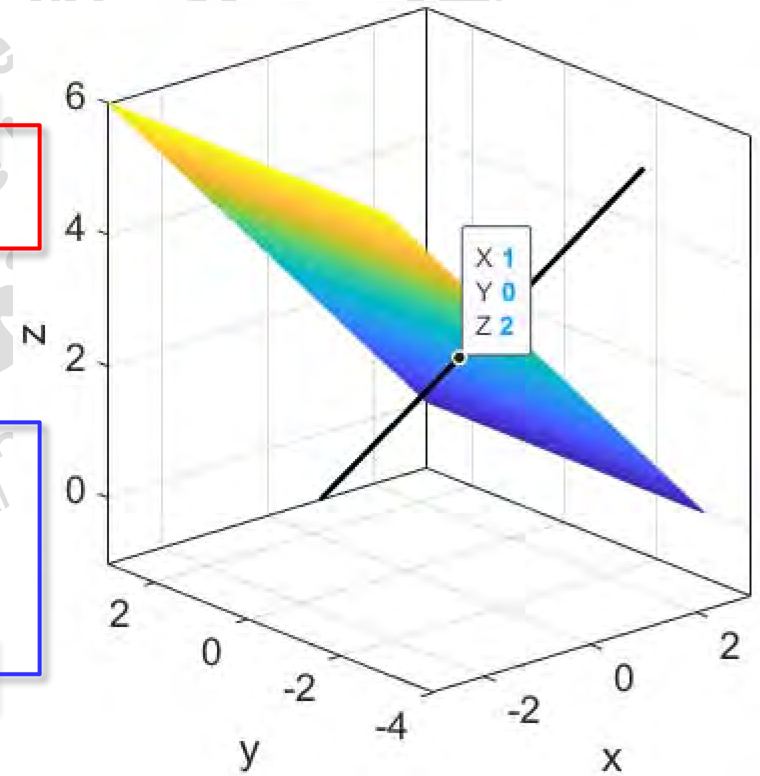
$$\pi \;:\; x+z=3, \qquad\qquad r \;:\; (x,y,z)^T = (1,1,1)^T + \lambda(0,1,-1)^T$$

Disegno dei sottospazi:

numericamente

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,55));
z=3-x; h=mesh(x,y,z); % disegna il piano
axis equal; box on; hold on
syms a real
r=[1,1,1]' + a*[0,1,-1]';
h=fplot3(r(1),r(2),r(3),[-5 2]);
set(h,'Color','k','LineWidth',2)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```

symbolicamente



Due algoritmi risolutori:

1. dall'eq. cartesiana all'eq. parametrica
2. dall'eq. parametrica all'eq. cartesiana

1. dall'eq. cartesiana all'eq. parametrica

La retta r è già data mediante la sua equazione parametrica:

$$r:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Il piano è espresso in eq. cartesiana π : x+z=3: 1 eq. in 3 incognite (sistema indeterminato). Se nell'eq. di π si scelgono y e z come parametri liberi, si ottiene la sua eq. parametrica:

$$\pi\begin{cases}y=\lambda\\z=\mu\\x=3-\mu\end{cases}\xRightarrow{\lambda=0,\ \mu=0}\boxed{\begin{matrix}y=0\\z=0\\x=3\end{matrix}}$$

punto di π

x + z = 0

spazio direttore di π

```
B=null([1;0;1]')
B  =
    0       -0.70711
    1              0
    0        0.70711
```

base dello sp. direttore

$$\pi:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Per trovare $\pi\cap r$, si deve risolvere il sistema lineare ottenuto imponendo che i punti di coordinate (x, y, z) giacciano sia sul piano che sulla retta:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

riordinamento $\Leftrightarrow$

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

sistema lineare

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

```
A=[0 0 -1;-1 1 0; 1 0 1];    b=[-2;1;1];
param=A\b;
sol1=[1,1,1]' + param(1)*[0,1,-1]'; % ∈r
sol1'
     1       0       2
```

α

coordinate del punto d'intersezione

2. dall'eq. parametrica all'eq. cartesiana

Il piano $\pi : x+z = 3$ è già espresso in equazione cartesiana.

Per la retta r, si scrivano le sue equazioni parametriche scalari e si rimuova il parametro α dal sistema lineare:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ \boxed{\alpha = y-1} \\ z = 1-\alpha \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y+z = 2 \end{cases}$$

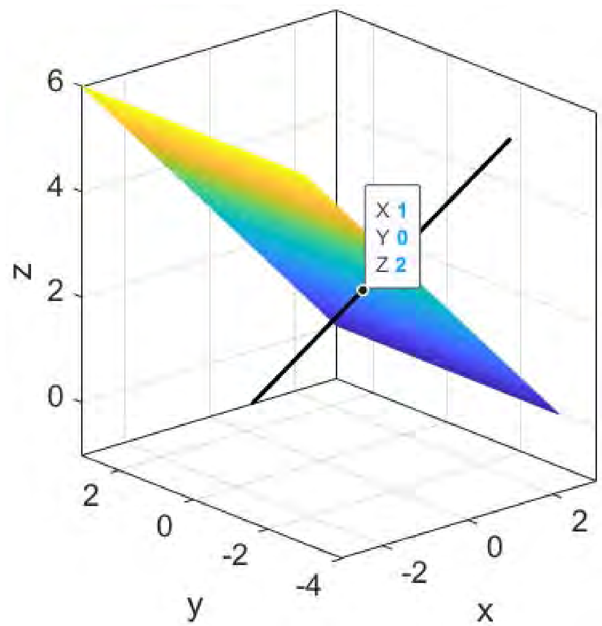
r come intersezione di 2 piani

Per trovare $\pi \cap r$, si risolve il sistema lineare:

$$\pi \cap r : \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y+z = 2 \end{array}\right\} r \\ x+z = 3 \quad \pi \end{cases}$$

```
A=[1 0 0; 0 1 1; 1 0 1];    b=[1;2;3];
sol2=A\b
        1     0     2
```

coordinate del punto d'intersezione



Punti affinemente indipendenti

In uno Spazio Affine, $N+1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_N \in \Sigma$ sono detti **affinemente indipendenti** se, e solo se, gli N vettori

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1},\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2},\ \ldots,\ \vec{v}_N = \overrightarrow{P_0P_N} \in V$$

sono linearmente indipendenti.

V: spazio direttore di Σ

Esempio

```
P=[0 1 -1; 2 3 2]
P =
     0     1    -1
     2     3     2
v=P(:,2:end) - repmat(P(:,1),1,size(P,2)-1)
v =
     1    -1
     1     0
rank(v)
ans =
     2
```

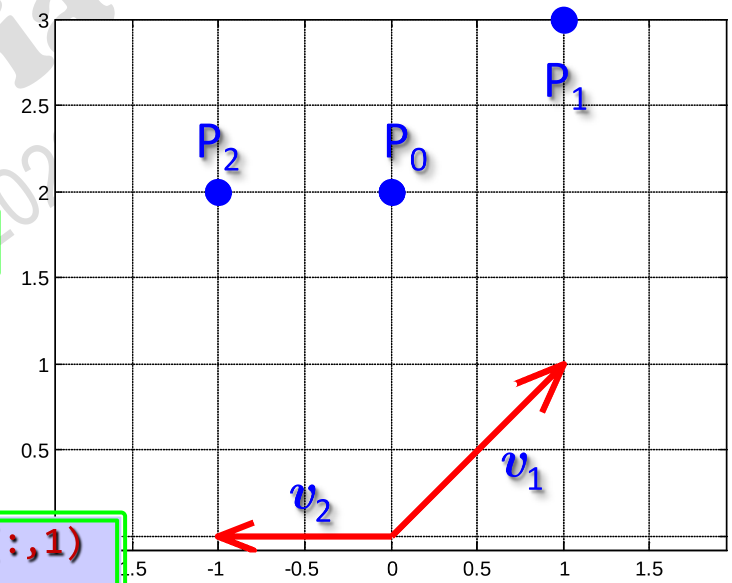
N+1=3 punti

N=2 vettori

linearmente indipendenti

```
repmat(P(:,1),1,size(P,2)-1)
ans =
     0     0
     2     2
```

```
v=P(:,2:end) - P(:,1)
v =
     1    -1
     1     0
```



la funzione **repmat()** non è più necessaria, ma … attenzione …

I punti P_0, P_1, P_2 sono **affinemente indipendenti**

Punti affinemente indipendenti

Se gli N+1 punti $P_0, P_1, \ldots, P_N \in \Sigma$ sono affinemente indipendenti nello Spazio Affine Σ, allora, gli N vettori

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1},\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2},\ \ldots,\ \vec{v}_N = \overrightarrow{P_0P_N} \in V$$

V: spazio direttore di Σ

possono essere scelti come base B di V: in tal modo viene a definirsi un nuovo sistema di riferimento affine $\mathscr{R}(O, \mathrm{B})$, dove P_0 è stato scelto come origine del nuovo riferimento $\mathscr{R}$. Ovviamente si può scegliere uno qualsiasi degli N+1 punti come origine (e di conseguenza si ottiene una nuova base ed un altro sistema di riferimento affine).

Esempio

Il sistema di riferimento affine standard di $\Sigma = \mathbb{R}^n$ è costituito dai punti: $P_0 = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N})$, $P_1 = (1,0,\ldots,0)$, $P_2 = (0,1,\ldots,0)$, ..., $P_N = (0,0,\ldots,1)$.

un qualsiasi punto le sue coordinate univocamente identificate come

$$\Rightarrow \quad Q = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = \cancel{P_0} + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_N P_N$$

Sistema di riferimento affine

Esempio 1

Un nuovo sistema di riferimento affine di $\mathbb{R}^2$ potrebbe essere costituito dai punti:

$$P_0=(0,1),\ P_1=(2,3),\ P_2=(2,1).$$

Quali sono le coordinate affini del punto Q rispetto al nuovo sistema di riferimento affine, sapendo che le sue coordinate rispetto a quello standard sono $(5,-1)$?

$$(5,-1)=Q=O+\varphi(O,Q)=P_0+\alpha_1(P_1-P_0)+\alpha_2(P_2-P_0)$$

$$(5,-1)=Q=(0,1)+\alpha_1[(2,3)-(0,1)]+\alpha_2[(2,1)-(0,1)]$$

$$(5,-1)^T-(0,1)^T=\alpha_1[(2,3)-(0,1)]^T+\alpha_2[(2,1)-(0,1)]^T$$

$$P_0=O \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix}(P_1-P_0)^T & (P_2-P_0)^T\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=[Q-P_0]^T$$

è un sistema lineare determinato perché i punti sono affinemente indipendenti

Esempio 1 (cont.)

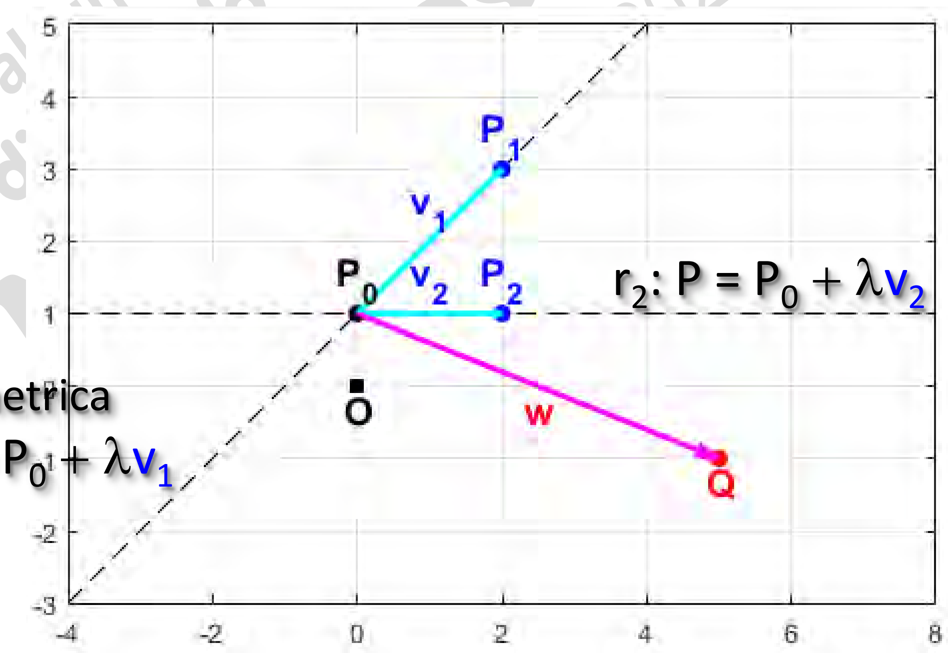
```
P0=[0 1]; P1=[2 3]; P2=[2 1];
v1=(P1-P0)'; v2=(P2-P0)'; A=[v1 v2];
rank(A)
ans =
     2
Q=[5 -1]; w=(Q-P0)'; alpha=A\w
alpha =
            -1
           3.5
```

base per lo spazio direttore

3 punti affinemente indipendenti

verifica

```
A*alpha
ans =
     5
    -2
P0' + A*alpha
ans =
     5
    -1
```



$r_2: P = P_0 + \lambda v_2$

eq. parametrica

$r_1: P = P_0 + \lambda v_1$

Sistema di riferimento affine

Esempio 2

Un nuovo sistema di riferimento affine di $\mathbb{R}^3$ potrebbe essere costituito dai punti:

$$P_0=(1,1,1),\ P_1=(2,1,1),\ P_2=(1,2,1),\ P_3=(2,1,2).$$

Quali sono le coordinate affini del punto Q rispetto al nuovo sistema di riferimento affine, sapendo che le sue coordinate rispetto a quello standard sono $(5,-1,0)$?

$$(5,-1,0)=Q=O+\varphi(O,Q)=P_0+\alpha_1(P_1-P_0)+\alpha_2(P_2-P_0)+\alpha_3(P_3-P_0)$$

$$(5,-1,0)=Q=(1,1,1)+\alpha_1[(2,1,1)-(1,1,1)]+\alpha_2[(1,2,1)-(1,1,1)]+\alpha_3[(2,1,2)-(1,1,1)]$$

$$(5,-1,0)^T-(1,1,1)^T=\alpha_1[(2,1,1)-(1,1,1)]^T+\alpha_2[(1,2,1)-(1,1,1)]^T+\alpha_3[(2,1,2)-(1,1,1)]^T$$

$$P_0=O \Longrightarrow \left[(P_1-P_0)^T \quad (P_2-P_0)^T \quad (P_3-P_0)^T\right]\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=[Q-P_0]^T$$

è un sistema lineare determinato perché i punti sono affinemente indipendenti

Esempio 2 (cont.)

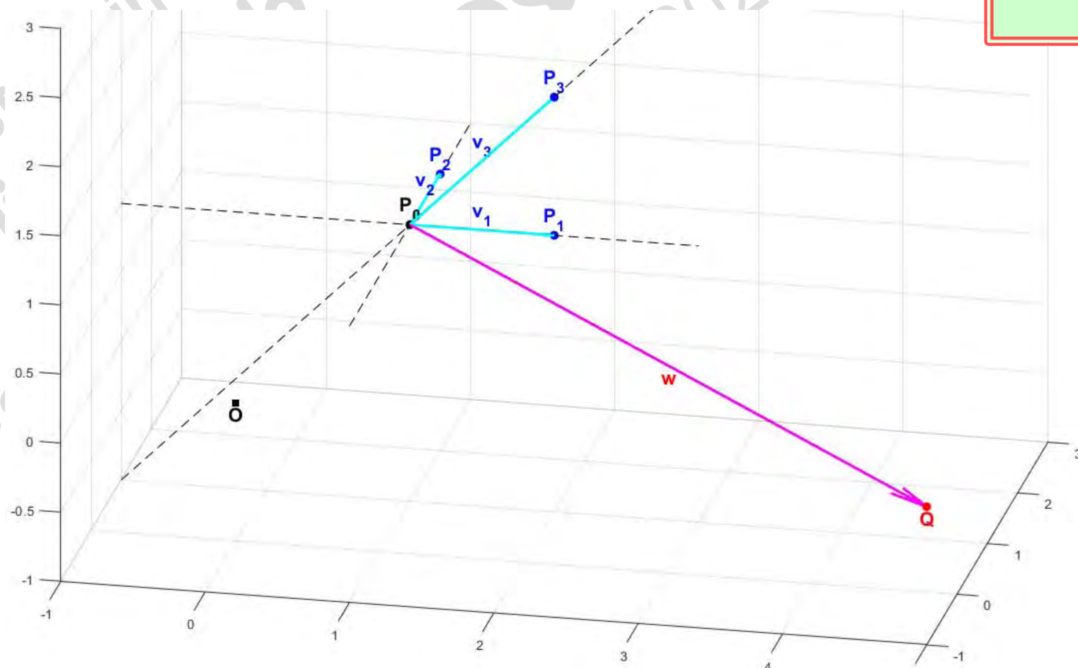
```
P0=[1 1 1]; P1=[2 1 1]; P2=[1 2 1]; P3=[2 1 2];
v1=(P1-P0)'; v2=(P2-P0)'; v3=(P3-P0)';
A=[v1 v2 v3];
rank(A)
ans =
     3
Q=[5 -1 0]; w=(Q-P0)'; alpha=A\w
alpha =
     5
    -2
    -1
```

base per lo spazio direttore

4 punti affinemente indipendenti

verifica

```
A*alpha
ans =
     4
    -2
    -1
P0' + A*alpha
ans =
     5
    -1
     0
```



Sistema di riferimento affine

Esempio 3

Un nuovo sistema di riferimento affine di un piano π, come sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$, potrebbe essere costituito dai punti:

$$P_0=(1,1,1),\ P_1=(2,1,1),\ P_2=(2,1,2).$$

Quali sono le coordinate affini del punto Q (di π) rispetto al nuovo sistema di riferimento affine del piano, sapendo che le sue coordinate rispetto a quello standard sono $(4,1,3)$?

$$(4,1,3) = Q = O+\varphi(O,Q) = P_0 + \alpha_1(P_1 - P_0) + \alpha_2(P_2 - P_0)$$

$$(4,1,3) = Q = (1,1,1) + \alpha_1[(2,1,1)-(1,1,1)] + \alpha_2[(1,2,1)-(1,1,1)]$$

$$(4,1,3)^T - (1,1,1)^T = \alpha_1[(2,1,1)-(1,1,1)]^T + \alpha_2[(1,2,1)-(1,1,1)]^T$$

$$P_0 = O \quad \Longrightarrow \quad \left[(P_1 - P_0)^T \quad (P_2 - P_0)^T\right]\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = [Q - P_0]^T$$

è un sistema lineare determinato perché i punti sono affinemente indipendenti

Esempio 3 (cont.)

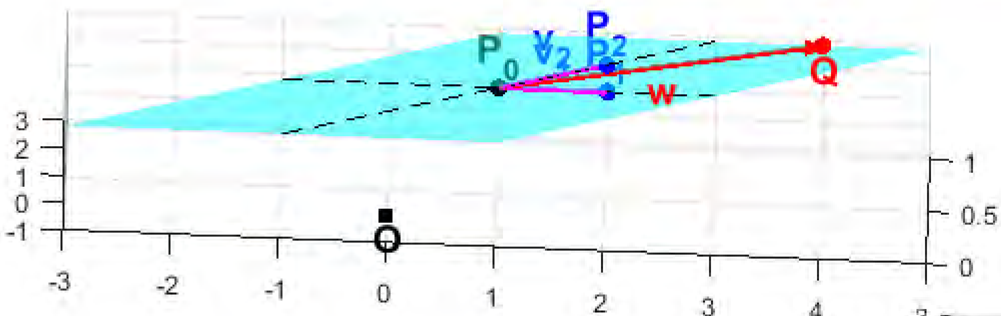
```
P0=[1 1 1]; P1=[2 1 1]; P2=[2 1 2];
v1=(P1-P0)'; v2=(P2-P0)'; A=[v1 v2];
rank(A)
ans =
     2
Q=[4 1 3]; w=(Q-P0)'; alpha=A\w
alpha =
     1
     2
```

base per lo spazio direttore

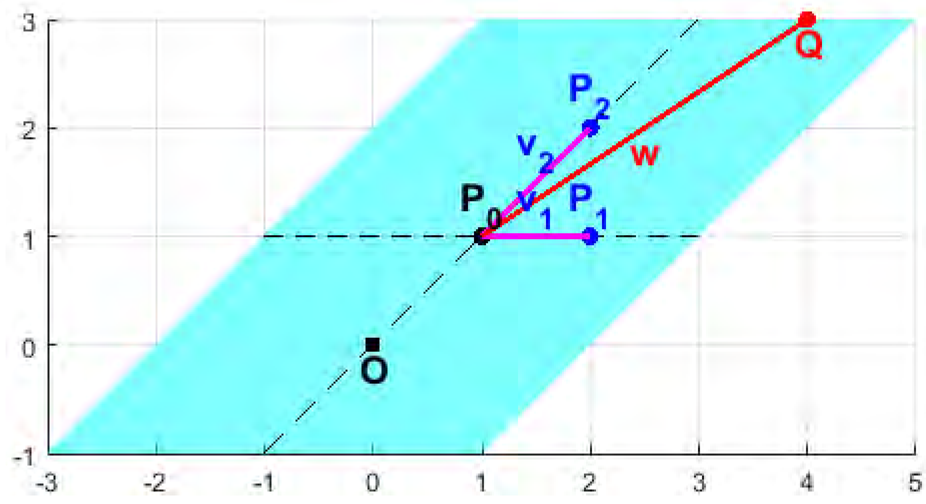
3 punti affinemente indipendenti

verifica

```
A*alpha
ans =
     3
     0
     2
P0' + A*alpha
ans =
     4
     1
     3
```



vista 3D



di fronte al piano