Esercizi

ACS2_03 – Particolari Sottospazi Lineari e loro proprietà.

1. Assegnati i sottospazi $\boldsymbol{V}_1=\text{span}\{(1,2,0)^T\}$ e $\boldsymbol{V}_2=\text{span}\{(2,3,0)^T\}$ di $\mathbf{R}^3$, determinare i seguenti sottospazi e la loro dimensione, verificando che valga la *Formula di Grassmann*:
   - Il sottospazio $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$.
   - Qualche sottospazio complementare di $\boldsymbol{W}$ in $\mathbf{R}^3$.
   - Il sottospazio complemento ortogonale di $\boldsymbol{W}$ in $\mathbf{R}^3$.

2. Da cosa discende la seguente relazione: $\text{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B})$? Sotto quale ipotesi la disuguaglianza diventa un'uguaglianza?

3. Determinare due diversi sottospazi complementari ed il sottospazio complemento ortogonale dei seguenti sottospazi lineari* di $\mathbf{R}^n$ (fissare, per es. $n=5$, se si usa il *Symbolic Math Toolbox*, oppure $n=3$ se si vogliono disegnare i sottospazi):
   - $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)^T \wedge x_j=0 \text{ per un } j \text{ fissato}\}$
   - $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \wedge x_1=x_2=\ldots=x_n\}$
   - $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \wedge \sum_{k=1,\ldots,n} x_k = 0\}$

   * già visti in `Esercizi_01.pdf`.

4. Determinare e visualizzare l'intersezione delle seguenti coppie di sottospazi di $\mathbf{R}^3$:
   - Piano x-y e piano y-z.
   - La retta $r=\text{span}\{(1,1,1)^T\}$ ed il piano $\pi=\text{span}\{(1,0,0)^T, (0,1,1)^T\}$.
   - Il piano perpendicolare a $r_1=\text{span}\{(1,1,0)^T\}$ ed il piano perpendicolare a $r_2=\text{span}\{(0,1,1)^T\}$.

5. Determinare l'intersezione $W=U\cap V$, dove U e V sono i seguenti sottospazi:

   $U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)^T \wedge x_j=0 \text{ per un } j \text{ fissato}\}$

   $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \wedge \sum_{k=1,\ldots,n} x_k = 0\}$

6. Applicare l'*Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* (GSO) ai vettori $(1,2,0)^T$, $(8,1,-6)^T$, $(0,0,1)^T$ e confrontare il risultato con quello ottenuto dalla funzione **`O=orth()`**. Se $V=\text{span}\{(1,2,0)^T, (8,1,-6)^T, (0,0,1)^T\}$, è vero che $\mathcal{R}(\mathbf{O})=V$? Cosa succede se i vettori sono $(1,2,0)^T$, $(8,1,-6)^T$, $(2,4,0)^T$? Se $V=\text{span}\{(1,2,0)^T, (8,1,-6)^T, (2,4,0)^T\}$, vale ancora $\mathcal{R}(\mathbf{O})=V$?

7. Determinare una base ortonormale per il sottospazio dei polinomi algebrici di grado al più 2:

   $$W = \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$$

   dove

   $$p_1(x) = 2 + x + 4x^2$$
   $$p_2(x) = 1 - x + 3x^2$$
   $$p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$$

ed il prodotto scalare (che induce la norma) è definito come: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f\ x\ g\ x\ dx$.

8. Scrivere una funzione MATLAB che accetti come parametri di input una sequenza di n vettori e, mediante l'algoritmo GSO, verifichi se essi sono linearmente indipendenti ed, in tal caso, restituisca come parametri di output i sistemi di vettori ortogonali $\{\boldsymbol{v}_k\}$ ed ortonormali $\{\boldsymbol{u}_k\}$. Cosa cambia nel codice se i vettori di input sono complessi, invece che reali?

9. Scrivere sia la versione simbolica del codice GSO, applicabile anche a vettori di funzioni, e sia la versione numerica del codice, applicabile solo a vettori di n componenti reali.