Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_03

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - Sottospazio somma e somma diretta.
  - Sottospazio complementare e complemento ortogonale.
  - Relazione di Grassmann ed altre proprietà.
  - Intersezione di sottospazi lineari.
  - Teorema Fondamentale dell'A.L.
  - Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e sua relazione con la fattorizzazione QR.

Definizioni

Siano S uno Spazio Lineare e U, V, W suoi sottospazi.

1 $U=V+W$ **sottospazio somma**

$$V+W=\{s\in S : s=v+w,\ \forall v\in V \wedge \forall w\in W\}$$

2 $U=V\oplus W$ **sottospazio somma diretta**

$$V\oplus W = V+W \quad \wedge \quad V\cap W=\{\underline{0}\}$$

Definizioni

3 V **complemento** (o sottospazio complementatare) **di** W

$$V \ : \ V \oplus W = S$$

4 $V{=}W^{\perp}$ **complemento ortogonale di** W

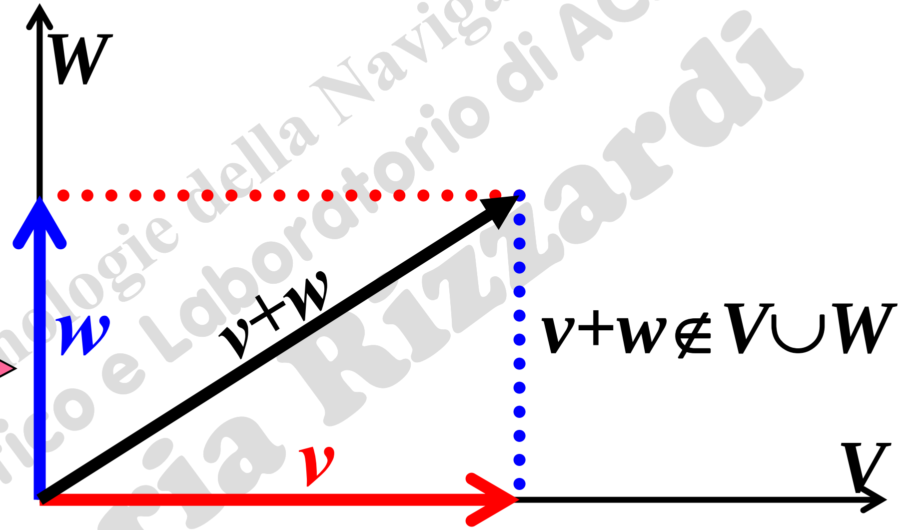
$$W^{\perp} = \{ s \in S \ : \ s \perp w \ \forall w \in W \}$$

Esempi

1. $V \cup W$ non è sottospazio, perché $v+w \notin V \cup W$

Infatti, ad es., se

$V = \vec{x}, \quad W = \vec{y}$



2. Siano $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V+W = \mathscr{R}(A)$

Spazio delle Colonne di A

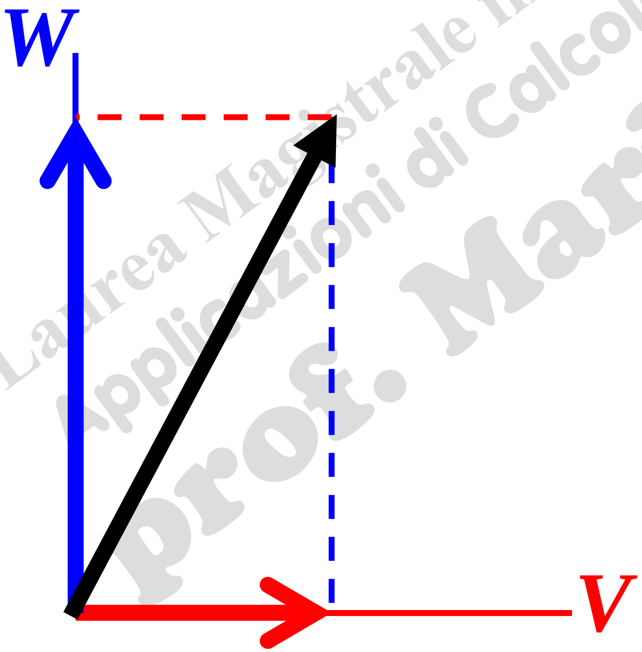
Esempio

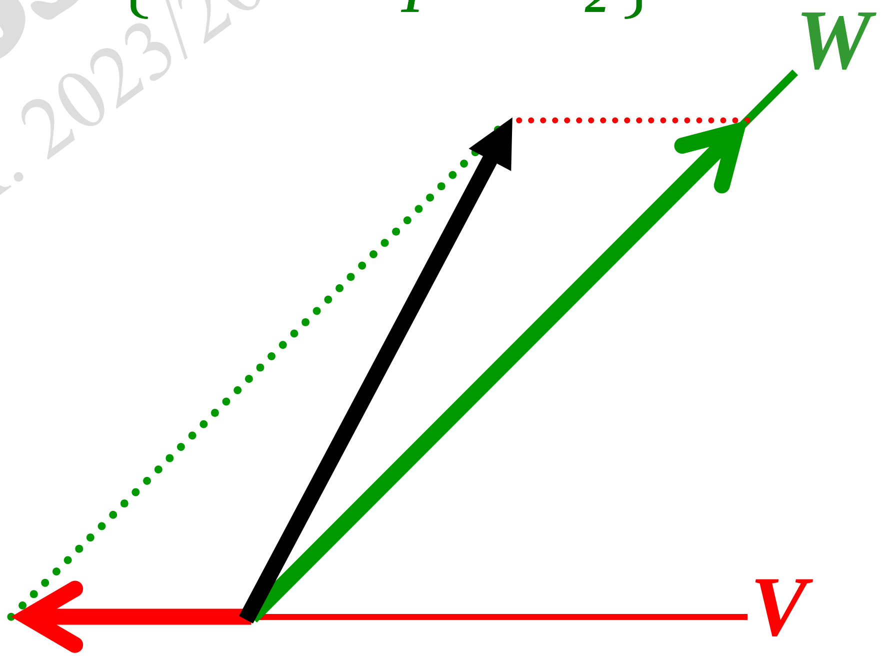
3 Per ogni sottospazio esistono infiniti sottospazi complementari.

Infatti, ad es., se V = asse x, allora

$$\mathbb{R}^2 = V \oplus W \quad \text{dove} \quad W = \text{asse } y$$

$$\mathbb{R}^2 = V \oplus W \quad \text{dove} \quad W = \{ w : w_1 = w_2 \}$$

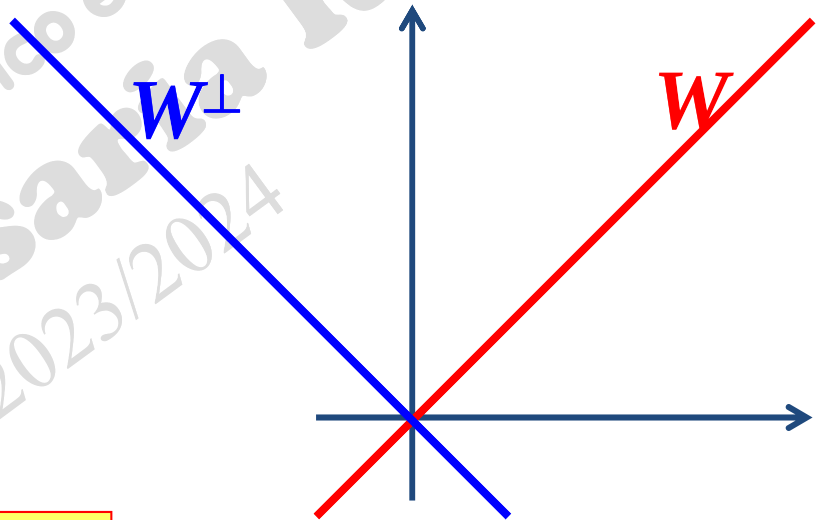




Esempio

4 Se $W=\{w \;:\; w_1=w_2\}$ allora per il suo complemento ortogonale risulta

$$\boxed{V=W^{\perp}=\{v \;:\; v_1=-v_2\}}$$



Infatti $\quad W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$V=W^{\perp}=\left\{v \;:\; v\perp\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

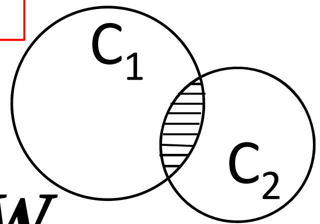
$$\boxed{\left\langle v,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0 \;\Leftrightarrow\; v_1+v_2=0}$$

Proprietà

V, W sono sottospazi di uno Spazio Lineare S:

1 $V+W$ e $V \cap W$ sono sottospazi lineari. ...perché?

per ricordarla: è simile all'area di $C_1 \cup C_2$



2 $\boxed{\textit{Relazione di Grassmann}}$

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

$$\Downarrow$$

3 $$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

4 $S = V \oplus W \Rightarrow \forall s \in S \;\; \exists! v \in V, \;\; \exists! w \in W : s = v + w$

5 $S = V \oplus W \Rightarrow$ una base di S si ottiene dalla unione di una base di V ed una base di W.

Proprietà

6 Il vettore $\underline{0}$ è ortogonale ad ogni altro vettore ed è l'unico ad essere ortogonale a sé stesso.

7 Il complemento ortogonale è un sottospazio.

8 Il complemento ortogonale di W è un sottospazio complementare di W, cioè $W \oplus W^{\perp} = S$.

9 Il complemento ortogonale di W è unico.

10 $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Intersezione di due sottospazi

1. Se $\boldsymbol{S}$ è uno Spazio Lineare e $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ suoi sottospazi, allora anche $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}$ è un sottospazio di $\boldsymbol{S}$.

Dim

Basta applicare a $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}$ il Teorema che caratterizza un sottospazio Lineare:

$\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}$ deve contenere le combinazioni lineari di tutti i suoi vettori.

Tesi: $\forall x, y \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}$

Il risultato segue immediatamente, perché $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ sono entrambi sottospazi lineari:

$$\forall x, y \in \boldsymbol{V} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \boldsymbol{V}$$

$$\forall x, y \in \boldsymbol{W} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \boldsymbol{W}$$

Laboratorio

Calcolare in $\mathbb{R}^3$ $V \cap W$ dove

$$V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\forall x \in V \cap W \Leftrightarrow x \in V$ e $x \in W$, cioè

$$x = \boxed{\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = a \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = x$$

$x \in V$ $\qquad$ $x \in W$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 2 & 0\\1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-a\\-b\end{pmatrix}}}_{\in \mathcal{N}(A)} = 0$$

incognite: α e β oppure a e b

Cioè, per calcolare $V \cap W$, si determina prima $\mathcal{N}(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -a \\ -b \end{pmatrix}$$

… e poi basta sostituire α e β nella formula di x

Analogamente se si scelgono a e b

$$x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
B1=sym([1 0;0 2;1 -1]);
B2=sym([2 0;2 0;1  1]);
A=[B1 B2];
N=null(A);
x=B1*N(1:2)
x =      (α,β)
-2
-2
-1
```

```
x=-B2*N(3:4)
x =      (−a,−b)
-2
-2
-1
```

la risoluzione numerica è la stessa, senza **sym**

si possono scegliere indifferentemente (a,b) o (α,β)

$$V \cap W = \textbf{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio: Calcolare se esiste l'intersezione dei due piani assegnati in eq. cartesiana

$$\pi_1 \equiv -2x+y+2z=0 \qquad \pi_2 \equiv -x+y=0$$

$$\pi_1 \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \pi_2 \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

condizioni di ortogonalità

$\pi_1^\perp$ $\pi_2^\perp$

normali n1, n2

```
syms x y z real
Eq1=-2*x+y+2*z == 0;
Eq2=-x+y == 0;
S=solve(Eq1,Eq2, ...
'ReturnConditions',true);
B=[S.x;S.y;z]/z
B =
2
2
1
```

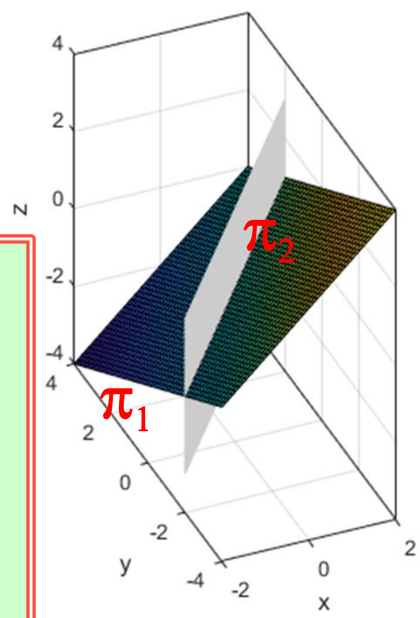
il modo più semplice

```
n1=sym([-2 1 2]);
n2=sym([-1 1 0]);
A=[n1;n2]; passo 1
N=null(A)  passo 2
N =
2
2
1
```

```
n1=sym([-2 1 2]'); % normale a π1
n2=sym([-1 1 0]'); % normale a π2
A1=null(n1'); % base per π1
A2=null(n2'); % base per π2
A=[A1 A2];     N=null(A);
A1*N(1:2)
ans =
-2
-2
-1
-A2*N(3:4)
ans =
-2
-2
-1
```

α β a b

basi per $\pi_1 \cap \pi_2$



Lab: il modo "più semplice" per trovare l'intersezione tra piani

$\pi_1 \equiv -2x+y+2z=0 \qquad \pi_1 \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\pi_2 \equiv -x+y=0 \qquad \pi_2 \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

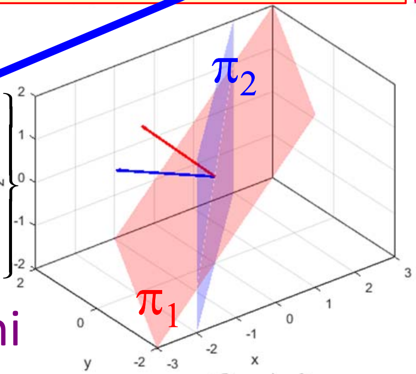
normali

1) Calcolare delle basi per le normali

```
n1=sym([-2;1;2]);
n2=sym([-1;1;0]);
```

la soluzione numerica è la stessa, senza **sym**

$$\pi_1^\perp: \ \eta_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \pi_2^\perp: \ \eta_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

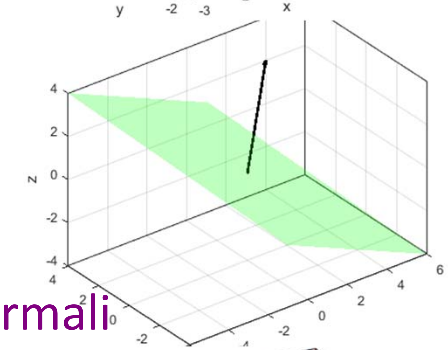


Se richiesto, calcolare dalle normali delle basi per entrambi i piani

```
syms a b real
p1=null(n1')*[a;b];
p2=null(n2')*[a;b];
```

equazioni parametriche

$$\pi_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \pi_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Se richiesto, calcolare una base del piano generato dalle due normali

```
p3=[n1 n2]*[a;b];
```

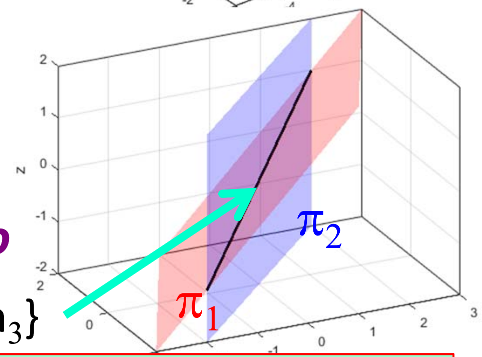
equazione parametrica

$$\pi_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2) Calcolare la normale a quel piano come suo *Complemento Ortogonale*

```
n3=null([n1 n2]');
```

$\eta_3 = \pi_1 \cap \pi_2 = \mathrm{span}\{n_3\}$



Perché la normale al piano generato dalle due normali n_1 e n_2 è una base per $\pi_1 \cap \pi_2$?

Esempio: verificare se π e r risultano sottospazi complementari:

$$\pi = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad r = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \pi, r \subset \mathbb{R}^3$$

```
V=[-5 3 0; 2 0 1]';
disp(rank(V))
2
u=[1 -2 1]';
A=[V u];
disp(rank(A))
3
```

$$\dim(\mathbf{V}) = 2$$
$$\dim(\mathbf{u}) = 1$$

$$\dim(\mathbf{V}+\mathbf{u}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbf{V}) + \dim(\mathbf{u})$$

$\Downarrow$ Formula di Grassman

$$\dim(\mathbf{V}\cap\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Si!}}$$

Esercizio: la retta r è complemento ortogonale del piano π?

Lab.

Calcolare $V^{\perp}$, e la sua dimensione, dove $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

```
A=[1 0 1;0 2 -1]';
disp(rank(A))
     2
Vperp=null(A')
Vperp =
         -0.6667
          0.3333
          0.6667
disp(Vperp'*A)
     0     0
RA=orth(A); disp(Vperp'*RA)
 1.0e-015 *
    0.1110        0
disp(rank([A RA]))
     2
```

$$V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^3$$

$\dim(V) = 2$

$\dim(V^{\perp}) = 3 - 2 = 1$

verifica l'ortogonalità

calcola $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ e verifica l'ortogonalità con $V^{\perp}$

RA è proprio lo spazio delle colonne di **A**

Lab.

Calcolare l'equazione cartesiana del piano $V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

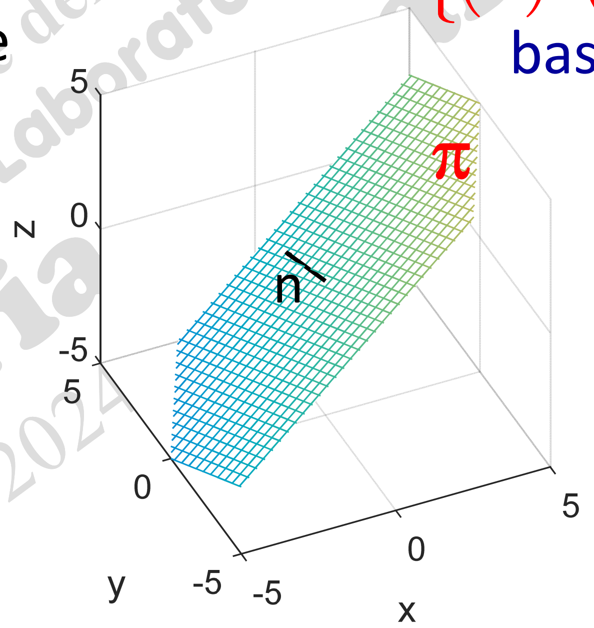
base

```
A=sym([1 0 1;0 2 -1]');
n=null(A')
n =
   -1
   1/2
    1
```

calcola la normale

```
[num,den]=numden(n);
mult=lcm(den);
n=mult*n
n =
   -2
    1
    2
```

per avere numeri interi




```
syms x y z real
Eqn=[char([x y z]*n) ' = 0']
Eqn =
     'y/2 - x + z = 0'
```

mediante array di caratteri

char(): converte un'espressione simbolica in una sequenza di caratteri

```
syms x y z real
Eqn=string(char([x y z]*n)) + " = 0"
Eqn =
     "y - 2*x + 2*z = 0"
```

mediante stringa

Equazione cartesiana

string(): converte un array di caratteri in una stringa

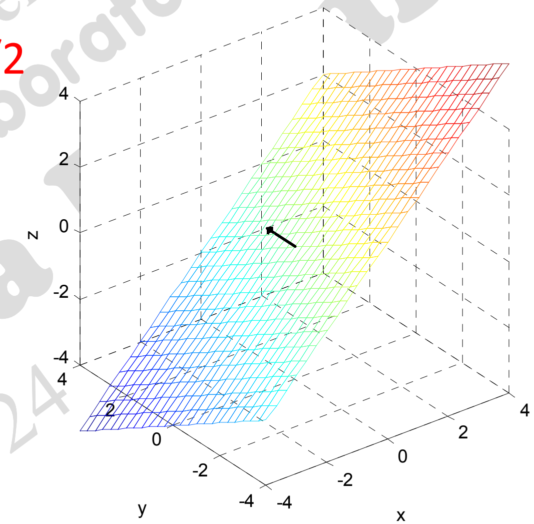
Esempio:

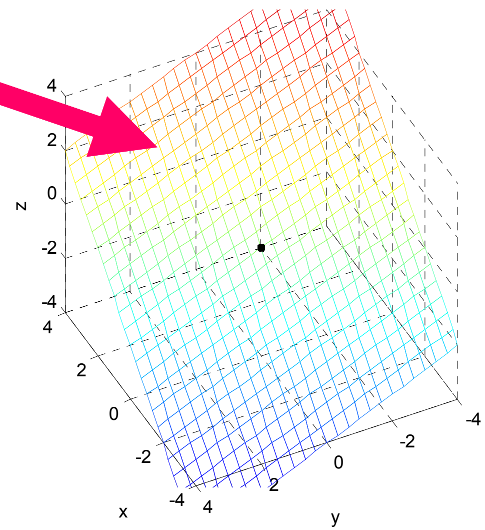
visualizzare il piano $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
con l'osservatore perpendicolare ad esso.

Equazione cartesiana: $y/2 - x + z = 0 \iff z = x - y/2$

```
A=[1 0 1;0 2 -1]';  n=null(A');
[x,y]=meshgrid(linspace(-4,4,25));
z=-(n(1)*x+n(2)*y)/n(3); mesh(x,y,z);
hidden off; hold on; axis equal
quiver3(0,0,0,n(1),n(2),n(3),1)
view([n(1),n(2),n(3)])
```

coordinate dell'osservatore





oppure   cart2sph: da coordinate cartesiane a sferiche

```
[theta,phi,rho]=cart2sph(n(1),n(2),n(3));
view(90+theta*180/pi, phi*180/pi)
```

azimuth   elevation

Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare*

* Gilbert Strang: *The Fundamental Theorem of Linear Algebra.*
The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 9. (1993).
https://www.engineering.iastate.edu/~julied/classes/CE570/Notes/strangpaper.pdf

Gilbert Strang: professor at MIT (Massachusetts Institute of Technology).
https://math.mit.edu/~gs/

Le sue lezioni di Algebra Lineare sono disponibili su **MITOPENCOURSEWARE**
https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/

Gilbert Strang: MIT course 18.065
"Matrix Methods in Data Analysis, Signal Processing, and Machine Learning" (2018)
[https://ocw.mit.edu/courses/18-065-matrix-methods-in-data-analysis-signal-processing-and-machine-learning-spring-2018/
https://www.youtube.com/playlist?list=PLUl4u3cNGP63oMNUHXqIUcrkS2PivhN3k]

Teorema fondamentale dell'Algebra Lineare

Per una matrice $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$ si ha

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{\perp} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{A})^{\perp}$$

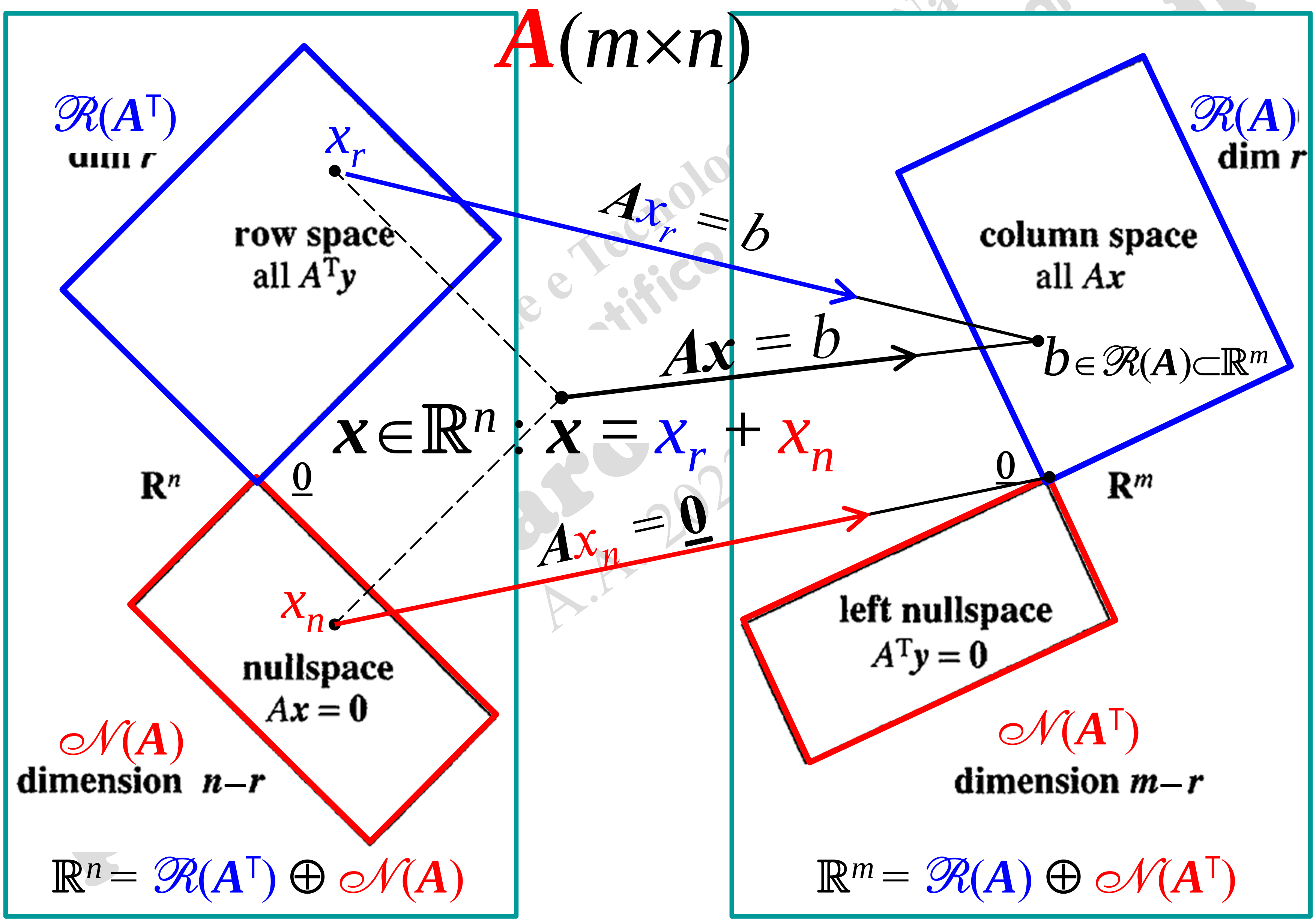
$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{A})^{\perp} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{\perp}$$

La dimostrazione si basa sulla definizione di $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{0}}\}$$

$\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ contiene tutti i vettori $\boldsymbol{v}$ ortogonali alle righe di $\boldsymbol{A}$ e quindi a $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$. Per gli altri due sottospazi si considera $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ al posto di $\boldsymbol{A}$.

Rappresentazione grafica del
Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare



Lab.: calcolare i 4 sottospazi fondam. di A dove

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix} \qquad A(3\times 2)$$

$$\mathcal{R}(A),\ \mathcal{N}(A^T)\subseteq\mathbb{R}^3\ :\ \mathcal{R}(A)=\mathcal{N}(A^T)^\perp$$

$$\mathcal{R}(A^T),\ \mathcal{N}(A)\subseteq\mathbb{R}^2\ :\ \mathcal{R}(A^T)=\mathcal{N}(A)^\perp$$

$$\mathcal{N}(A^T)=\mathcal{R}(A)^\perp \Longleftrightarrow$$

Formula di Grassman

$$\dim[\mathcal{N}(A^T)]=3-\dim[\mathcal{R}(A)]=1$$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
A=sym([1 2 3; 4 7 5]');
disp(rank(A))
     2
RA=colspace(A)
RA =
[   1, 0]
[   0, 1]
[ -11, 7]
disp(rank(double([RA A])))
     2
NAT=null(A')
NAT =
 11
 -7
  1
disp(RA'*NAT)
 0
 0
```

le colonne sono indipendenti

$$\mathcal{R}(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}\right\}$$

due basi per lo stesso sottospazio

$$\mathcal{N}(A^T)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}11\\-7\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\perp\mathcal{R}(A)\left\{\begin{array}{l}\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{array}\right.$$

$\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^T)$ sono ortogonali

MATLAB

```
A=[1 2 3; 4 7 5]';
disp(rank(A))
     2
RAT=orth(A')
RAT =
      -0.34998    0.93676
      -0.93676   -0.34998
NA=null(A)
NA =
  2×0 empty double matrix
```

$\mathcal{R}(A^T)=\mathbb{R}^2$

$\mathcal{N}(A)=\{\underline{0}\}$

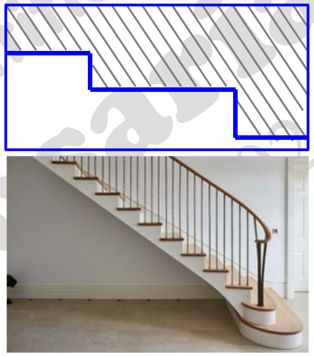
$\mathcal{N}(A)$ contiene solo il vettore nullo

Teorema Fondamentale e sue applicazioni

eliminazione di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G\downarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 pivot



matrice "a scala" S

$\dim[\mathscr{R}(A)] = 3 = \dim[\mathbb{R}^3]$

$$\mathscr{R}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ possiamo calcolare $\mathscr{N}(A^{\mathsf{T}})$

senza A^{T}, come $\boxed{\mathscr{N}(A^{\mathsf{T}}) = \mathscr{R}(A)^{\perp}} = \{\underline{0}\}$...perché?

Teorema Fondamentale e sue applicazioni

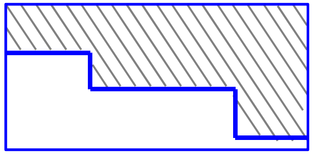
$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G^{\downarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eliminazione di Gauss-Jordan
(row-reduced echelon form → parte 1)

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
A=sym([1 0 2 0;0 2 2 0;1 -1 1 1]);
S=rref(A)
S =
[    1     0     2     0  ]
[    0     1     1     0  ]
[    0     0     0     1  ]
```

matrice "a scala" S



```
RAT=colspace(A')
RAT =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 2, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
RST=colspace(S')
RST =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 2, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
```

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})=\mathscr{R}(\mathbf{S}^{\mathsf{T}})$$

Gli Spazi delle Righe coincidono

Teorema Fondamentale e sue applicazioni

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
A=sym([1 0 2 0; 0 2 2 0; 1 -1 1 1]);
S=rref(A)
S =
[    1      0      0    ]
[    0      1      0    ]
[    0      0      1    ]
[    0      0      0    ]
```

matrice "a scala" S

row-reduced echelon form

```
RA=colspace(A)
RA =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 2, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
RS=colspace(S)
RS =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0]
```

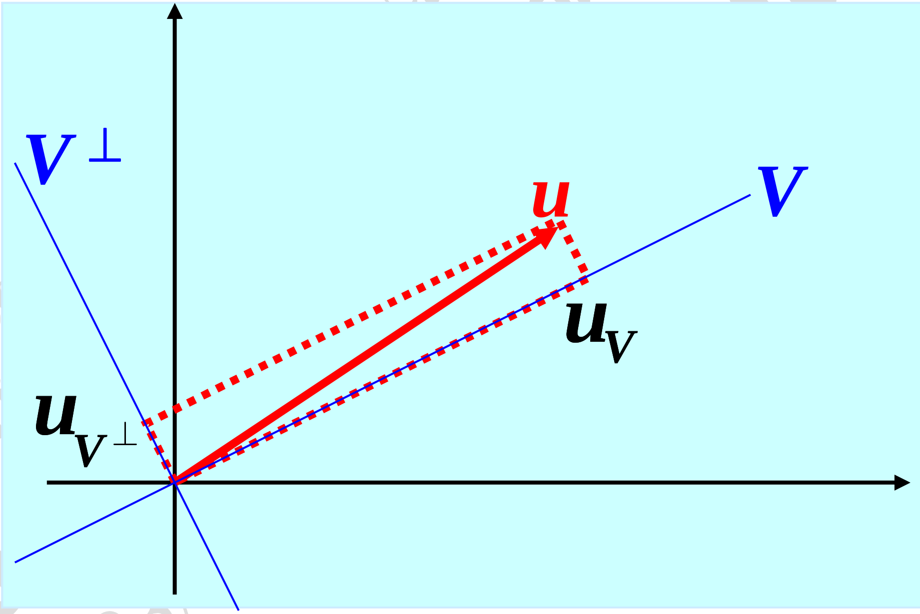
```
rank(RA)
ans =
     3
rank([RA RS])
ans =
     4
```

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \neq \mathscr{R}(\boldsymbol{S})$$

Gli Spazi delle Colonne sono diversi

Esempio

Calcolare le componenti del vettore $\boldsymbol{u}=(3,2)^\mathsf{T}$, lungo $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{V}^\perp$, dove $\boldsymbol{V} = \text{span}\{(2, 1)^\mathsf{T}\}$.



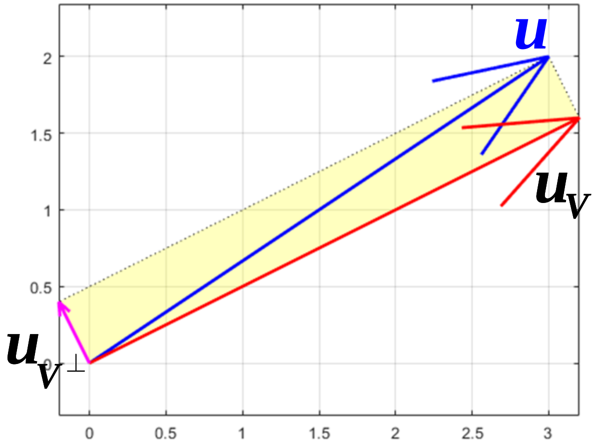
$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}^\perp = \text{span}\{(-1, 2)^\mathsf{T}\}$$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_V} + \underbrace{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_{V^\perp}}$$

sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

```
u=[3 2]';   V=[2 1]';
W=null(V'); A=[V W];  c=A\u;
uV=c(1)*V;  uW=c(2)*W;
P=[zeros(2,1) uV u uW];
figure; h=patch(P(1,:),P(2,:),'y');
set(h,'LineStyle',':','FaceAlpha',0.25)
axis equal; grid on; hold on; box on
h=compass(complex(u(1),u(2)),'b');
h=compass(complex(uV(1),uV(2)),'r');
h=compass(complex(uW(1),uW(2)),'m');
```



Esempio: Calcolare, in $\mathbb{R}^3$, l'angolo formato da

$$\pi_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \pi_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\pi_1 \equiv\ 3x + 5y - 6z = 0$$

$$\pi_2 \equiv\ z = 0$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

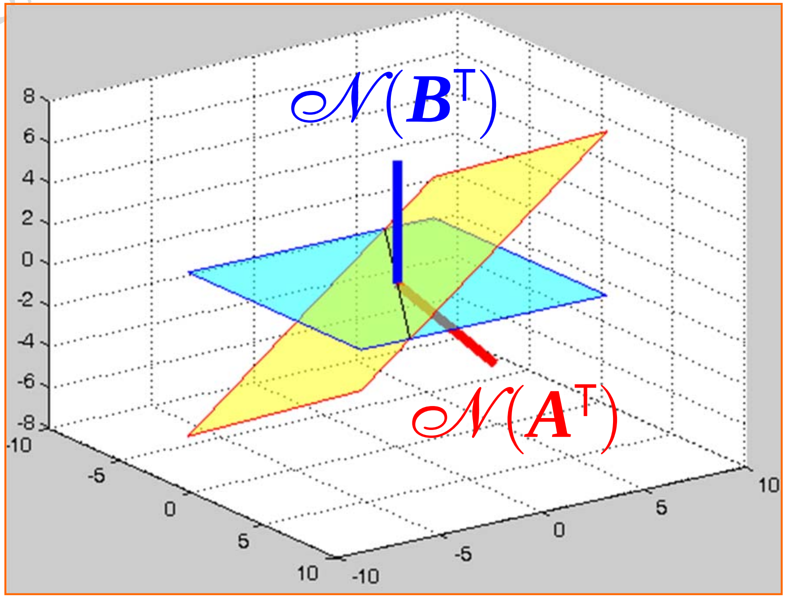
$$\pi_1 = \mathcal{R}(A), \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \mathcal{R}(B), \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

I coefficienti dell'eq. cartesiana (ovvero i parametri direttori delle rette normali ai piani) costituiscono una base per $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})^\perp$ e $\mathcal{R}(\boldsymbol{B})^\perp$:

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{A})^\perp \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(\boldsymbol{B}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B})^\perp$$

```
[x,y]=meshgrid([-6 6]); z1=(3*x+5*y)/6;
z2=zeros(size(x)); surf(x,y,z1);
set(h,'FaceAlpha',.5); hold on; h=surf(x,y,z2);
n1=[3 5 -6]'; n2=[0 0 1]'; % normali
cosTH=dot(n1,n2)/(norm(n1)*norm(n2));
TH=acos(abs(cosTH))*180/pi;
disp([TH  subspace(n1,n2)*180/pi])
      44.181       44.181
```



L'insieme di vettori non nulli $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ si dice

- **sistema ortogonale** se i vettori risultano mutuamente ortogonali, cioè

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} = 0 & k \neq j \\ \neq 0 & k = j \end{cases}$$

- **sistema ortonormale** se, oltre ad essere mutuamente ortogonali, hanno norma unitaria

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} = 0 & k \neq j \\ = 1 & k = j \end{cases} \Leftrightarrow \quad \|\varphi_k\| = 1$$

Una base ortogonale corrisponde ad aver introdotto nel sottospazio un Sistema di Riferimento ortogonale, una base ortonormale equivale ad un Sistema di Riferimento monometrico ortogonale.

È possibile trasformare una qualsiasi base di un sottospazio in una base ortonormale?

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (per i vettori di $\mathbb{R}^n$)

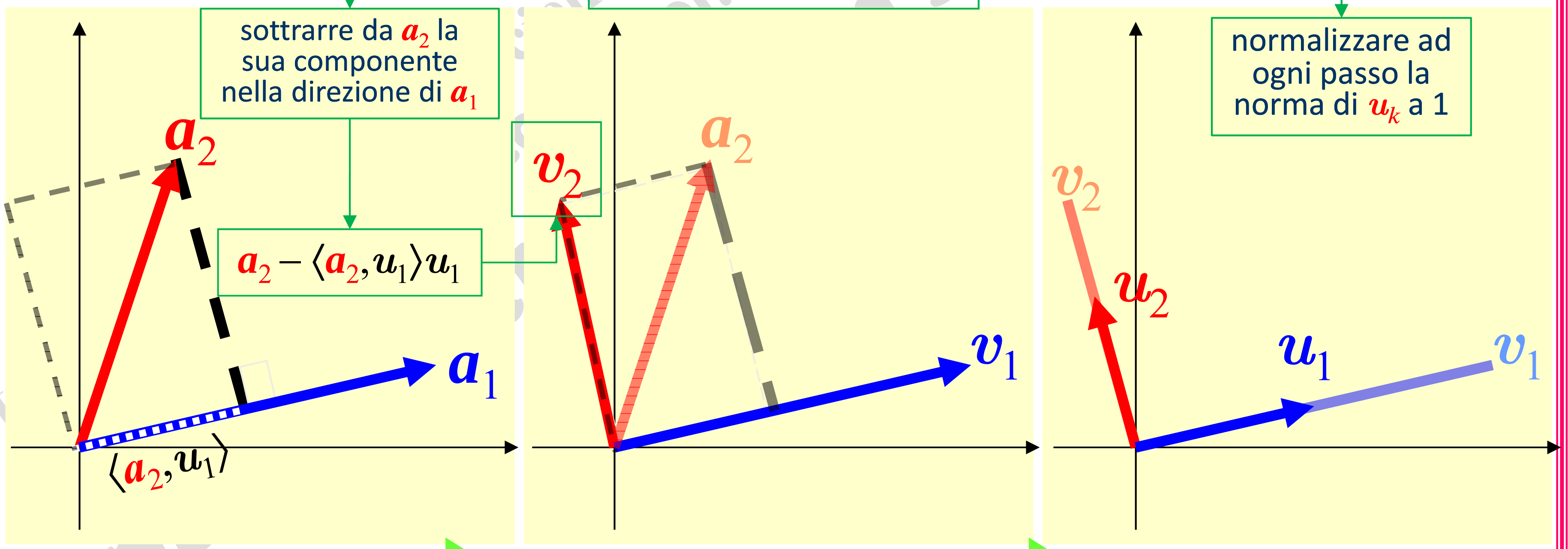
Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Questo algoritmo trasforma una base di un sottospazio in una base ortonormale

input: $\boldsymbol{n}$ vettori linearmente indipendenti $\{\boldsymbol{a}_i\}$

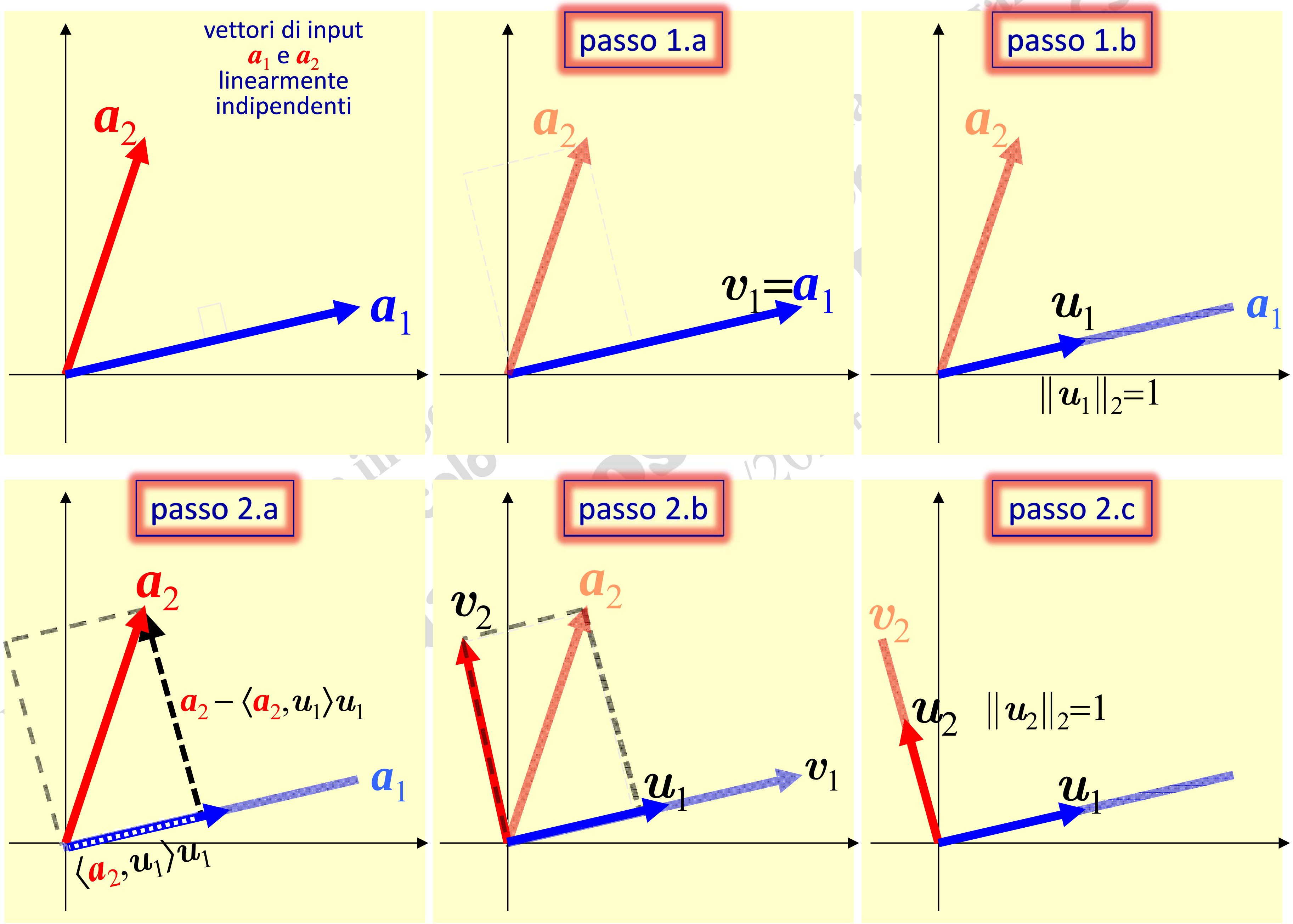
output: $\boldsymbol{n}$ vettori ortogonali $\{\boldsymbol{v}_i\}$ oppure ortonormali $\{\boldsymbol{u}_i\}$

Idea (in $\mathbb{R}^2$)



sistema di vettori linearm. indipendenti ⇒ sistema ortogonale ⇒ sistema ortonormale

Algoritmo di ortonormaliz. di Gram-Schmidt: passi



Algoritmo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (GSO)

Idea: sottrarre da ciascun vettore le sue componenti lungo i vettori già ortonormalizzati

passo 1.a

$$v_1 = a_1;$$

passo 1.b

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

il primo vettore viene solo normalizzato a **1** in lunghezza

passo k.a

passo k.b

$$v_k = a_k - \boxed{\sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, u_j \rangle u_j}$$

passo k.c

$$u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

for $k = 2, 3, \ldots, n$

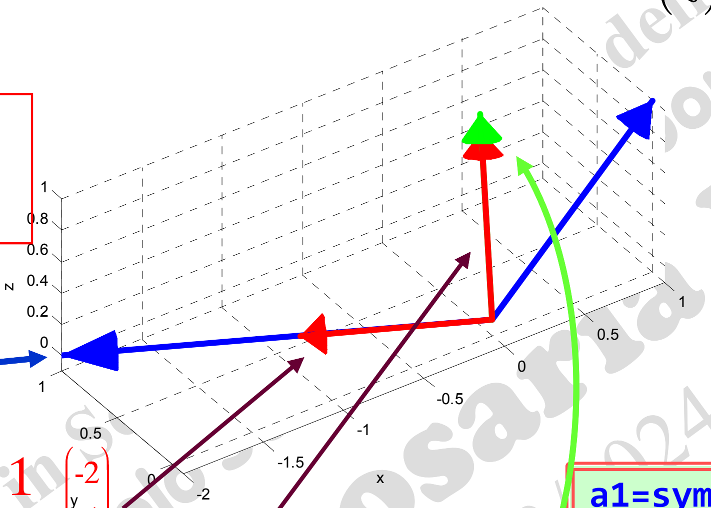
Esempio

Generare una base ortonormale per il piano π

Eq. parametrica di π $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

base non ortonormale

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt



base ortonormale

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

come verificare che lo spazio è lo stesso?

numerico

```
A=[-2 1 0; 1 0 1]';
disp(orth(A))
   -0.9129   -0.0000
    0.3651   -0.4472
   -0.1826   -0.8944
```

```
disp(orth([a1 a2]))
```

simbolico

```
a1=sym([-2 1 0]'); a2=sym([1 0 1]');
v1=a1; u1=v1/norm(v1);
v2=a2-a2'*u1*u1; u2=v2/norm(v2);
disp([u1 u2])
[ -(2*5^(1/2))/5, (5^(1/2)*6^(1/2))/30]
[      5^(1/2)/5, (5^(1/2)*6^(1/2))/15]
[              0,  (5^(1/2)*6^(1/2))/6]
disp(double([u1 u2]))
   -0.8944    0.1826
    0.4472    0.3651
         0    0.9129
```

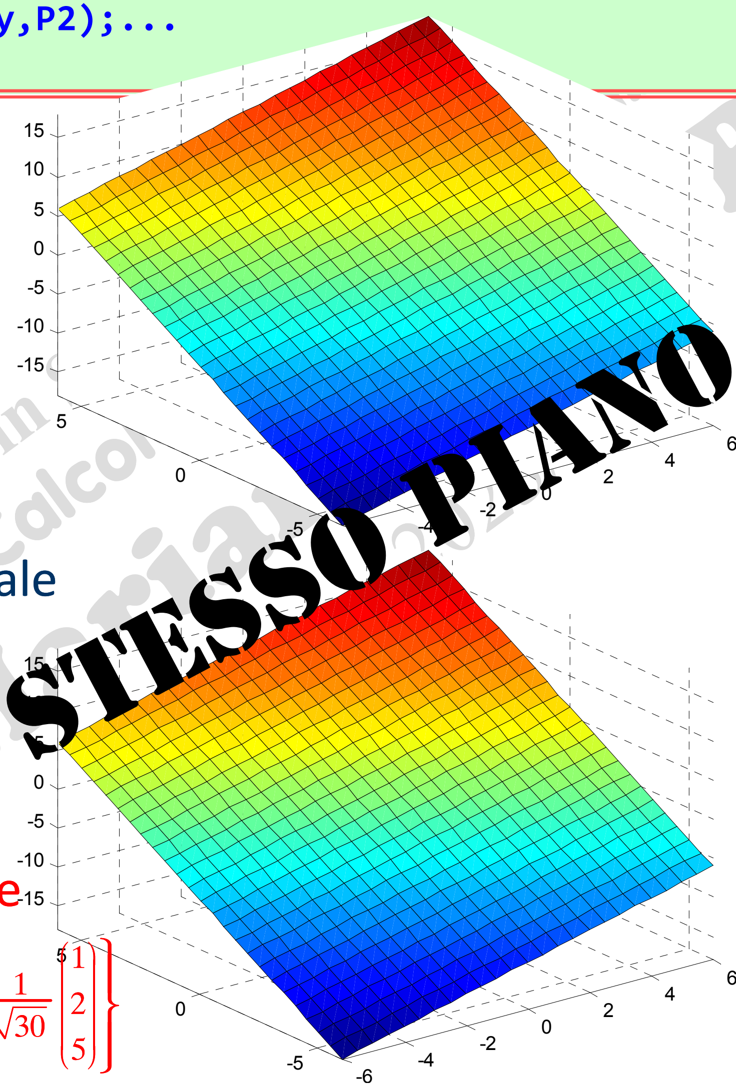
```
disp(rank([orth(A) double([u1 u2])]))
   2
```
stesso sottospazio

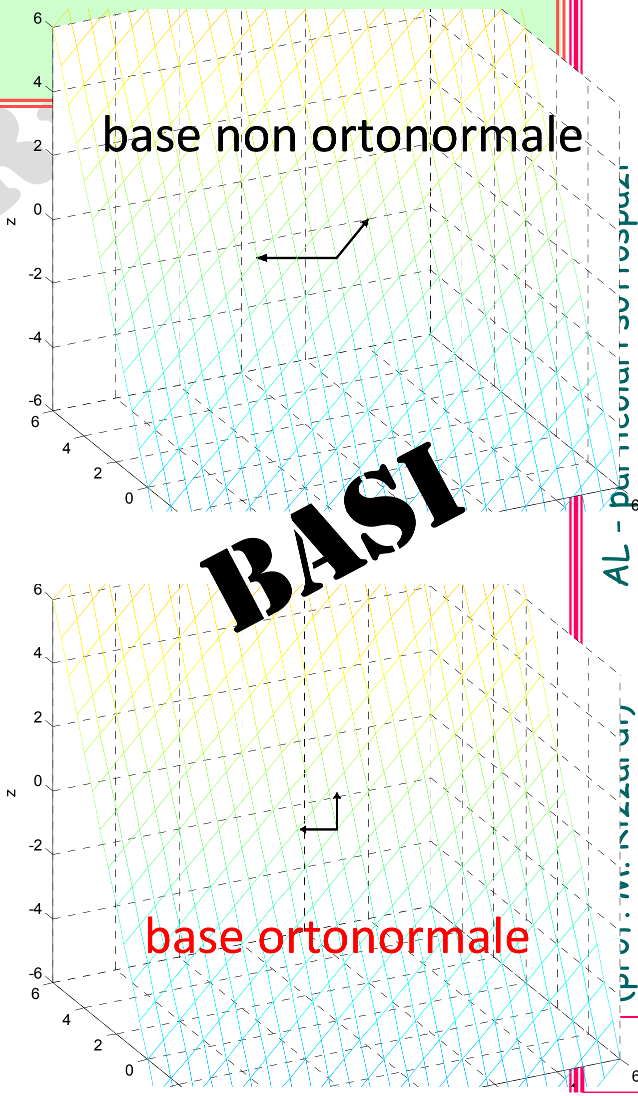
(prof. M. Rizzardi)

```
... [x,y]=meshgrid(linspace(-6,6,25)); A=[-2 1 0;1 0 1]'; n1=null(A');
P1=(-n1(1)*x-n1(2)*y)/n1(3); % eq. cartesiana
subplot(2,2,1); surf(x,y,P1); axis('tight'); subplot(2,2,2); mesh(x,y,P1); hidden off
hold on; axis equal; quiver3([0 0],[0 0],[0 0],A(1,:),A(2,:),A(3,:),1)
view([n1(1),n1(2),n1(3)])
A2=[double(u1) double(u2)];
n2=null(A2');
P2=(-n2(1)*x-n2(2)*y)/n2(3);
subplot(2,2,3); surf(x,y,P2);...
...
```

$$\pi = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

base non ortonormale





base ortonormale

$$\pi = \mathrm{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$$

Esempio *Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*


```
A=sym([-2 1 0;1 0 1; 0 -1 2]')
A =
[-2, 1,  0]
[ 1, 0, -1]
[ 0, 1,  2]
```

GSO

```
v(:,1)=A(:,1);
u(:,1)=v(:,1)/norm(v(:,1));
v(:,2)=A(:,2)-A(:,2)'*u(:,1)*u(:,1);
u(:,2)=v(:,2)/norm(v(:,2));
v(:,3)=A(:,3)-A(:,3)'*u(:,1)*u(:,1)-A(:,3)'*u(:,2)*u(:,2);
u(:,3)=v(:,3)/norm(v(:,3));
```

può essere scritto come algoritmo generale

```
v
v =
[-2, 1/5, -2/3]
[ 1, 2/5, -4/3]
[ 0,   1,  2/3]

u=simplify(u); u
u =
[-(2*5^(1/2))/5, 30^(1/2)/30, -6^(1/2)/6]
[      5^(1/2)/5, 30^(1/2)/15, -6^(1/2)/3]
[              0,  30^(1/2)/6,  6^(1/2)/6]
```

Matrici con colonne ortonormali

Una matrice reale **Q**(m×n), con colonne ortonormali, soddisfa la seguente equazione: $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ ($\mathbf{Q}^T$: *inversa sinistra*) ma, in generale, **non vale** $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{I}$. $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ è detta "matrice di Gram" of **Q**.

Se Q ha **colonne ortonormali** allora:

- preserva i prodotti scalari std: $\langle \mathbf{Qx},\mathbf{Qy}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$
- lascia immutata la lunghezza di un vettore: $\|\mathbf{Qx}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$
- preserva le distanze: $\|\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}\|_2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$
- preserva gli angoli tra vettori:

$$\cos(\widehat{\mathbf{Qx}\,\mathbf{Qy}})=\langle \mathbf{Qx},\mathbf{Qy}\rangle/(\|\mathbf{Qx}\|_2\,\|\mathbf{Qy}\|_2)=\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle/(\|\mathbf{x}\|_2\,\|\mathbf{y}\|_2)=\cos(\widehat{\mathbf{x}\,\mathbf{y}})$$

Se **Q** è una matrice quadrata reale, e $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \Leftrightarrow \mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}^{-1}$, cioè la trasposta è la sua inversa, allora **Q** è detta **matrice ortogonale**.

Se **Q** è una matrice complessa quadrata, e $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}=\mathbf{I}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H \Leftrightarrow \mathbf{Q}^H=\mathbf{Q}^{-1}$, cioè la matrice trasposta e coniugata è la sua inversa, allora **Q** è detta **matrice unitaria**.

Esempi di matrici ortogonali: Permutazioni, Rotazioni, Simmetrie.

Cosa sono? ... in seguito

Gram-Schmidt Orthonormalization (GSO)

Può essere applicato a qualunque tipo di vettori

Esempio 1 calcolare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare std. in $[-1,1]$, nel sottospazio Π_1 contenente i polinomi algebrici reali di grado al più 1.

prodotto scalare std in $[-1,1]$: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$$P_1(x) = b + ax$$

$$\Pi_1 = \textbf{span}\boxed{\{1, x\}} \longleftarrow \text{base ortogonale, ma non ortonormale}$$

GSO Alg. ⇒ base ortonormale → $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, x\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$

$u_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ poiché $\|\varphi_1\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx}$

$v_2 = \varphi_2 - \langle \varphi_2, u_1\rangle u_1 = x$ poiché $\langle \varphi_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0$

$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$ poiché $\|v_2\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

GSO: Esempio 1 in MATLAB

sottospazio Π_1

$$\Pi_1 = \{ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
disp(A'*A)
[1,    x]
[x,  x^2]
disp(kron(A',A))
[1,    x]
[x,  x^2]
```

prodotto esterno di vettori = prodotto di Kronecker di vettori

```
dotProd = @(f,g) int(f*g,-1,1);
```

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

```
syms x real;     A=[sym(1) x] % basis for Π1
A =
[ 1, x]
v(1)=A(1);
u(1)=v(1)/sqrt(dotProd(v(1),v(1)));
v(2)=A(2) - dotProd(A(2),u(1))*u(1);
u(2)=v(2)/sqrt(dotProd(v(2),v(2)));
```

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx}$$

```
disp(v)
[   1, x]
```

v: sistema di vettori ortogonale

```
disp(u)
[   2^(1/2)/2, (2^(1/2)*3^(1/2)*x)/2]
```

u: sistema di vettori ortonormale

```
disp(int(A'*A,-1,1))
[    2,    0]
[    0, 2/3]
```

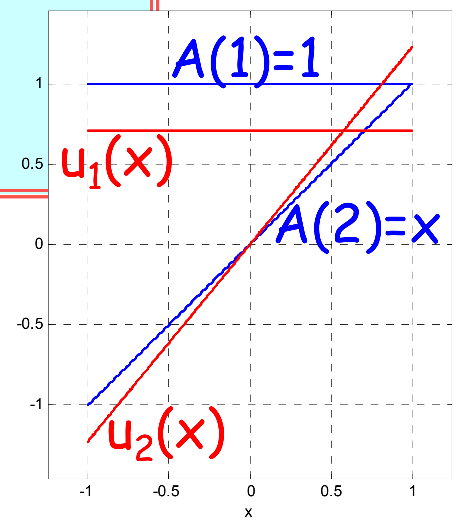
ortogonale

```
disp(int(v'*v,-1,1))
[ 2,    0]
[ 0, 2/3]
```

ortogonale

```
disp(int(u'*u,-1,1))
[ 1,    0]
[ 0,    1]
```

ortonormale



Il grafico di funzioni non rappresenta i vettori di Π_1; per immaginarli come vettori di un sottospazio lineare, dobbiamo considerare i vettori di $\mathbb{R}^2$, il piano reale.

Algoritmo GSO

Può essere applicato a qualunque tipo di vettori

Esempio 2 calcolare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare std. in $[-1,1]$, nel sottospazio Π_2 contenente i polinomi algebrici reali di grado al più 2.

$P_2(x) = c + bx + ax^2$

prodotto scalare std in $[-1,1]$: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$\Pi_2 = \text{span}\boxed{\{1,x,x^2\}}$ ← base ortogonale, ma non ortonormale

GSO Alg. ⇒ base ortonormale → $\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ x\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}}$

$v_1 = \varphi_1 \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ poiché $\|v_1\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx}$

$v_2 = \varphi_2 - \langle \varphi_2, u_1\rangle u_1 = x$ poiché $\langle \varphi_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0$

$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$ poiché $\|v_2\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$v_3 = \varphi_3 - \langle \varphi_3, u_1\rangle u_1 - \langle \varphi_3, u_2\rangle u_2$

$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2}$

GSO: Esempio 2 in MATLAB

sottospazio $\Pi_2 = \{ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}\}$

prodotto esterno di vettori = **prodotto di Kronecker** di vettori

MATLAB Symbolic Math Toolbox

$$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

```
dotProd = @(f,g) int(f*g,-1,1);

syms x real;  A=[sym(1) x x^2] % base per Π2
A =
[ 1, x, x^2]
v(1)=A(1);
u(1)=v(1)/sqrt(dotProd(v(1),v(1)));
v(2)=A(2) - dotProd(A(2),u(1))*u(1);
u(2)=v(2)/sqrt(dotProd(v(2),v(2)));
v(3)=A(3)-dotProd(A(3),u(1))*u(1)-dotProd(A(3),u(2))*u(2);
u(3)=v(3)/sqrt(dotProd(v(3),v(3)));
```

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx}$$

```
disp(v)
[   1,   x,   x^2 - 1/3]
```
v: sistema di vettori ortogonali

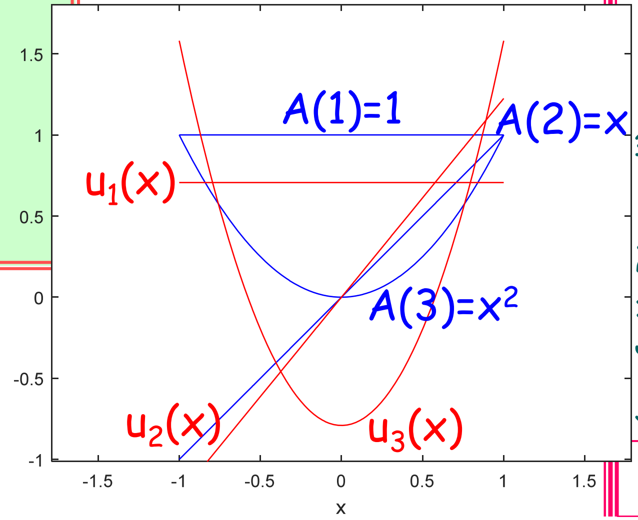
```
u=simplify(u)
u =
[2^(1/2)/2, (6^(1/2)*x)/2, (3*2^(1/2)*5^(1/2)*(x^2 - 1/3))/4]
```
u: sistema di vettori ortonormali

```
disp(int(A'*A, -1,1))
[    2,    0, 2/3]
[    0, 2/3,    0]
[ 2/3,    0, 2/5]
```
non ortogonale

```
disp(int(v'*v, -1,1))
[ 2,    0,     0]
[ 0, 2/3,     0]
[ 0,    0, 8/45]
```
ortogonale

```
disp(int(u'*u, -1,1))
[ 1,    0,     0]
[ 0,    1,     0]
[ 0,    0,     1]
```
ortonormale

Il grafico di funzioni non rappresenta i vettori di Π_2; per immaginarli come vettori di un sottospazio lineare, dobbiamo considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$, lo spazio reale 3D.



Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Che succede se si applica GSO ad un sistema di vettori linearmente dipendente?

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}a_1 & \;\; a_2 & \;\; a_3\end{matrix}\end{array}$$

la terza colonna è la somma delle prime due: le 3 colonne sono linearmente dipendenti.

$$v_1=a_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\begin{pmatrix}-0.89443\\0.44721\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2=a_2-\langle a_2,u_1\rangle u_1=\begin{pmatrix}0.2\\0.4\\1\end{pmatrix} \qquad u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\begin{pmatrix}0.18257\\0.36515\\0.91287\end{pmatrix}$$

$$v_3=a_3-\langle a_3,u_1\rangle u_1-\langle a_3,u_2\rangle u_2=\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \qquad u_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\,?$$

NaN

NaN sta per "Not A Number"
(qui significa "forma indeterminata 0/0")

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt in MATLAB

Che succede se si applica GSO ad un sistema di vettori linearmente dipendente?

```
A=sym([-2 1 0; 1 0 1; -1 1 1]');
disp(rank(A))
     2
```

la 3ª colonna è la somma delle prime due

colonne linearmente dipendenti

GSO

```
v(:,1)=A(:,1);
u(:,1)=v(:,1)/norm(v(:,1));
v(:,2)=A(:,2) - dot(A(:,2),u(:,1))*u(:,1);
u(:,2)=v(:,2)/norm(v(:,2));
v(:,3)=A(:,3) - dot(A(:,3),u(:,1))*u(:,1) ...
              - dot(A(:,3),u(:,2))*u(:,2);
u(:,3)=v(:,3)/norm(v(:,3));
disp(v)
[-2, 1/5, 0]
[ 1, 2/5, 0]
[ 0,   1, 0]
```

È possibile scrivere il codice in un algoritmo più generale

vettore nullo

```
u=simplify(u)
u =
[-(2*5^(1/2))/5, 30^(1/2)/30, NaN]
[      5^(1/2)/5, 30^(1/2)/15, NaN]
[              0,  30^(1/2)/6, NaN]
```

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt in MATLAB

Che succede se si applica ***GSO*** ad un sistema di vettori linearmente dipendente?

```
syms x real
A=[sym(1)  x+1  x  x^2]
A =
[ 1,  x+1,  x  x^2]
```

4 funzioni

la 2ª funzione è somma della 1ª e della 3ª
o eqival. la 3° è differenza della 2ª e della 1ª

non si può calcolare il rango!
Come stabilire se le funzioni sono linearmente indipendenti?

```
dotProd=@(f,g) int(f*g,-1,1);
```

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

```
v(1)=A(1);
u(1)=v(1)/sqrt(dotProd(v(1),v(1)));
v(2)=A(2)-dotProd(A(2),u(1))*u(1);
u(2)=v(2)/sqrt(dotProd(v(2),v(2)));
v(3)=A(3)-dotProd(A(3),u(1))*u(1)-dotProd(A(3),u(2))*u(2);
u(3)=v(3)/sqrt(dotProd(v(3),v(3)));
v=simplify(v)
v =
[ 1, x, 0]
disp(simplify(u))
[ 2^(1/2)/2, (6^(1/2)*x)/2, NaN]
v(4)= … NaN
```

funzione (componente) nulla

NaN sta per "Not A Number"
(qui significa "forma indeterminata 0/0")

Esercizi

Scrivere una funzione MATLAB che accetti come parametri di input una sequenza di n vettori e, mediante l'algoritmo GSO, verifichi se essi sono linear-mente indipendenti ed, in tal caso, restituisca come parametri di output i sistemi di vettori ortogonali ed ortonormali.

Cosa cambia nel codice se i vettori di input sono complessi, invece che reali?

Scrivere sia la versione simbolica del codice, applicabile anche a vettori di funzioni, e la versione numerica del codice, applicabile solo a vettori di n componenti reali.

GSO e fattorizzazione QR

L'***algoritmo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt***, quando applicato ai vettori colonna di una matrice non singolare $A_{(n \times n)}$, si può interpretare come una fattorizzazione $A=QR$ della matrice A, dove

- R è una matrice triangolare superiore;
- Q è una matrice ortogonale*:

* Se la matrice A è rettangolare, allora Q ha colonne ortonormali.

$$Q^{-1} = Q^{T} \iff Q^{T}Q = I$$

$$Q = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

colonne ortonormali

Algoritmo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Si risolve ogni formula rispetto ad a_k:

$$v_1 = a_1; \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{a_1}{\|v_1\|}$$

$$\left.\begin{aligned} v_k &= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, u_j \rangle u_j \\ u_k &= \frac{v_k}{\|v_k\|} \end{aligned}\right\} \text{for } k = 2,3,\ldots,n$$

$$a_1 = v_1 = \|v_1\| u_1;$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, u_j \rangle u_j + \|v_k\| u_k \\ v_k &= \|v_k\| u_k \end{aligned}\right\} \text{for } k = 2,3,\ldots,n$$

Com'è fatta la matrice R ?

Si riscrivano le formule dell'algoritmo GSO in modo che esso restituisca le colonne di $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \left(\underline{\boldsymbol{a}}_1 \quad \underline{\boldsymbol{a}}_2 \quad \dots \quad \underline{\boldsymbol{a}}_n \right) \longleftarrow \boxed{\text{colonne di } A}$$

$$\|v_1\| u_1 = \underline{a}_1; \quad \Leftarrow \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad v_1 \longleftarrow a_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left\langle \underline{a}_k, u_j \right\rangle u_j + \|v_k\| u_k = \underline{a}_k \\ \qquad\qquad\qquad \Uparrow \\ \qquad\qquad\qquad u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|} \end{array}\right\} \quad \text{for} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$Q = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{colonne di } Q}$$

Si aggiungano, in ogni equazione, i vettori $\underline{u}_k$ non presenti con coef 0:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\|\underline{v}_1\|\underline{u}_1 & + & 0\underline{u}_2 & + & 0\underline{u}_3 & + & \cdots & + & 0\underline{u}_n & = & \underline{a}_1 \\
\langle \underline{a}_2, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 & + & \|\underline{v}_2\|\underline{u}_2 & + & 0\underline{u}_3 & + & \cdots & + & 0\underline{u}_n & = & \underline{a}_2 \\
\langle \underline{a}_3, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 & + & \langle \underline{a}_3, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 & + & \|\underline{v}_3\|\underline{u}_3 & + & \cdots & + & 0\underline{u}_n & = & \underline{a}_3 \\
\langle \underline{a}_4, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 & + & \langle \underline{a}_4, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 & + & \langle \underline{a}_4, \underline{u}_3 \rangle \underline{u}_3 & + & \cdots & + & 0\underline{u}_n & = & \underline{a}_4 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & & \vdots \\
\langle \underline{a}_n, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 & + & \langle \underline{a}_n, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 & + & \langle \underline{a}_n, \underline{u}_3 \rangle \underline{u}_3 & + & \cdots & + & \|\underline{v}_n\|\underline{u}_n & = & \underline{a}_n
\end{array}$$

$$\underline{a}_j = \overbrace{\alpha_{1j}\underline{u}_1 + \alpha_{2j}\underline{u}_2 + \alpha_{3j}\underline{u}_3 + \alpha_{4j}\underline{u}_4 + \cdots + \alpha_{nj}\underline{u}_n}^{\text{combinazione lineare delle colonne di } Q} = Q \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

j^{sima} **colonna di A**

j^{sima} **colonna di R**

$$R = \begin{pmatrix} \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_2} & \cdots & \underline{\alpha_n} \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{colonne di R}}$$

coefficienti di u_k

$$\begin{aligned}
&\|v_1\| u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n = a_1 \\
&\langle a_2, u_1\rangle u_1 + \|v_2\| u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n = a_2 \\
&\boxed{\langle a_3, u_1\rangle u_1 + \langle a_3, u_2\rangle u_2 + \|v_3\| u_3 + 0u_4 + \cdots + 0u_n = a_3} \\
&\langle a_4, u_1\rangle u_1 + \langle a_4, u_2\rangle u_2 + \langle a_4, u_3\rangle u_3 + \|v_4\| u_4 + \cdots + 0u_n = a_4 \\
&\vdots \\
&\sum_{j=1}^{n-1} \langle a_n, u_j\rangle u_j + \|v_n\| u_n = a_n
\end{aligned}$$

$$R = \begin{pmatrix}
\|v_1\| & \langle a_2, u_1\rangle & \langle a_3, u_1\rangle & \langle a_4, u_1\rangle & \cdots & \langle a_n, u_1\rangle \\
 & \|v_2\| & \langle a_3, u_2\rangle & \langle a_4, u_2\rangle & \cdots & \langle a_n, u_2\rangle \\
 & & \|v_3\| & \langle a_4, u_3\rangle & \cdots & \langle a_n, u_3\rangle \\
 & & & \|v_4\| & \cdots & \langle a_n, u_4\rangle \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & \|v_n\|
\end{pmatrix}$$

$\underline{\alpha_3} =$ (third column)

Esempio 1: funzione MATLAB qr()

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A=[-2 1 0; 1 0 1; 0 2 1]';
```
matrice quadrata

GSO

```
v(:,1)=A(:,1); u(:,1)=v(:,1)/norm(v(:,1));
v(:,2)=A(:,2)-A(:,2)'*u(:,1)*u(:,1); u(:,2)=v(:,2)/norm(v(:,2));
v(:,3)=A(:,3)-(A(:,3)'*u(:,1)*u(:,1)+A(:,3)'*u(:,2)*u(:,2));
u(:,3)=v(:,3)/norm(v(:,3));
u
```

```
u =
     -0.8944     0.1826     0.4082
      0.4472     0.3651     0.8165
           0     0.9129    -0.4082
```

```
[Q,R]=qr(A)
```

```
Q =
     -0.8944    -0.1826    -0.4082
      0.4472    -0.3651    -0.8165
           0    -0.9129     0.4082
```

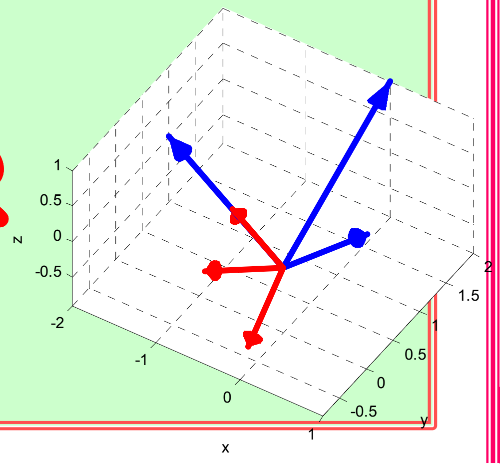
base di $\mathbb{R}^3$

```
R =
      2.2361    -0.8944     0.8944
           0    -1.0954    -1.6432
           0          0    -1.2247
```

Gram-Schmidt

=

QR



Esempio 2: funzione MATLAB qr()

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

```
A=[-2 1 0; 1 0 1]';
```
matrice rettangolare

GSO
```
v(:,1)=A(:,1); u(:,1)=v(:,1)/norm(v(:,1));
v(:,2)=A(:,2)-A(:,2)'*u(:,1)*u(:,1); u(:,2)=v(:,2)/norm(v(:,2));
u
u =
      -0.8944     0.1826
       0.4472     0.3651
            0     0.9129
[Q,R]=qr(A)
Q =
      -0.8944    -0.1826    -0.4082
       0.4472    -0.3651    -0.8165
            0    -0.9129     0.4082
R =
       2.2361    -0.8944
            0    -1.0954
            0          0
```

base di $\mathscr{R}(A)$

base di $\mathscr{R}(A)^{\perp}$

QR = Gram-Schmidt +

completamento della base di $\mathbb{R}^3$ mediante $\mathscr{R}(\mathbf{A})^{\perp}$ da $\mathbb{R}^3=\mathscr{R}(\mathbf{A})\oplus\mathscr{R}(\mathbf{A})^{\perp}$

Esempio 3: funzione MATLAB qr()

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

```
A=[-2 1 0; 1 0 1]';
```
matrice rettangolare

GSO
```
v(:,1)=A(:,1); u(:,1)=v(:,1)/norm(v(:,1));
v(:,2)=A(:,2)-A(:,2)'*u(:,1)*u(:,1); u(:,2)=v(:,2)/norm(v(:,2));
u
u =
      -0.8944    0.1826
       0.4472    0.3651
            0    0.9129

[Q,R]=qr(A,"econ")  % economy size
Q =
      -0.8944   -0.1826
       0.4472   -0.3651
            0   -0.9129
R =
       2.2361   -0.8944
            0   -1.0954
```

$\mathscr{R}(Q)=\mathscr{R}(A)$

QR = Gram-Schmidt

R: matrice triangolare superiore