Esercizi e Laboratorio

ACS_P2_02 Risolvere i seguenti esercizi.

1. Assegnate in $\mathbf{R}^3$ le seguenti forme bilineari con parametro α, stabilire per quale valore del parametro le forme rappresentano un prodotto scalare:

   1.1 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha x_1y_1 + x_1y_3 + \alpha x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + \alpha x_3y_3$

   1.2 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (2-\alpha)x_1y_3 + \alpha x_2y_2 + (2-\alpha)x_3y_1 + 5x_3y_3$

2. Verificare se i seguenti sono prodotti scalari:

   2.1 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ (*prodotto scalare standard* di $\mathbb{R}^n$)

   2.2 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ (*prodotto scalare standard* di $\mathbb{C}^{n\,*}$)

> * La funzione **`dot()`** di MATLAB calcola il prodotto scalare tra vettori complessi come
>
> $$\texttt{dot}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$
>
> in tal caso la *proprietà di linearità* va applicata al secondo argomento
>
> $$F(\boldsymbol{z}, a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}^{\mathsf{H}}(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = aF(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) + bF(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n,\ a,b \in \mathbb{C}$$
>
> oppure, se applicata al primo argomento, la *proprietà di linearità* va espressa come segue:
>
> $$F(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})^{\mathsf{H}}\boldsymbol{z} = \overline{a}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \overline{b}F(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n,\ a,b \in \mathbb{C}$$

3. Determinare il valore del parametro α in modo che siano ortogonali i vettori $\boldsymbol{u}=(-3, 2)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{v}=(2, \alpha)^{\mathsf{T}}$.

4. Assegnati due vettori nel piano $\boldsymbol{r}=(2, -1)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{s}=(-1, 2)^{\mathsf{T}}$, trovare un vettore $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)^{\mathsf{T}}$ tale che risulti $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}\rangle=1$ e $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}\rangle=0$, dove le parentesi triangolari indicano il *prodotto scalare standard* di $\mathbf{R}^2$.

5. Assegnata una matrice $\boldsymbol{A}$ ($m\times n$), dimostrare che lo *Spazio Nullo* della matrice $\boldsymbol{A}$, $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$, contiene tutti e soli i vettori ortogonali allo *Spazio delle Righe* di $\boldsymbol{A}$, $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$.

6. Il vettore $\boldsymbol{p}=(150, 225, 375)^{\mathsf{T}}$ rappresenta il prezzo di alcuni modelli di biciclette, mentre il vettore $\boldsymbol{n}=(10, 7, 9)^{\mathsf{T}}$ rappresenta il numero di biciclette vendute per ciascun modello. Calcolare il prodotto scalare tra $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$ e stabilirne il significato.

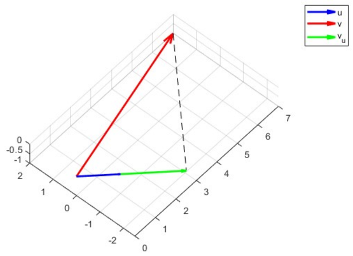
7. Verificare se i seguenti vettori sono ortogonali oppure no. Disegnare i vettori:

   7.1 $\boldsymbol{u}=(2, 1)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{v}=(-1, 2)^{\mathsf{T}}$.

   7.2 $\boldsymbol{u}=(3, -1, -2)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{v}=(-2, -3, 1)^{\mathsf{T}}$.

   7.3 $\boldsymbol{u}=(1, -1, 0)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{v}=(7, 2, -1)^{\mathsf{T}}$.

   Calcolare e disegnare il vettore componente di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$. Per esempio, in 7.3 la figura potrebbe essere la seguente:



8. Trovare e disegnare tutti i vettori $\boldsymbol{v}$ ortogonali al vettore $\boldsymbol{u}$, dove:
   8.1 $\boldsymbol{u}=(3, 4)^{\mathsf{T}}$.
   8.2 $\boldsymbol{u}=(1, -1, -1)^{\mathsf{T}}$.

   È questo insieme un sottospazio lineare?

9. Cos'è l'insieme dei vettori ortogonali contemporaneamente a $(1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ e $(1, 2, 3)^{\mathsf{T}}$. Come descrivere il problema nell'ambito dei *Sottospazi Fondamentali di una matrice*?

10. Calcolare il prodotto scalare tra i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sapendo che:
    10.1 $\|\boldsymbol{u}\|=5$, $\|\boldsymbol{v}\|=3$ e l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è 30°.
    10.2 $\|\boldsymbol{u}\|=20$, $\|\boldsymbol{v}\|=15$ e l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è 225°.

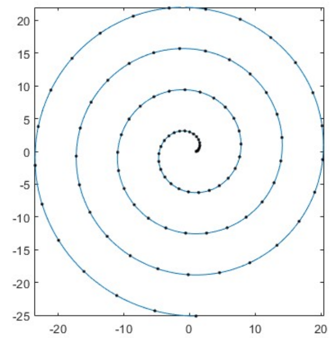
11. Per una matrice reale A di size (2×2), stimare mediante il *Symbolic Math Toolbox* l'indice di condizionamento $\kappa(A)$ confrontando il risultato con **cond(*A*)**. $\kappa(A)$ è definito da:
$$\kappa(A)=\frac{\max\limits_{v\neq\underline{0}}\dfrac{\|A\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2}}{\min\limits_{v\neq\underline{0}}\dfrac{\|A\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2}}$$

12. Dato il triangolo di vertici A, B e C, disegnarlo e determinare l'angolo in gradi nel vertice A:
    12.1 A(2,–7), B(1,1) e C(6,3).
    12.2 A(1,1,8), B(4,–3,–4) e C(–3,1,5).

13. Dato il triangolo di vertici A, B e C, disegnarlo e determinare "efficientemente" se il triangolo è acutangolo, ottusangolo o rettangolo:
    13.1 A(2,3,0), B(3,1,–2) e C(–1,4,5).
    13.2 A(5,1,0), B(7,1,1) e C(6,3,2).

14. Assegnati N campioni da una curva regolare Γ nel piano, determinare ("numericamente") la retta tangente e la retta normale alla curva in uno dei punti campione P_0 scelto a caso. L'equazione parametrica della curva può essere usata esclusivamente per generare i campioni e per controllare la bontà dei risultati nella loro visualizzazione grafica. Cosa cambia se il punto P_0 viene scelto non coincidente con uno dei campioni? Per esempio la curva *Involute of a Circle* è descritta dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \cos(\theta) + \theta \sin(\theta)$$
$$y = \sin(\theta) - \theta \cos(\theta)$$



Calcolare l'angolo formato dalla retta tangente alla curva in P_0 con l'asse delle ascisse.

[Altre curve: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html]