Esercizi

ACS2_01 – Spazi e Sottospazi Lineari.

1. Assegnati i vettori $\boldsymbol{v}_1=(1,2,0)^\top$ e $\boldsymbol{v}_2=(2,3,0)^\top$:
   - Sono linearmente indipendenti?
   - Quale spazio **V** generano e di quale dimensione?
   - Quali matrici $\boldsymbol{A}$ hanno **V** come loro *Spazio delle Colonne*?
   - Quali matrici $\boldsymbol{B}$ hanno **V** come loro *Spazio Nullo*?
2. Verificare che i seguenti insiemi di n-ple reali sono sottospazi lineari di $\mathbf{R}^n$:
   - $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)^\top \wedge x_j=0$ per un j fissato$\}$
   - $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top \wedge x_1=x_2=\ldots=x_n\}$
   - $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n : \sum_{k=1,\ldots,n} x_k = 0\}$

   A tal fine si può anche usare il *Symbolic Math Toolbox* di MATLAB per un particolare valore di n.
3. Poi, determinare la dimensione ed una base dei precedenti sottospazi.
4. Analogamente a quanto detto su un segmento in $\mathbf{R}^2$, assegnati tre punti non allineati P_1, P_2, P_3, si consideri l'equazione parametrica di un piano* in $\mathbf{R}^3$:

   $$\pi \;:\; P = P_1 + \lambda(P_2 - P_1) + \mu(P_3 - P_1), \qquad \lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

   Se si limitano i parametri reali $\lambda,\mu\in[0,1]$, l'equazione descrive il parallelogramma avente i tre punti come vertici [`ACS2_01.pdf`].
   - Tale parallelogramma è un sottospazio lineare di $\mathbf{R}^3$?
   - Assegnato un altro punto, stabilire se esso appartiene al parallelogramma [vedi `ACS2_01.pdf` per qualche punto test].

   [*In realtà, la precedente equazione parametrica è relativa ad un piano considerato come **sottospazio affine** dello Spazio Affine reale 3D (studieremo questi spazi in seguito)]