Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_02

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - **Prodotto scalare** tra vettori reali e complessi.
  - **Norma** di vettori e norma indotta da un prodotto scalare.
  - Legge del parallelogramma.
  - Norma matriciale indotta.
  - **Applicazioni**: angoli tra sottospazi, componente di un vettore lungo un altro, retta e piano tangente, retta normale.

Richiami

Definizione:
prodotto scalare tra vettori reali

Sia $\langle X, \mathbb{R}, +, * \rangle$ uno Spazio Lineare sul campo reale.

Si definisce ***prodotto scalare*** (o ***prodotto interno***) di due vettori reali l'applicazione

$$\langle \bullet, \bullet \rangle \quad : \quad (x, y) \in X \times X \longrightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

se verifica le seguenti proprietà:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$ Linearità
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X$ Simmetria
3. $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0}$

Definitezza Positiva

Forme bilineari simmetriche

Più sinteticamente, un prodotto scalare $\langle \bullet , \bullet \rangle$ tra vettori reali è una forma bilineare reale simmetrica e definita positiva (forma quadratica definita positiva).

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$

lineare rispetto ai 2 argomenti $\Longleftrightarrow$ forma bilineare

2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X$

simmetrica

3. $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$

4. $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0}$

forma quadratica definita positiva

Esempio: verificare se è un prodotto scalare

$$\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Può vedersi come $\langle x,y\rangle = x^T A y$ dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica mediante il

Symbolic Math Toolbox MATLAB

```
syms x y [2 1] real
x, y
x =
x1
X2
y =
y1
y2
```

```
A=[2 2; 1 1];
x=sym('x',[2 1],'real');
y=sym('y',[2 1],'real');
expand(x'*A*y)
ans =
2*y1*x1+y1*x2+2*y2*x1+y2*x2
```

espande e semplifica le espressioni

```
syms x y [2 1] real
f=2*x1*y1+2*x1*y2+x2*y1+x2*y2;
[c,t] = coeffs(f)
c =
[2, 2, 1, 1]
t =
[x1*y1, x1*y2, x2*y1, x2*y2]
n = sqrt(numel(c)); % num. di elem.
A = (reshape(c,n,n))'
A =
[2, 2]
[1, 1]
```

```
A=[2 2; 1 1];
syms x y z [2 1] real
syms a b real
F=@(x,y) x'*A*y
F =
  function_handle with value:
    @(x,y)x'*A*y
```

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Verifica

1. $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall x,y,z\in X$

```
expand( F(a*x+b*y,z) - ( a*F(x,z)+b*F(y,z) ) )
ans =
   0
```

```
simplify(F(a*x+b*y,z) == (a*F(x,z)+b*F(y,z)))
ans =
symtrue
```

OK! Ovvio!!! ...Perché?

2. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y\in X$

non vale!

```
simplify(expand( F(x,y) - F(y,x) ))
ans =
x1*y2 - x2*y1
```

```
simplify(expand(F(x,y) == F(y,x)))
ans =
x1*y2 == x2*y1
```

NO! Ovvio!!! ...Perché?

non è un prodotto scalare!

Pur avendo già stabilito che questa forma bilineare <u>non</u> è un prodotto scalare, si verifichi comunque se essa risulta definita positiva.

definita positiva $\Leftrightarrow$

3. $\langle x, x \rangle = x^T A x > 0 \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$

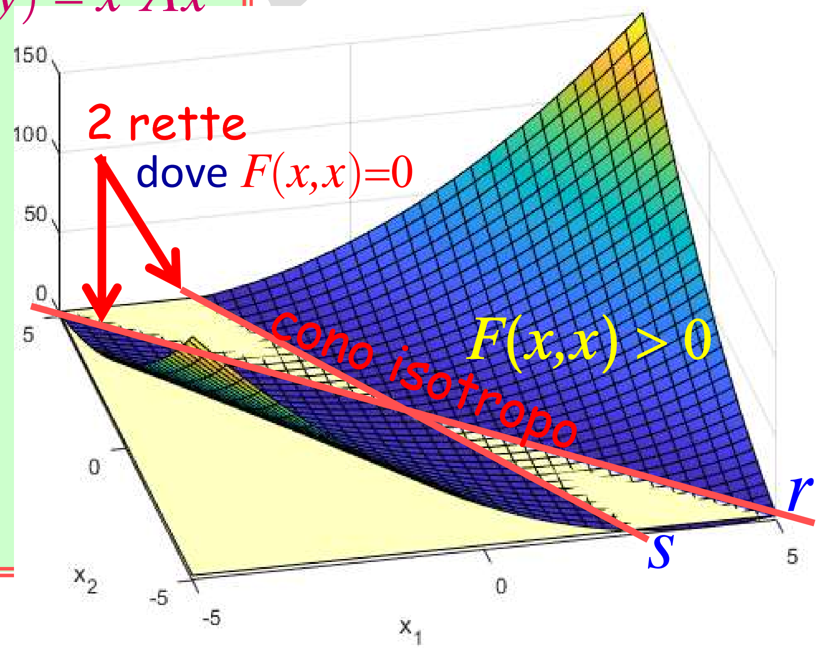
4. $\langle x, x \rangle = x^T A x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0}$

la forma bilineare è 0 solo per il vettore nullo

```
...S=simplify(F(x,x),50)
S =
(x1 + x2)*(2*x1 + x2)
fsurf(S); hold on; AX=axis;
surf([AX(1:2);AX(1:2)],[AX(3:4);AX(3:4)]',
                                zeros(2,2))
X2=solve(S,x2)
X2 =
   -x1
 -2*x1
disp(factor(S))
[x1 + x2, 2*x1 + x2]
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F(x,y) = x^{\mathsf{T}} A x$$

2 rette: 1) x2=-x1
2) x2=-2*x1



r : x2 = -x1 corrisponde a $r = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

s : x2 = -2*x1 corrisponde a $s = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

r : x2 = -x1

corrisponde a $r = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

s : x2 = -2*x1

corrisponde a $s = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

cosa rappresentano r ed s per la matrice A?

```
A=[2 2; 1 1];
NA=null(A)
NA =
   -0.7071
    0.7071
NAT=null(A')
NAT =
   -0.4472
    0.8944
```

```
A=sym([2 2; 1 1]);
NA=null(A)
NA =
     -1
      1
NAT=null(A')
NAT =
   -1/2
      1
```

$r = \mathcal{N}(A)$

$s = \mathcal{N}(A^T)$

Oltre al vettore nullo, esistono infiniti vettori x per cui

$$x^T A x = 0$$

Infatti l'equazione $x^T A x = 0$ è soddisfatta quando

- $Ax = 0$ cioè per x nello Spazio Nullo di A $\mathcal{N}(A)$

oppure

- $x^T A = 0$ cioè per x nello Spazio Nullo Sinistro di A $\mathcal{N}(A^T)$

oppure

- $x \perp Ax$ cioè quando x e Ax sono perpendicolari

- Una forma quadratica risulta definita positiva se, e solo se, la matrice associata è definita positiva.

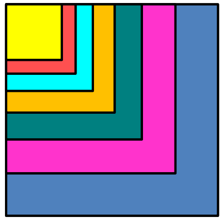
- Una matrice simmetrica è definita positiva se, e solo se, tutti i minori principali* sono > 0.

non conviene computazionalmente

- Una matrice simmetrica è definita positiva se, e solo se, tutti i suoi autovalori sono > 0.

Le matrici simmetriche definite positive possono esprimersi nella fattorizzazione di Cholesky $A=LL^T$.

* I minori principali sono i determinanti delle sottomatrici di ordine k, cioè le sottomatrici formate dalle prime k righe e k colonne, per k=1,...,n.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A=[2 2; 1 1];
disp(eig(A))
       3
       0
```

semidefinita positiva

matrice non definita positiva

Esempio: verificare se è un prodotto scalare

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Può vedersi come $\langle x,y\rangle = x^T A y$ dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica mediante il ***Symbolic Math Toolbox MATLAB***

```
A=[1 1; 1 1]; syms a b real; syms x y z [2 1] real
F=@(x,y) x'*A*y;
expand( F(a*x+b*y,z) - (a*F(x,z)+b*F(y,z)) )
ans =
    0
expand( F(x,y) - F(y,x) )
ans =
    0
```

è lineare

è simmetrica

```
simplify(F(a*x+b*y,z) == (a*F(x,z)+b*F(y,z)))
ans =
symtrue
simplify(F(x,y) == F(y,x))
ans =
symtrue
```

```
S=F(x,x);
fsurf(S); hold on; AX=axis;
surf([AX(1:2);AX(1:2)],[AX(3:4);AX(3:4)]',zeros(2,2))
X2=solve(S,x2)
X2 =
    -x1
    -x1
```

non è definita positiva!

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

```
Fxx=factor(S)
Fxx =
[ x1 + x2, x1 + x2]
disp(prod(Fxx))
(x1 + x2)^2
```

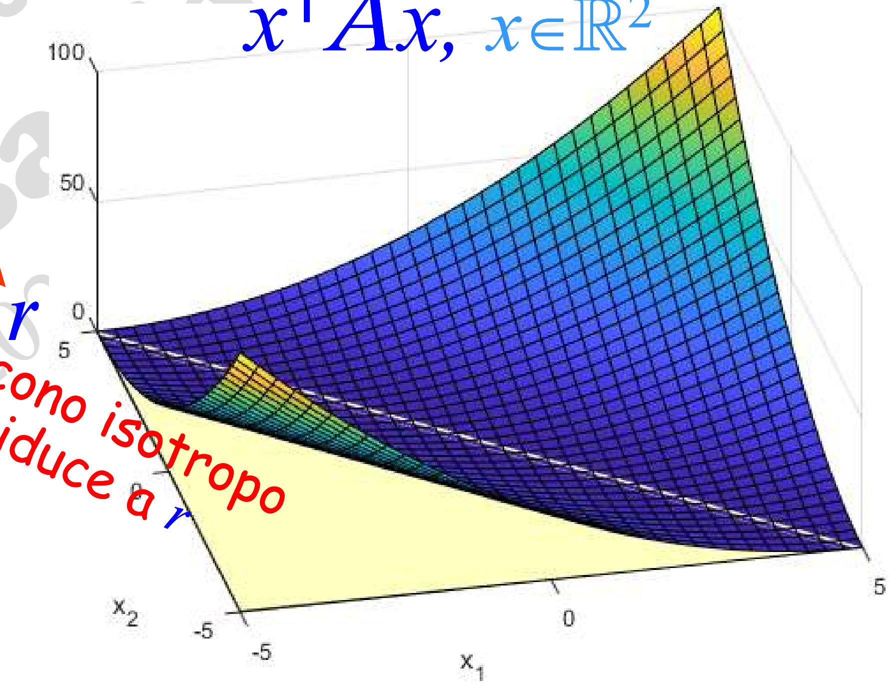
Perché?

la retta r : x2 = -x1
(tangente alla superficie S)

corrisponde a $r=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$

$$r=\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A^T)$$

$x^T A x,\ x\in\mathbb{R}^2$




```
disp(null(sym(ones(2,2))))
 -1
  1
```

A

Esempio: verificare se è un prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle \stackrel{?}{=} 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$$

Può scriversi come: $\langle x, y \rangle = x^T A y$ dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica

MATLAB ***Symbolic Math Toolbox***

```
A=[2 1; 1 -1];
syms x y [2 1] real
expand(x'*A*y)
ans =
2*x1*y1 + x1*y2 + x2*y1 - x2*y2
```

```
syms x y [2 1] real
f=2*x1*y1+x1*y2+x2*y1-x2*y2;
[c,t] = coeffs(f)
c =
[2, 1, 1, -1]
t =
[x1*y1, x1*y2, x2*y1, x2*y2]
n = sqrt(numel(c)); % num. di elem.
A = (reshape(c,n,n))'
A =
[2,  1]
[1, -1]
```

Esempio: verificare se è un prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$$

$$\langle x, y \rangle = x^T A y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica mediante il ***Symbolic Math Toolbox MATLAB***

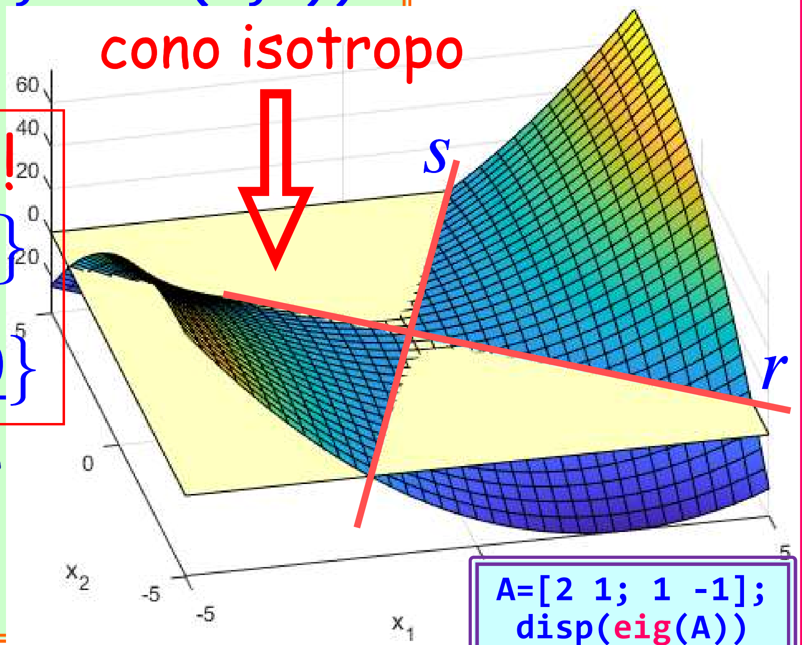
```
...
S=F(x,x); fsurf(S); hold on; AX=axis;
surf([AX(1:2);AX(1:2)],[AX(3:4);AX(3:4)]',zeros(2,2))
disp(eig(A))
   -1.3028
    2.3028
NA=null(A)
NA =
   Empty matrix: 2-by-0
NAT=null(A')
NAT  =
   Empty matrix: 2-by-0
X2=solve(S,x2)
X2  =
x1 + 3^(1/2)*x1       s
x1 - 3^(1/2)*x1       r
```

attenzione!

$$\mathcal{N}(A) = \{\underline{0}\}$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\underline{0}\}$$

un sottospazio lineare non può essere vuoto: deve contenere almeno il vettore $\underline{0}$!




```
A=[2 1; 1 -1];
disp(eig(A))
   -1.3028
    2.3028
```

Perché la matrice A non è definita positiva?

La condizione $x^{\mathsf T}Ax = 0$ si verifica quando

- ~~$Ax = 0$ cioè per x nello Spazio Nullo di A~~

in questo caso $\mathscr{N}(A) = \{\underline{0}\}$

oppure

- ~~$x^{\mathsf T}A = 0$ cioè per x nello Spazio Nullo Sinistro di A~~

in questo caso $\mathscr{N}(A^{\mathsf T}) = \{\underline{0}\}$

oppure

- $x \perp Ax$ cioè quando x e Ax sono perpendicolari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

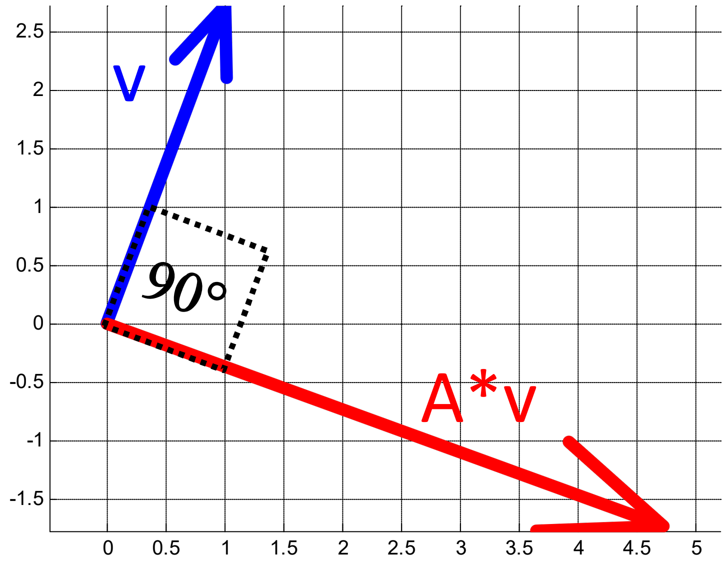
```
X2=solve(S,x2)
X2 =
 x1 + 3^(1/2)*x1
 x1 - 3^(1/2)*x1
v=subs(x,x2,X2(1))
v =
x1
X1 + 3^(1/2)*x1
simplify(v'*A*v)
ans =
0
```

le due rette r e s

sceglie **v** su una delle due rette (s)

calcola $\mathbf{v}^{\mathsf T}\mathbf{A}\mathbf{v}$

i vettori v e Av sono ortogonali!



Esempio: verificare se è un prodotto scalare

$$\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 10x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_3 + 5x_2y_3$$

Può vedersi come $\langle x,y\rangle = x^T A y$ (o anche $(Ay)^T x$) dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica

Verifica mediante il *Symbolic Math Toolbox MATLAB*

```
A=[1 -2 3;-2 5 -7;3 -7 12]; syms a b real; syms x y z [3 1] real
F=@(x,y) x'*A*y;
```

```
expand(F(a*x+b*y,z) - (a*F(x,z)+b*F(y,z)))
ans =
0
```

```
simplify(F(a*x+b*y,z)==(a*F(x,z)+b*F(y,z)))
ans =
symtrue
```

OK!

```
expand(F(x,y) - F(y,x))
ans =
0
```

```
simplify(F(x,y)==(F(y,x))
ans =
symtrue
```

OK!

```
all(eig(A) > 0)
ans =
  logical 1
```

OK!

È un prodotto scalare

Definizione:
prodotto scalare tra vettori complessi

Sia $\langle \boldsymbol{X}, \mathbb{C}, +, * \rangle$ uno Spazio Lineare sul campo complesso.

Si definisce ***prodotto scalare*** (o ***prodotto interno***) di due vettori complessi l'applicazione

$$\langle \bullet, \bullet \rangle \quad : \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \longrightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{C}$$

se verifica le seguenti proprietà:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in X$

2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$

complesso coniugato

Se $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ è un numero complesso, allora il suo complesso coniugato è $\boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}$.

3. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$

4. $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0}$

Forma Hermitiana

Più sinteticamente, il prodotto scalare tra vettori complessi $\langle \bullet,\bullet \rangle$ è una forma sesquilineare hermitiana definita positiva, cioè per la quale valgono le seguenti proprietà:

$$\langle X, \mathbb{C}, +, * \rangle$$

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in X$

forma sesquilineare

2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$

hermitiana (simmetrica coniugata)

3. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$

4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0}$

definita positiva

(prof. M. Rizzardi)

Esempio

Nello Spazio Lineare delle funzioni continue sull'intervallo [a,b] ed a valori complessi il prodotto scalare standard è definito da:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$$

Dim.:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in X$ **OK!**

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \int_a^b [\alpha x(t) + \beta y(t)]\overline{z(t)}dt = \alpha\int_a^b x(t)\overline{z(t)}dt + \beta\int_a^b y(t)\overline{z(t)}dt = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$$

2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in X$ **OK!**

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt = \overline{\int_a^b \overline{x(t)}y(t)dt} = \overline{\langle y, x\rangle}$$

3. $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in X \wedge x \neq \underline{0}$ **OK!**

$$\langle x, x\rangle = \int_a^b x(t)\overline{x(t)}dt = \int_a^b |x(t)|^2\,dt > 0$$ quando la funzione non è identicamente nulla

Esempio: caso particolare del precedente

Nello Spazio Lineare delle funzioni continue sull'intervallo [a,b] ed a valori reali il prodotto scalare standard è definito come:

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

Dim.:

1. $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \forall x,y,z\in X$ **OK!**

$$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\int_a^b[\alpha x(t)+\beta y(t)]z(t)dt=\alpha\int_a^b x(t)z(t)dt+\beta\int_a^b y(t)z(t)dt=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$$

2. $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \quad \forall x,y\in X$ **OK!**

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)y(t)dt=\int_a^b y(t)x(t)dt=\langle y,x\rangle$$

3. $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}^+ \quad \forall x\in X\wedge x\neq \underline{0}$ **OK!**

$$\langle x,x\rangle=\int_a^b x(t)x(t)dt=\int_a^b[x(t)]^2\,dt>0$$ quando la funzione non è identicamente nulla

Verifica mediante Symbolic Math Toolbox nel caso reale

```
syms w real
syms x(w) y(w) z(w)
assumeAlso([x(w) y(w) z(w)],'real')
assumeAlso([x(w) y(w) z(w)] ~= 0)
syms a b t real
assumptions
ps = @(f,g) int(f*g, -1,1); % prodotto scalare
```

dichiara x(w), y(w), z(w) funzioni simboliche reali non nulle

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

Verifica delle proprietà

1. $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall x,y,z\in X$

```
simplify(expand(ps(a*x+b*y,z) - (a*ps(x,z) + b*ps(y,z))))
ans =
     0
```

```
simplify(expand(ps(a*x+b*y,z) == (a*ps(x,z) + b*ps(y,z))))
ans =
symtrue
```

OK!

2. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y\in X$

```
simplify( ps(x,y) - ps(y,x) )
ans =
     0
```

```
simplify( ps(x(w),y(w)) == ps(y(w),x(w)) )
```

```
simplify( ps(x,y) == ps(y,x) )
ans =
symtrue
```

OK!

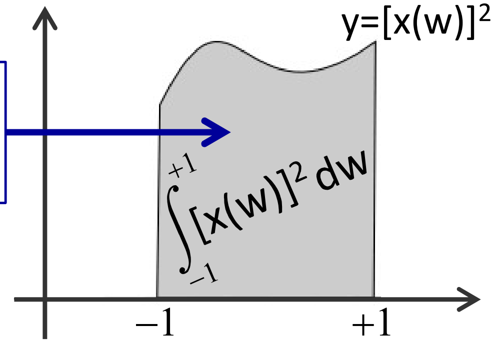
3. $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall x\in X \wedge x\neq \underline{0}$

```
disp(ps(x,x))
ans =
int(x(w)^2, w, -1, 1)
```

```
disp(ps(x(w),x(w)))
```

OK!

L'integrale rappresenta l'area sotto la curva positiva



Esercizio
verificare se sono prodotti scalari

prodotto scalare standard di vettori di $\mathbb{R}^n$

- $\langle x, y\rangle = y^T x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ cioè $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

prodotto scalare standard di vettori di $\mathbb{C}^n$

- $\langle x, y\rangle = y^H x \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ cioè $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$

dove x e y sono due vettori colonna.

Verifica mediante Symbolic Math Toobox per x e y vettori colonna, per es., di $n=5$ componenti.

Richiami: norma di vettori

Sia $\langle X, \mathbb{R}, +, * \rangle$ uno Spazio Lineare sul campo reale.

Si definisce ***norma vettoriale*** l'applicazione

$$\|\cdot\| \quad : \quad x \in X \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$$

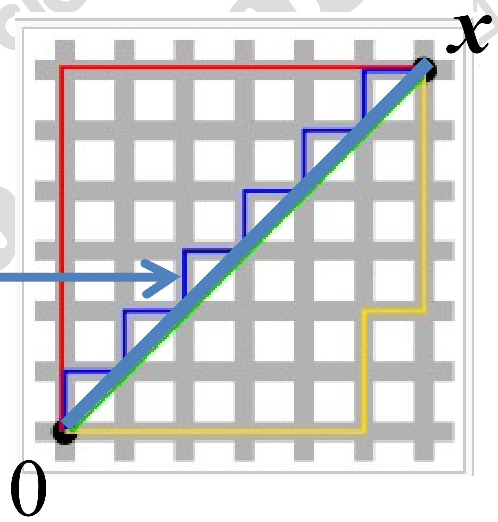
se verifica le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall \alpha \in K, \ \forall x \in X$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*disuguaglianza triangolare*)

Esempi di norme vettoriali in $\mathbb{R}^n$

norma euclidea
o norma-2

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$



Esempi di norme vettoriali in $\mathbb{R}^n$

norma uniforme o norma-∞
o norma di Chebyshev
o norma del massimo
o chessboard distance

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

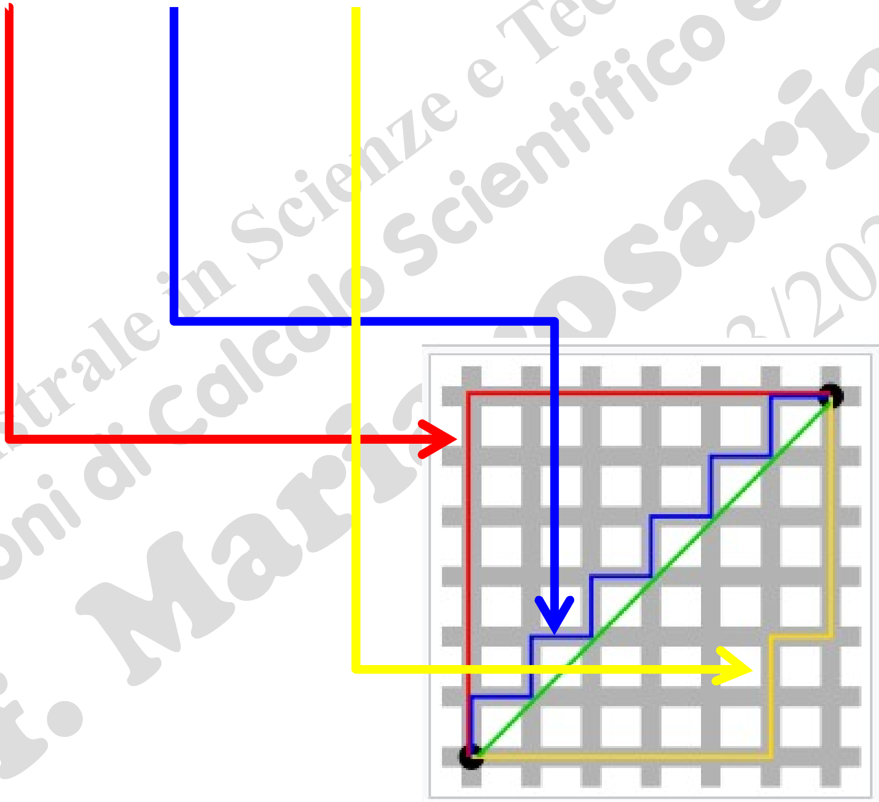
	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	5	4	3	2	2	2	2	2	8
7	5	4	3	2	1	1	1	2	7
6	5	4	3	2	1	♔	1	2	6
5	5	4	3	2	1	1	1	2	5
4	5	4	3	2	2	2	2	2	4
3	5	4	3	3	3	3	3	3	3
2	5	4	4	4	4	4	4	4	2
1	5	5	5	5	5	5	5	5	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

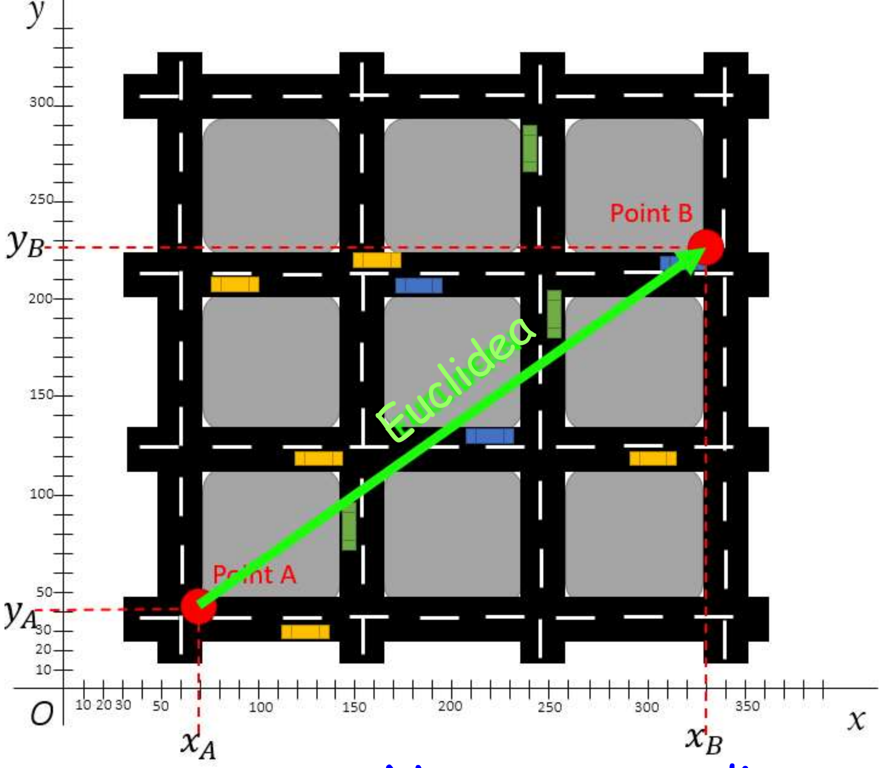
chessboard distance: perché il minimo numero di mosse del re (degli scacchi) per andare da una casella ad un'altra è uguale alla distanza-∞ tra i centri delle caselle, purché esse si suppongano di lato 1.
Il re può muoversi ogni volta di 1 casella in qualsiasi direzione (oriz., vert. e diag.)

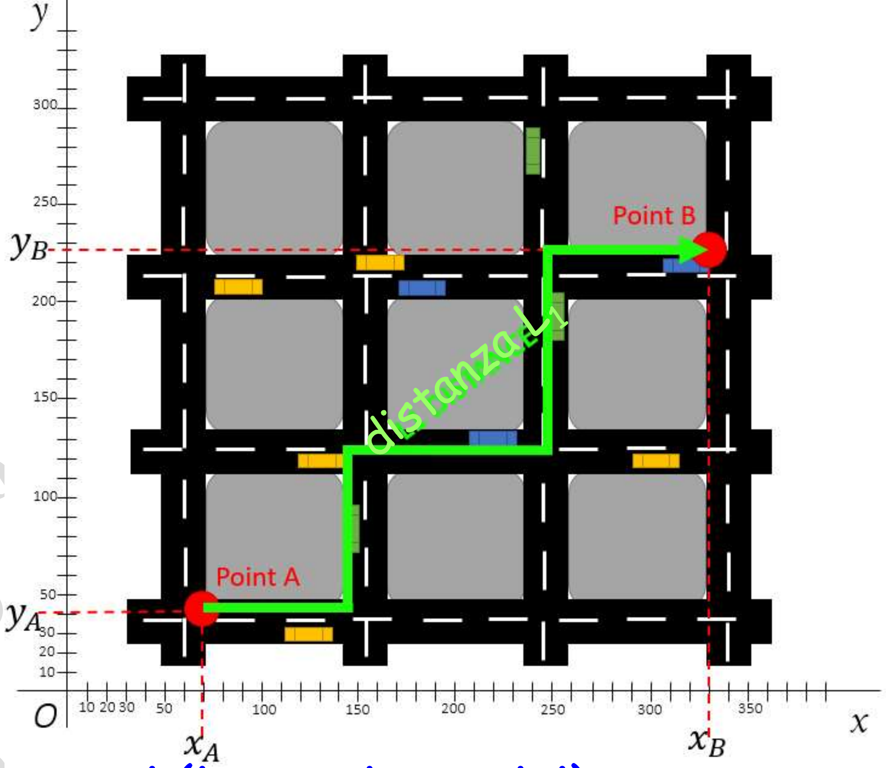
Esempi di norme vettoriali in $\mathbb{R}^n$

norma-1
o Manhattan norm
o Taxicab norm

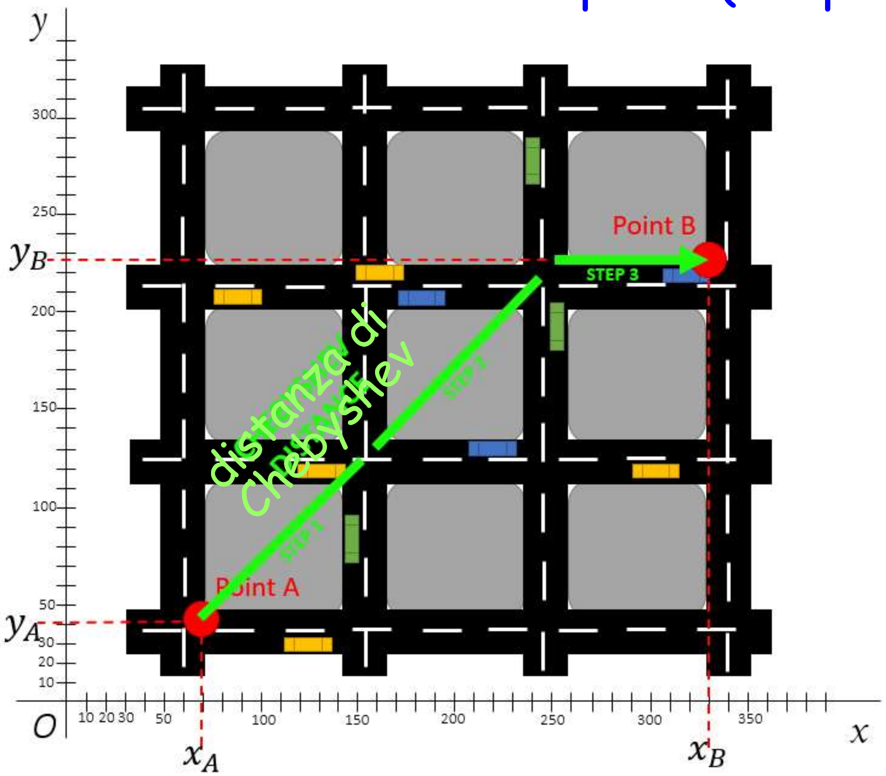
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$







Norme come distanza tra due punti (in spazi metrici)



La funzione norm( ) di MATLAB

```
x=[1 2 -3 -4 5];
disp( [ norm(x); norm(x,2); norm(x,inf); norm(x,1) ] )
    7.4162
    7.4162
    5.0000
   15.0000
 disp(sqrt(sum(x.^2)))
    7.4162
 disp(max(abs(x)))
    5
disp(sum(abs(x)))
    15
```

norma-2 norma-∞ norma-1

norma-2 (default)

norma-∞

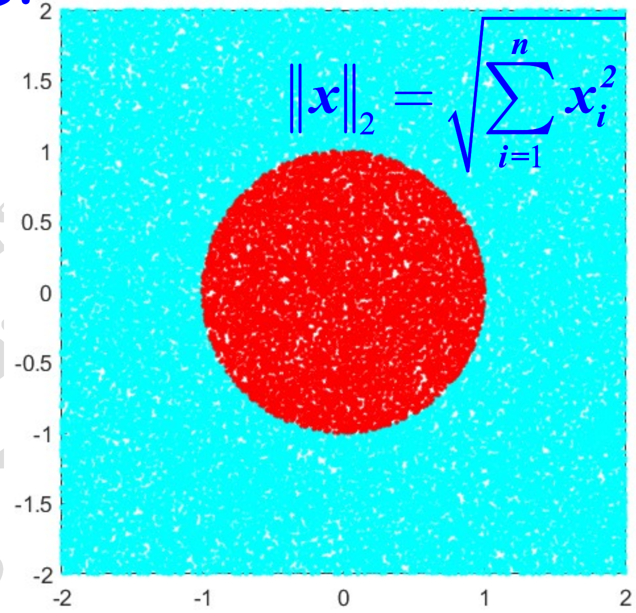
norma-1

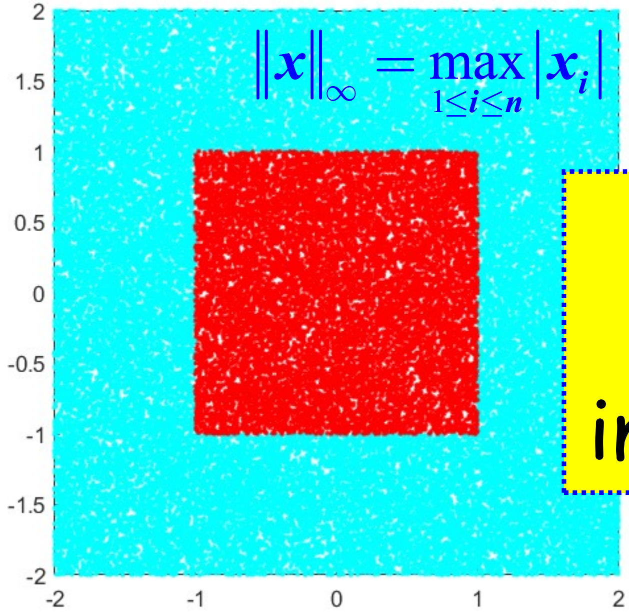
Intorni di un punto in spazi metrici:

$$I_\rho(P) = \{Q : d(Q,P) = \|P-Q\| \le \rho\}$$

$\|x\|_2$

```
x1=-2+4*rand(1,50000);
x2=-2+4*rand(1,50000); x=[x1;x2];
j=find(sqrt(sum(x.^2)) <= 1);
plot(x1,x2,'.c',x1(j),x2(j),'.r')
axis equal
```



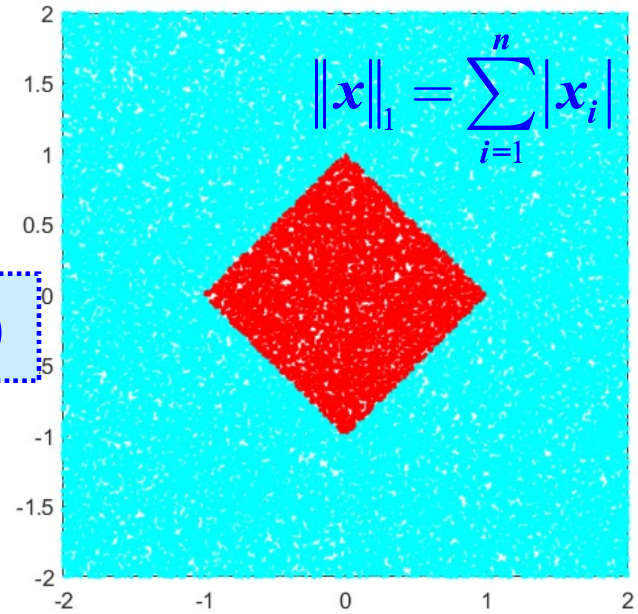


$\|x\|_1$

```
...
j=find(sum(abs(x))<=1);
...
```

si può usare
norm(x)
in questi esempi?

vedi: **vecnorm(x,p)**




```
...
j=find(max(abs(x))<=1);
...
```

$\|x\|_\infty$

Norme vettoriali indotte

Dalla definizione di ***prodotto scalare standard*** in $\mathbb{R}^n$

$$\forall u,v \in \mathbb{R}^n \qquad \langle u,v\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k$$

analogamente anche in $\mathbb{C}^n$

$$\forall u,v \in \mathbb{C}^n \qquad \langle u,v\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \overline{v}_k$$

si vede che la ***norma euclidea*** può scriversi come

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \langle x,x\rangle$$

e si parla di norma indotta dal prodotto scalare.

$\|\cdot\|$ è norma indotta dal prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle : \|x\|^2 = \langle x,x\rangle$

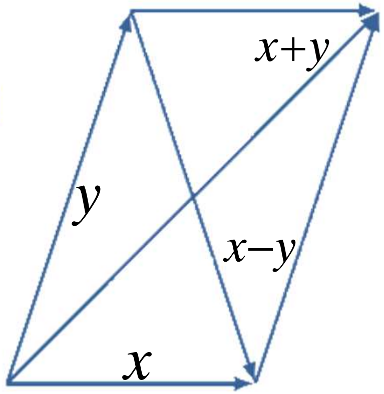
Legge del parallelogramma

In uno Spazio lineare X, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ che induce una norma $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$, vale la Legge del parallelogramma (*parallelogram law*):

$$\forall x,y\in X \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

In realtà, vale la proprietà: "una norma è indotta da un prodotto scalare se, e solo se, vale la Legge del Parallelogramma".

È detta Legge del Parallelogramma perché lega i quadrati dei lati del parallelogramma ai quadrati delle sue diagonali.



Dim.: $\forall x,y\in X$ (caso reale)

Per le proprietà del *prodotto scalare*:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

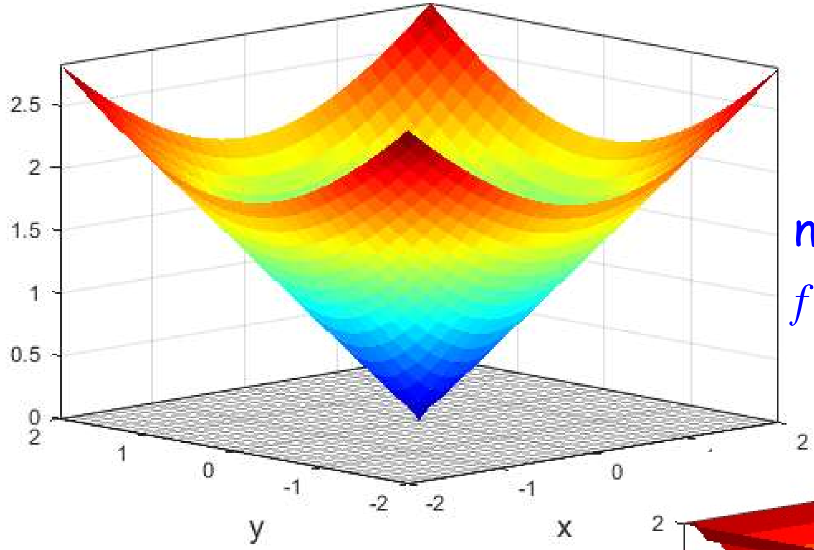
Sommando membro a membro, si ha:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Le **norme** sono sempre funzioni convesse*, per ogni $\|x\|$.

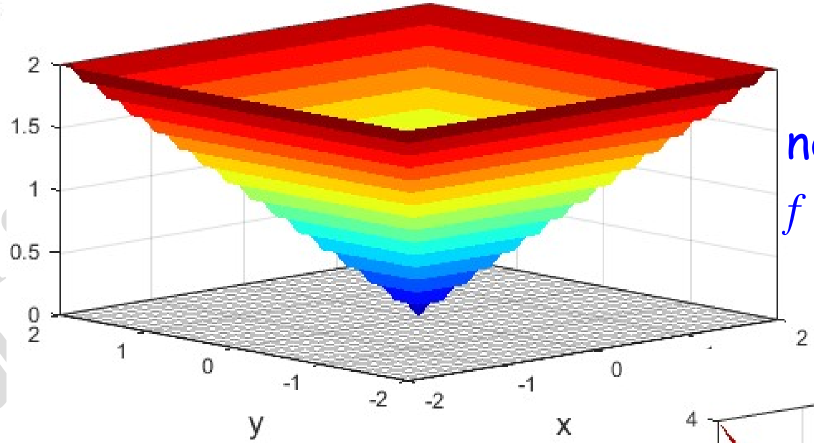
Esempi in $\mathbb{R}^2$

Le funzioni convesse sono molto importanti per molti problemi di ottimizzazione usati nelle applicazioni



norma 2

$$f(x_1, x_2) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$$



norma ∞

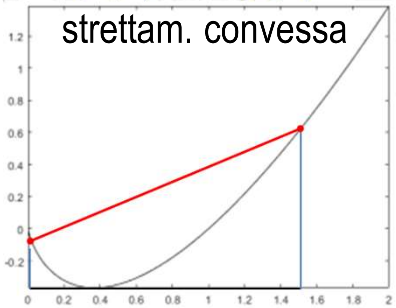
$$f(x_1, x_2) = \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} |x_i|$$

* Una funzione f : $X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (X insieme convesso), è **convessa** se

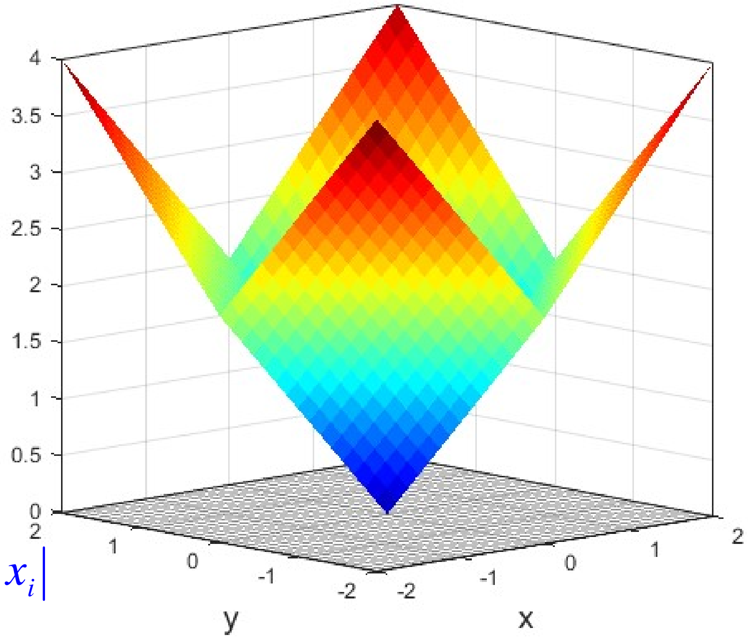
$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0, 1]\quad f[\lambda x + (1-\lambda)y] \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f **strettam. convessa**: $<$ per $x \ne y$ e $\lambda \in]0, 1[$

$f(x) = x\log(x)$



Geometricamente, la corda tra (x,f(x)) e (y,f(y)) giace al di sopra del grafico di f tra i due punti.



norma 1

$$f(x_1, x_2) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i|$$

Norma matriciale indotta

Si definisce ***norma matriciale indotta*** dalla norma vettoriale

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \max_{x \neq \underline{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

norma matriciale

norma vettoriale

equivale a: $\|A\| \overset{\text{def}}{=} \max_{\|v\|=1} \|A\,v\|$

dove A è una qualsiasi matrice rettangolare $(m \times n)$.

Si dimostra che per una norma matriciale indotta, oltre alle proprietà di una norma vettoriale, valgono anche le seguenti:

5. $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$

6. $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Esempi di norme matriciali indotte

norma euclidea o **norma-2** $\|A\|_2 = \sqrt{\max|autovalore|\ di\ A^H A}$

massimo valore singolare di A

```
A=rand(3);
disp([norm(A) max(sqrt(eig(A'*A)))])
    1.4465    1.4465
```

norma uniforme o **norma-∞** $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

sum over cols
max over rows

```
disp([norm(A,inf) max(sum(abs(A),2))])
1.9389    1.9389
```

norma-1 o **norma Manhattan** $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

sum over rows
max over cols

```
disp([norm(A,1) max(sum(abs(A)))])
1.8795    1.8795
```

Una **norma vettoriale** misura la ***lunghezza*** di un vettore; una **norma matriciale** misura il ***potere amplificante*** della matrice.

Proprietà 5 $\Rightarrow$ $\|Av\| \le \boxed{\|A\|} \cdot \|v\|, \quad v \ne \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\|Av\|}{\|v\|} \le \|A\|$ fattore di scala

Esempio

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|x\|_2 \cong 2.24, \quad x_A = Ax \quad x_B = Bx \quad x_C = Cx$$

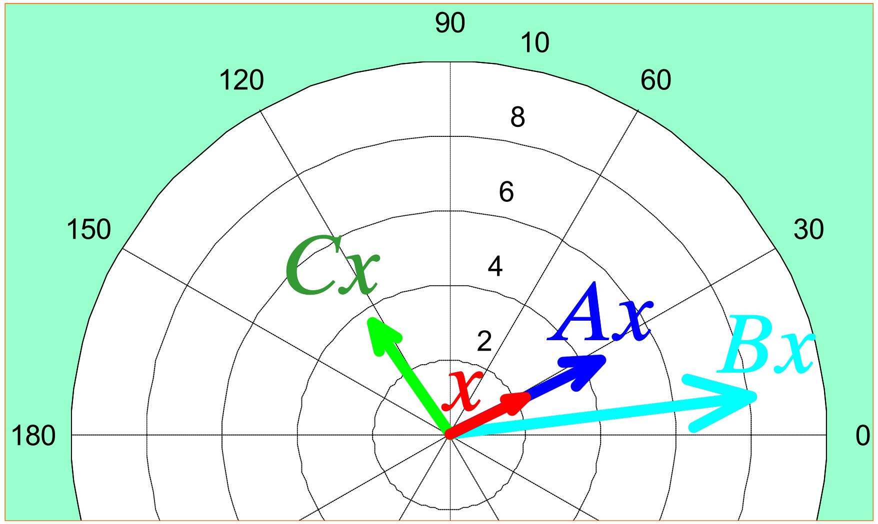
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_2 = 2, \quad \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\|_2 = 4, \quad \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \cong 3.6$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|C\|_2 \cong 2.8, \quad \frac{\|Cx\|_2}{\|x\|_2} \cong 1.6$$

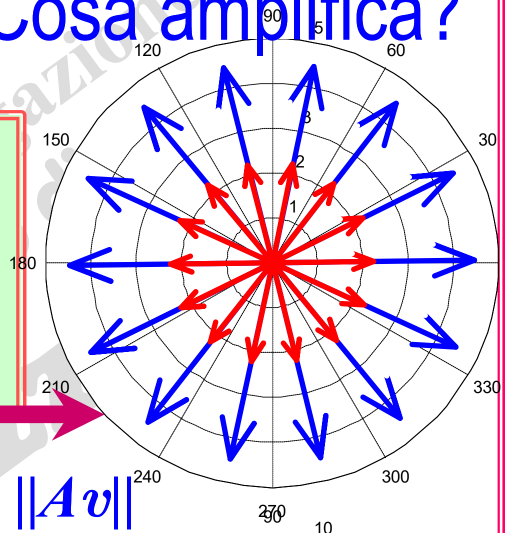
La matrice con norma maggiore ha allungato di più il vettore

```
A=2*eye(2); B=diag([4 1]); C=[-2 2;1 1];
x=[2 1]'; xA=A*x; xB=B*x; xC=C*x;
compass(xB(1),xB(2),'c'); hold on
compass(xA(1),xA(2),'b')
compass(xC(1),xC(2),'g')
compass(x(1),x(2),'r')
disp(norm(x))
    2.2361
disp([norm(A)  norm(B)  norm(C); ...
      norm(xA) norm(xB) norm(xC)])
        2.0000    4.0000    2.8284
        4.4721    8.0623    3.6056
```

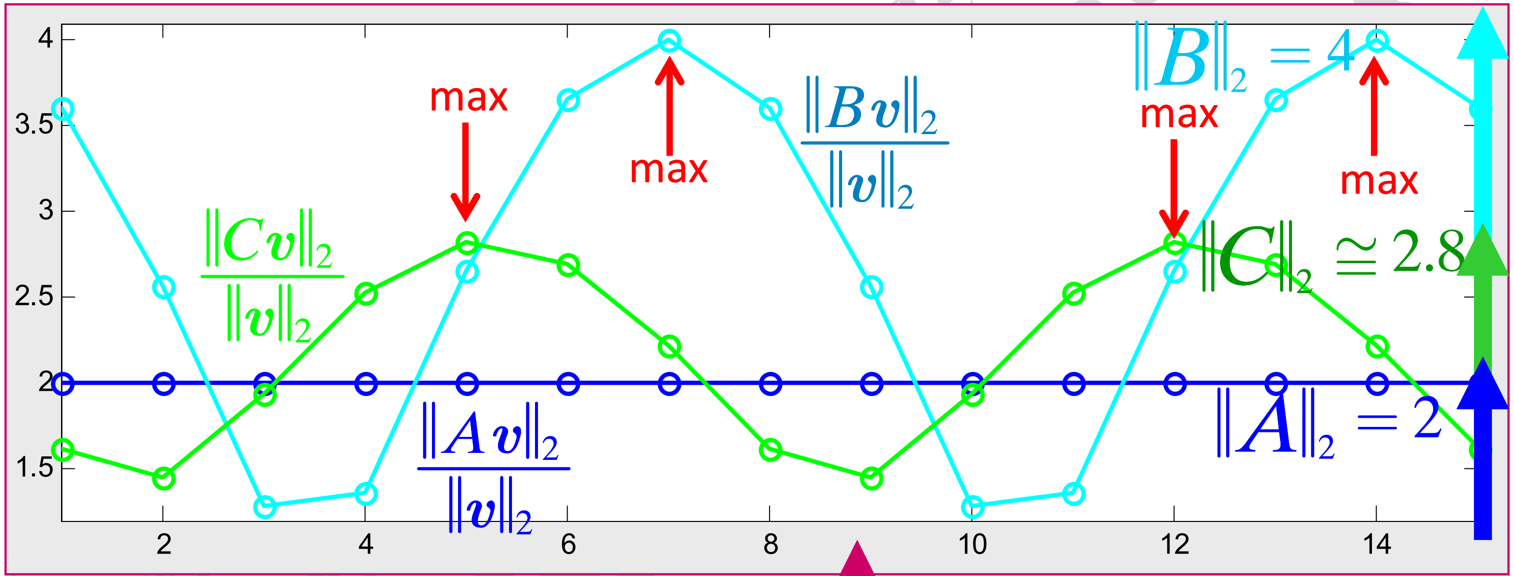


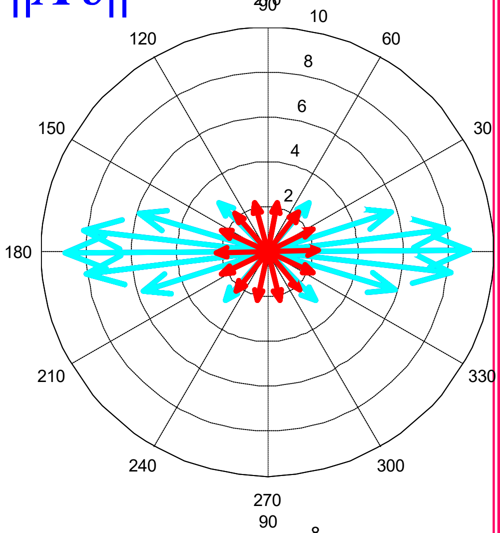
Che significa ***potere amplificante*** della matrice? Cosa amplifica?

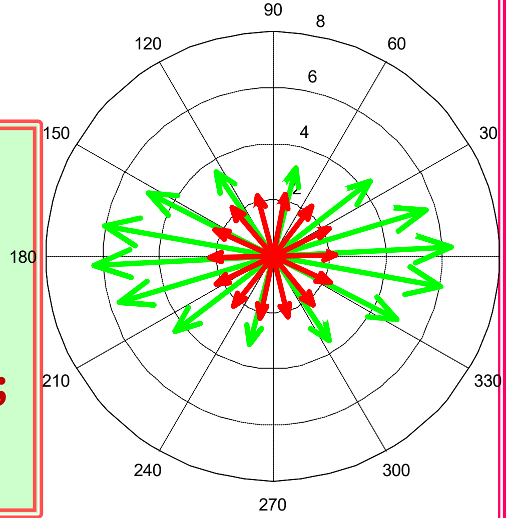
```
   ...
N=15;  t=linspace(-pi,pi,N);  z=(2+i)*exp(i*t);
v=[real(z);imag(z)]; vA=A*v; vB=B*v; vC=C*v;
figure; compass(vA(1,:),vA(2,:),'b'); hold on; compass(z,'r')
figure; compass(vB(1,:),vB(2,:),'c'); hold on; compass(z,'r')
figure; compass(vC(1,:),vC(2,:),'g'); hold on; compass(z,'r')
```



la norma matriciale $\|A\|$ dà l'allungamento massimo di $\|v\|$ in $\|Av\|$







```
   ...
nv=vecnorm(v);
nvA=vecnorm(vA);
nvB=vecnorm(vB);
nvC=vecnorm(vC);
figure; h=plot((1:N),[(nvA./nv)' (nvB./nv)' (nvC./nv)'],'o-');
set(h(1),'Color','b');set(h(2),'Color','c');set(h(3),'Color','g')
axis tight
```

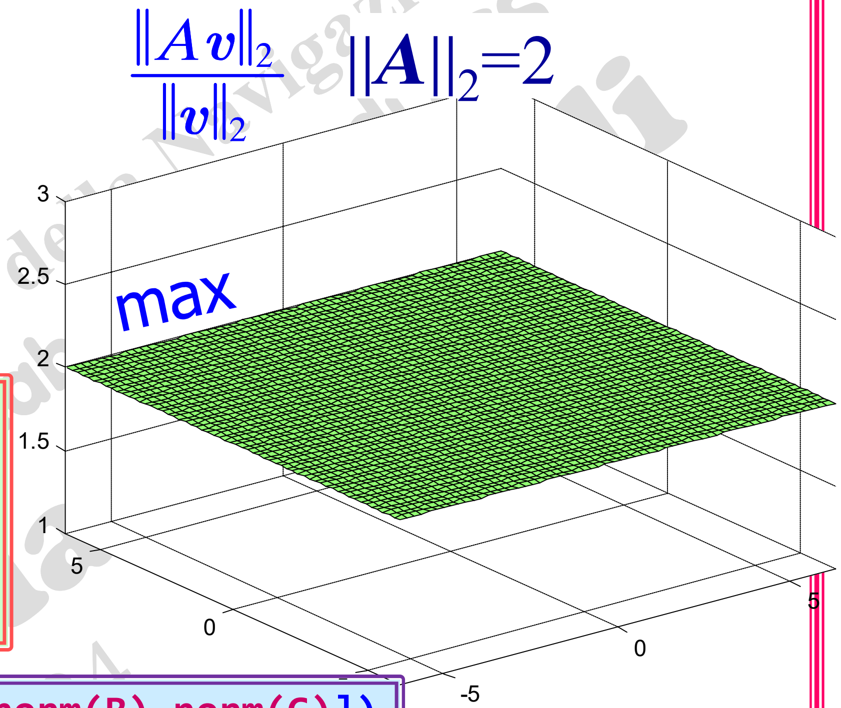
calcola la $\| \|_2$ di ogni colonna della matrice

Lab: stimare $\|A\|$ mediante Symbolic Math Toolbox

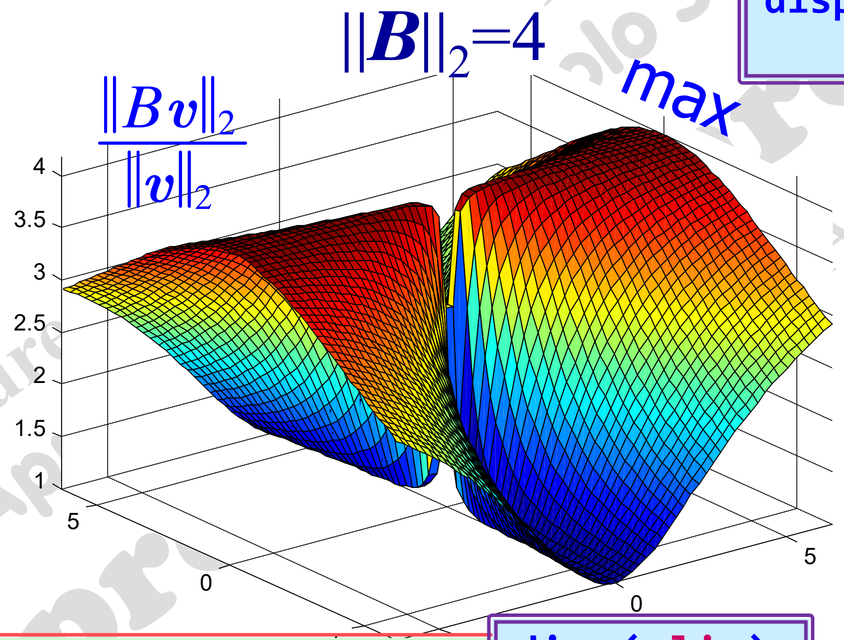
$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \max_{v \neq \underline{0}} \frac{\|A\,v\|}{\|v\|}$$

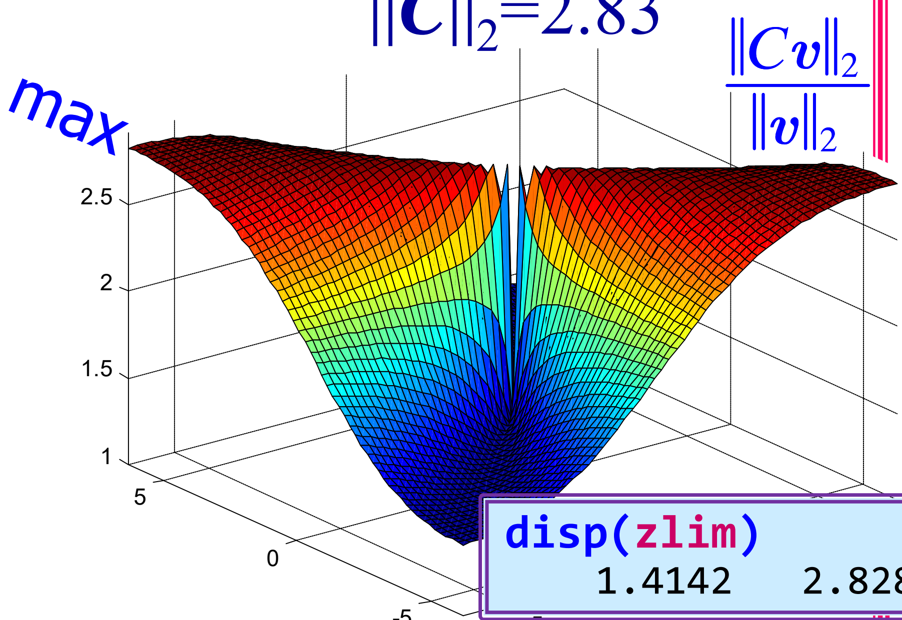
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A=2*eye(2); B=[4 0;0 1]; C=[-2 2;1 1];
syms x y real;  v=[x y]';
Anorm=simplify(norm(A*v)/norm(v)); ezsurf(Anorm)
Bnorm=simplify(norm(B*v)/norm(v)); ezsurf(Bnorm)
Cnorm=simplify(norm(C*v)/norm(v)); ezsurf(Cnorm)
```




```
disp([norm(A) norm(B) norm(C)])
          2          4     2.8284
```






```
AX=axis; disp(AX(5:6))
      1.0022      3.9995
```

```
disp(zlim)
```

appross. $\|B\|_2$

```
disp(zlim)
    1.4142    2.8284
```

$$\|B\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v\neq\underline{0}} \frac{\|B\,v\|}{\|v\|}$$

Lab (cont.)

```
syms x y real; v=[x y]'; B=diag([4 1]);
Bnorm=simplify(norm(B*v)/norm(v));
ezsurf(Bnorm); colormap('jet')
G=simplify(gradient(Bnorm));
S=solve(G(1)==0, G(2)==0, ...
      'ReturnConditions',true) % cerca i punti stazionari
S = struct with fields:
    x: [2×1 sym]
    y: [2×1 sym]
parameters: u
conditions: [2×1 sym]
S.parameters
ans = u
S.conditions
ans = in(u, 'real')
      in(u, 'real')
S.x
ans = u
      0
S.y
ans = 0
      u
V1=simplify(subs(Bnorm,{x,y},{S.x(1),S.y(1)}))
V1 = 4     max
V2=simplify(subs(Bnorm,{x,y},{S.x(2),S.y(2)}))
V2 = 1     min
```

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gradiente di φ: $\nabla\varphi(x_1^*,x_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*) \end{pmatrix}$

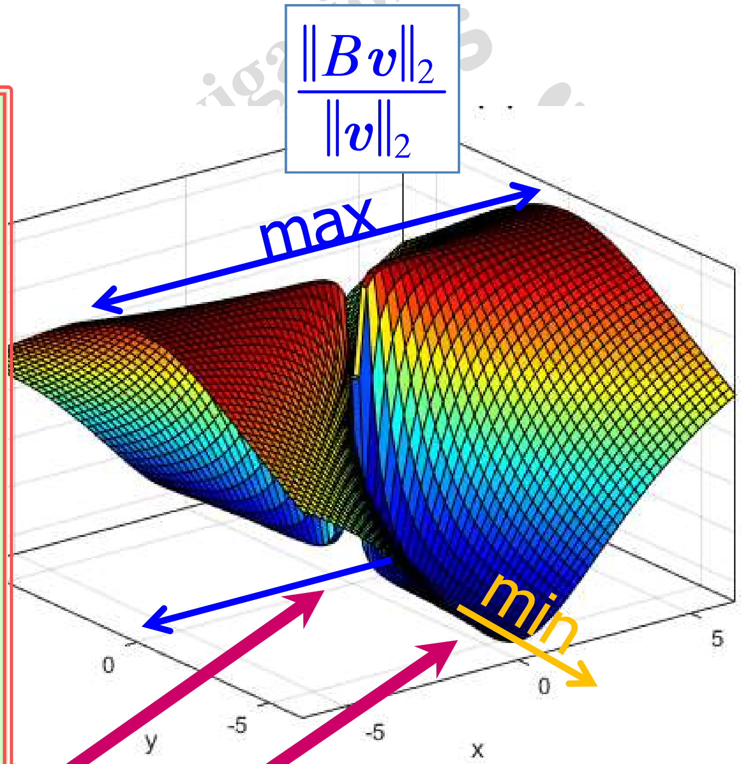
punti stazionari (x_1,x_2): $\nabla\varphi(x_1,x_2)=\underline{0}$

$[\texttt{S.x(1);S.y(1)}] = u\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ x-axis

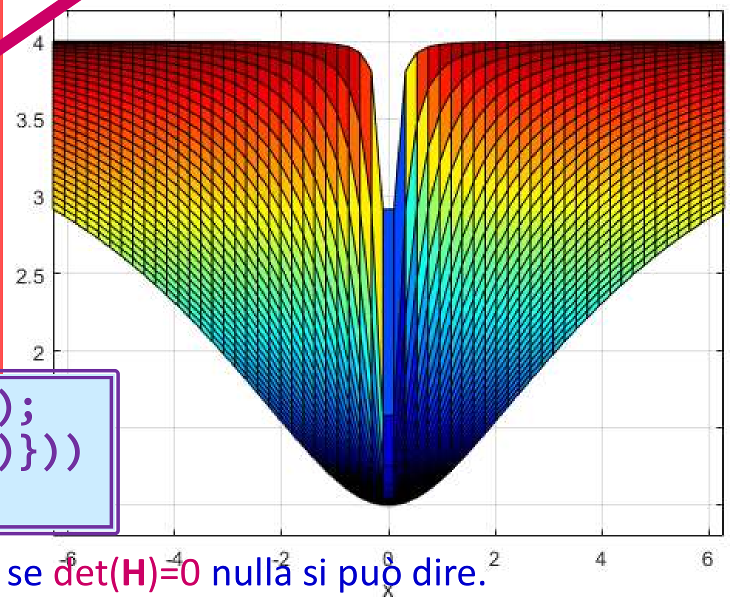
$[\texttt{S.x(2);S.y(2)}] = u\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y-axis

⇒ ||B|| = 4

```
H=hessian(Bnorm,[x,y]); detH=det(H);
disp(subs(detH,{x,y},{S.x(1),S.y(1)}))
0
```

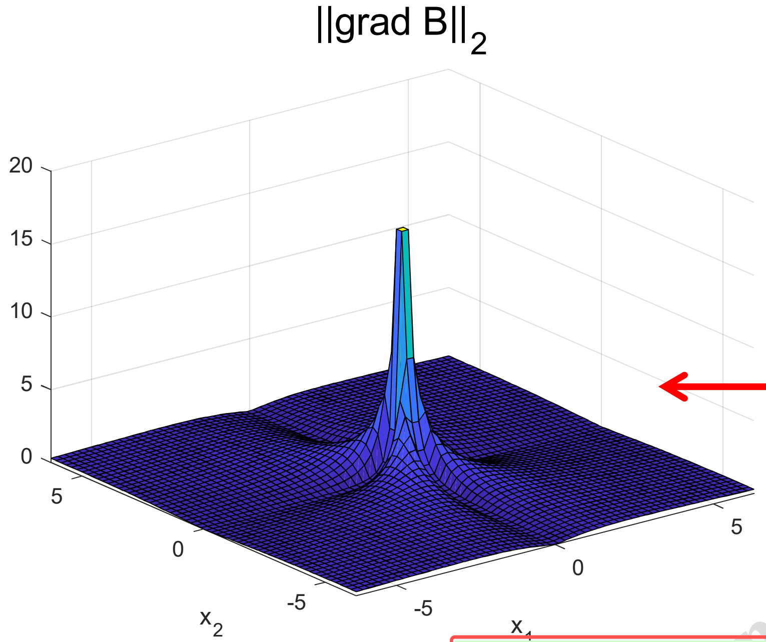


Go to X-Z view:
la superficie è tutta tra 1 e 4

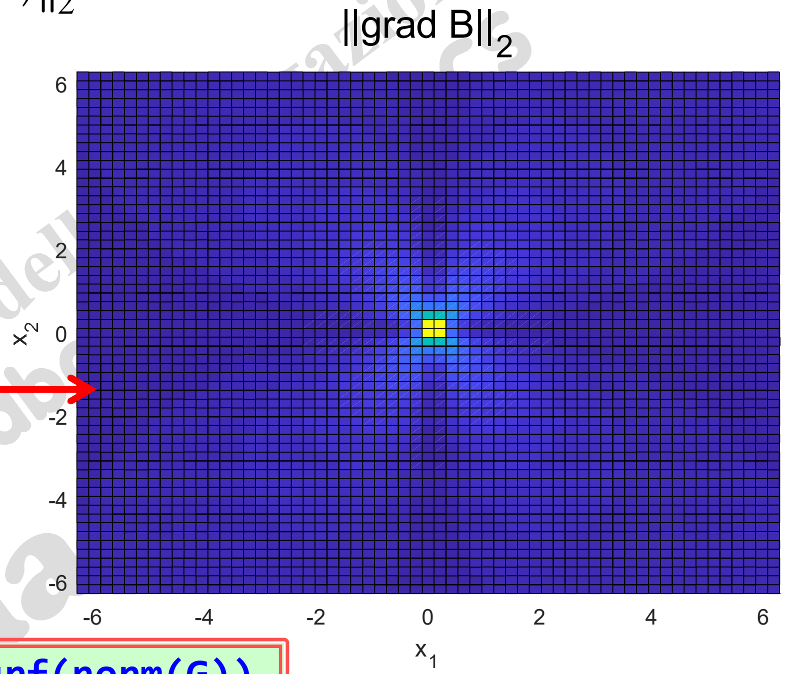


$(\mathbf{H}_f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ La matrice Hessiana **H** può individuare gli estremi locali. Ma se det(**H**)=0 nulla si può dire.

visualizzare dove risulta $\left\|\nabla\varphi\left(x_1^*,x_2^*\right)\right\|_2=0$ vista dall'alto



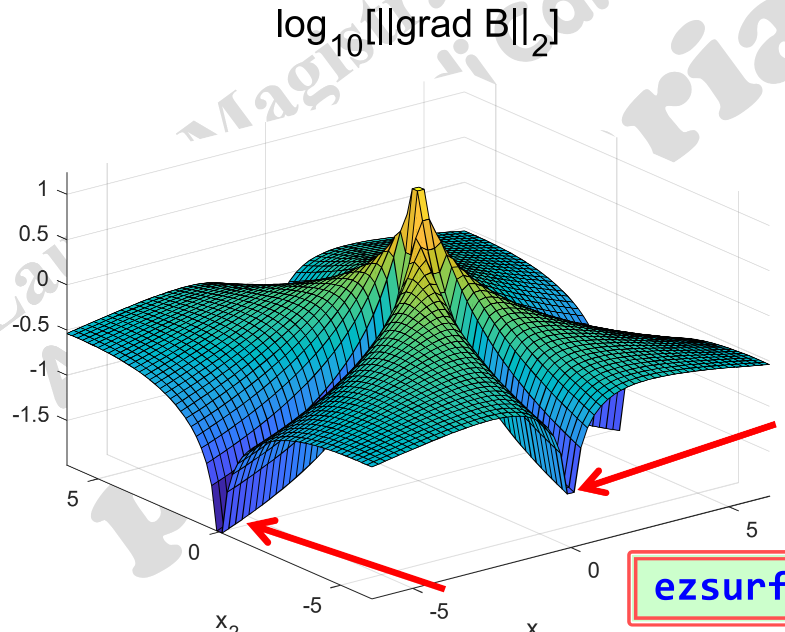
poco chiaro!



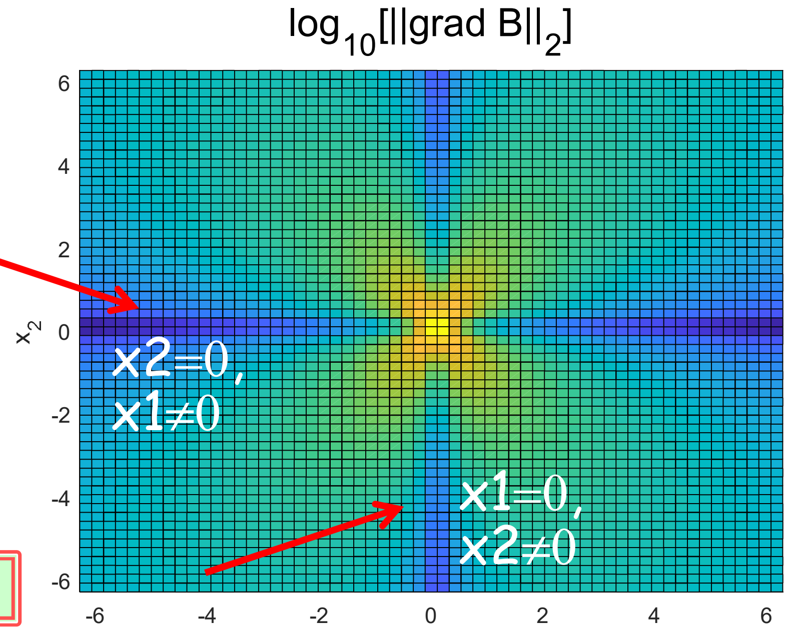

```
G=simplify(gradient(Bnorm)); ezsurf(norm(G))
```

Se la superficie è non negativa, si preferisce tracciare il suo **log$_{10}$**

$$\left\|\nabla\varphi\left(x_1^*,x_2^*\right)\right\|_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{10}\left\|\nabla\varphi\left(x_1^*,x_2^*\right)\right\|_2=-\infty$$



più chiaro!




```
ezsurf(log10(norm(G)))
```

Lab (cont.)

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
C=[-2 2;1 1]; syms x y real;  v=[x y]';
Cnorm=simplify(norm(C*v)/norm(v));
ezsurf(Cnorm); colormap('jet')
G=simplify(gradient(Cnorm));
S=solve(G(1)==0, G(2)==0, ...
      'ReturnConditions',true) % cerca p. stazionari
S = struct with fields:
    x: [2×1 sym]
    y: [2×1 sym]
parameters: u
conditions: [2×1 sym]
S.parameters
ans = u
S.conditions
ans = in(u, 'real')
      in(u, 'real')
S.x
ans = -u
       u
S.y
ans = u
      u
```

```
S=solve(G, ...
  'ReturnConditions',true)
```

punti stazionari:

$$[\mathtt{S.x(1);S.y(1)}] = u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

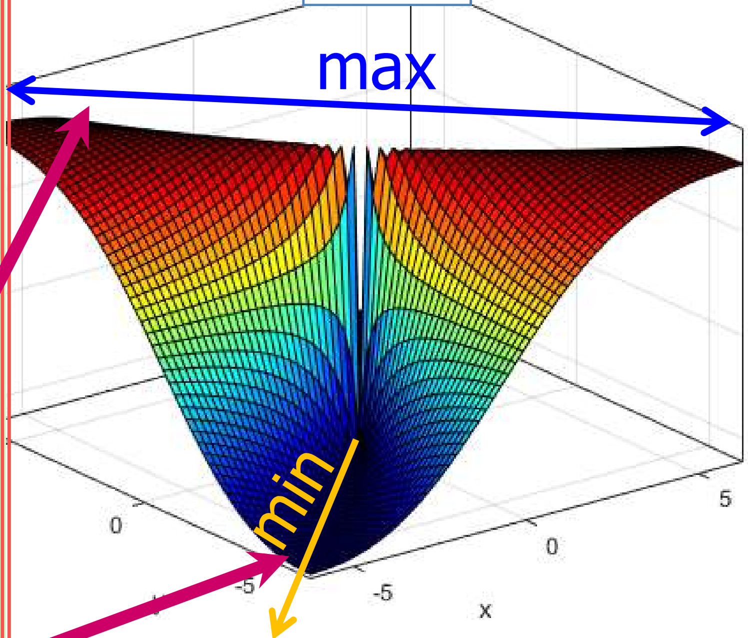
$$[\mathtt{S.x(2);S.y(2)}] = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

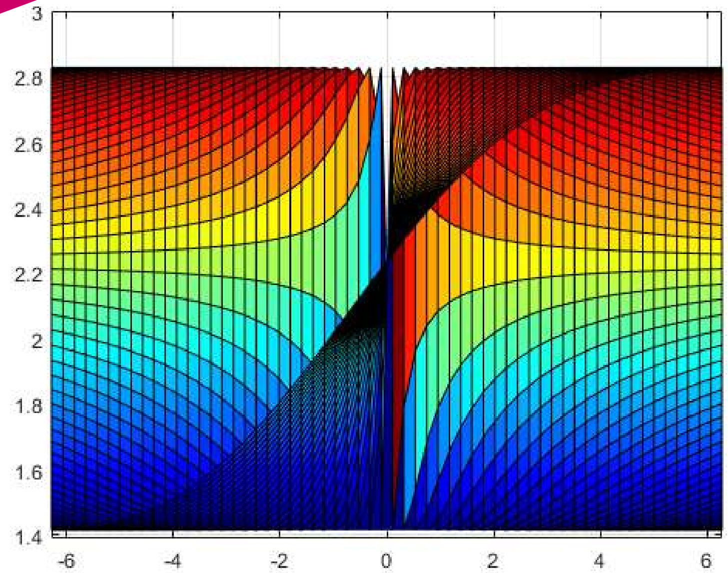
```
detH=det(hessian(Cnorm,[x,y]));
disp(subs(detH,{x,y},{S.x(1),S.y(1)}))
0      niente si può dire su questo punto
```

```
V1=simplify(subs(Cnorm,{x,y},{S.x(1),S.y(1)}))
V1 = 2*2^(1/2) ≈2.8284   max
V2=simplify(subs(Cnorm,{x,y},{S.x(2),S.y(2)}))
V2 = 2^(1/2) ≈1.4142     min
```

⇒ ||C|| = 2*sqrt(2)

$$\frac{\|Cv\|_2}{\|v\|_2}$$



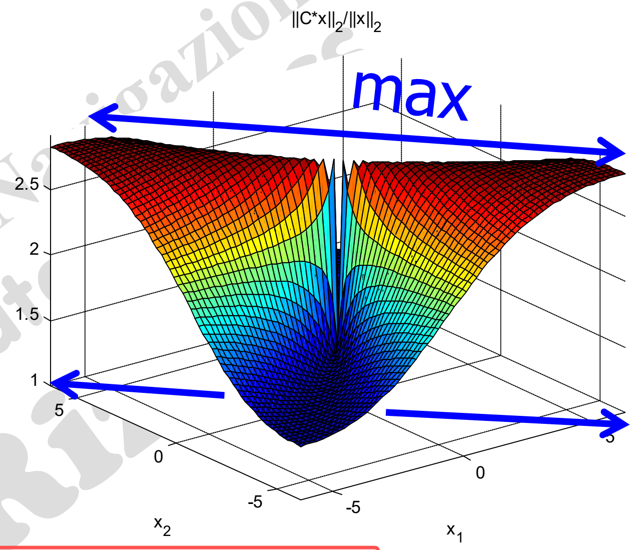


Go to X-Z view:
la superficie è tutta tra 1.4.. e 2.8..

$||C||_2$

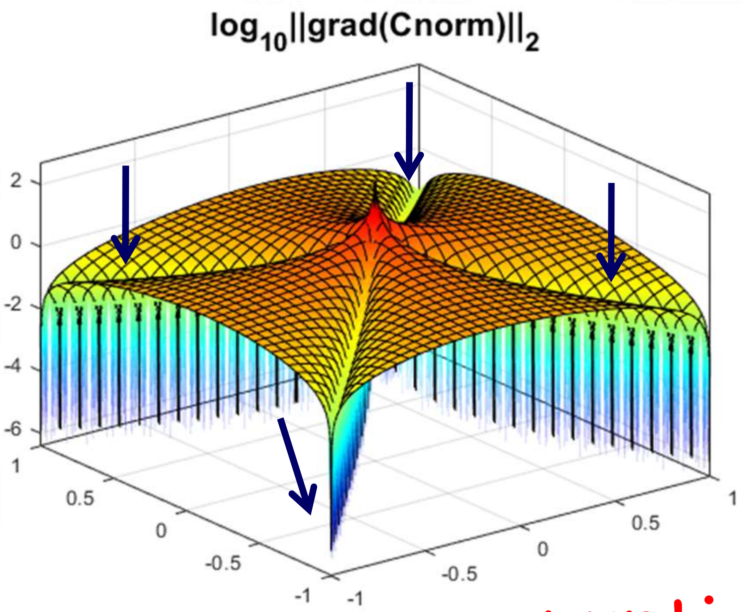
```
C=[-2 2;1 1]; syms x y real; v=[x y]';
Cnorm=simplify(norm(C*v)/norm(v));
ezsurf(Cnorm); colormap('jet')
```

$$\frac{\|Cx\|_2}{\|x\|_2}$$

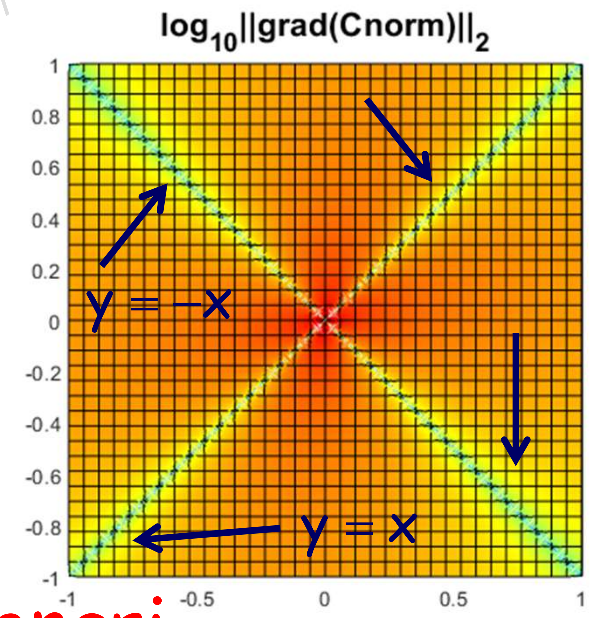


Visualizzare dove risulta $\left\|\nabla\varphi\left(x_1^*,x_2^*\right)\right\|_2 = 0$

```
G=simplify(gradient(Cnorm)); % gradiente
Gnorm=simplify(norm(G))        % norma-2 del gradiente
fsurf(log10(Gnorm),[-1 1]); box on; view(2); axis equal
```



vista dall'alto



punti stazionari

stimato prima →

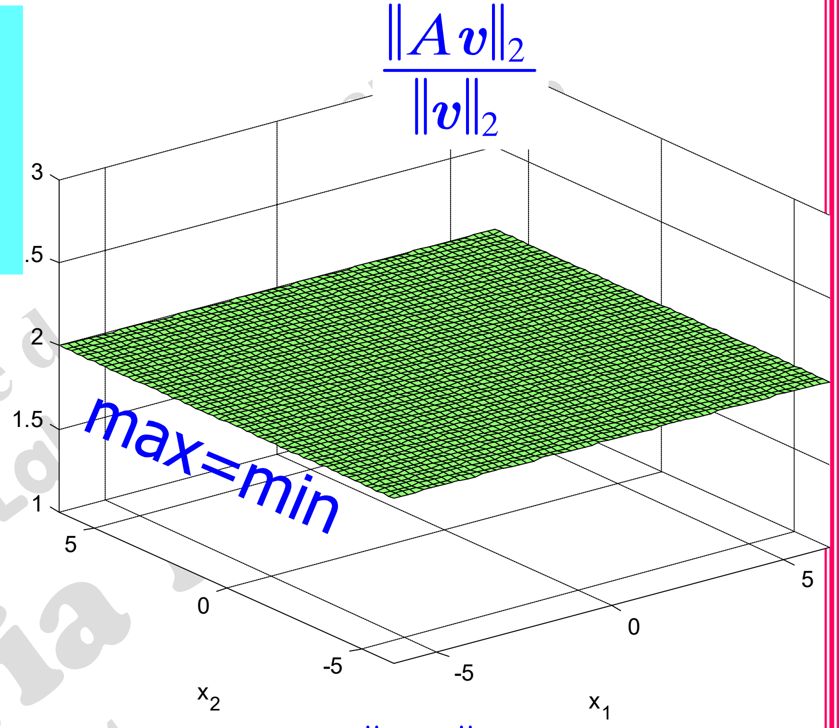
$$M = \max_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

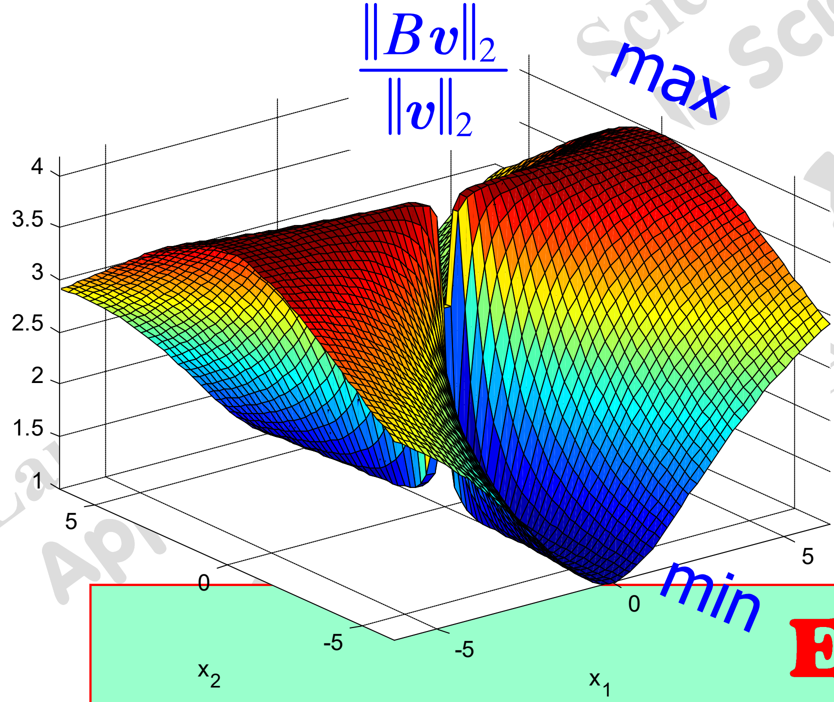
$$m = \min_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

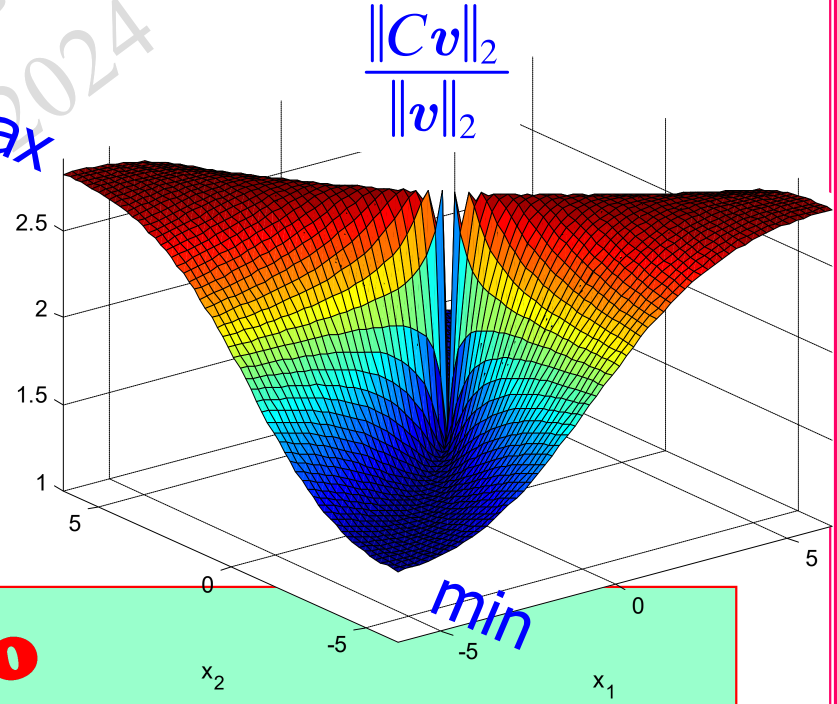
indice di condizionamento

$$\kappa(A) = \frac{M}{m}$$

```
disp([cond(A)  cond(B)  cond(C)])
 1.0000    4.0000    2.0000
```







Esercizio

stimare κ(A) mediante Symbolic Math Toolbox

Approfondimento sull'indice di condizionamento

https://blogs.mathworks.com/cleve/2017/07/17/what-is-the-condition-number-of-a-matrix/

Sia A una **matrice qualsiasi** (anche rettangolare)

La norma di matrice misura …

quanto una matrice può allungare i vettori: $\displaystyle M = \max_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$

ma può essere importante sapere anche …

quanto una matrice può accorciare i vettori: $\displaystyle m = \min_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$

$$\kappa(A) = \frac{M}{m}$$

Sia A una **matrice quadrata**

Per una matrice singolare avviene che: $\displaystyle m = \min_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = 0$

e l'indice di condizionamento è infinito.

Quiz
Perché?

Sia ora A una **matrice quadrata** e **non singolare**: $w = Av \Longleftrightarrow v = A^{-1}w$

$$m = \min_{v \neq \underline{0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \min \frac{\|w\|_2}{\|A^{-1}w\|_2} = \frac{1}{\max \frac{\|A^{-1}w\|}{\|w\|}} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

indice di condiziona-
mento per l'inversione

più generale

$$\kappa(A) = \frac{M}{m}$$

solo per matrici quadrate invertibili

$$\kappa(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$$

Vettori mutuamente ortogonali

u, v sono **ortogonali** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle u, v \rangle = 0$

$u \perp v$

Legame tra indipendenza ed ortogonalità

> n vettori non nulli sono **mutuamente ortogonali**
> $\Longrightarrow$ essi sono **linearmente indipendenti**

$\not\Longleftarrow$ il viceversa non è vero

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono **ortogonali**, e quindi **indipendenti**.

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono **indipendenti** ma **non ortogonali**.

Applicazione di norme e prodotti scalari: angoli in $\mathbb{R}^n$

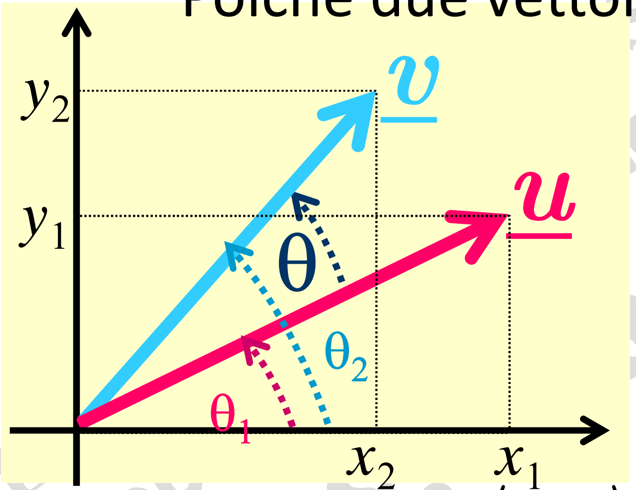
RICHIAMI

prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$

Un'altra definizione di prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$:

uguale a $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \times \|\boldsymbol{v}\| \times \cos\theta \Rightarrow \mathrm{c} = \cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

Poiché due vettori giacciono su un piano, la dimostrazione è in $\mathbb{R}^2$



Dalle proprietà dei triangoli rettangoli:

$$x_1 = \|\boldsymbol{u}\| \cos\theta_1, \quad y_1 = \|\boldsymbol{u}\| \sin\theta_1$$
$$x_2 = \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta_2, \quad y_2 = \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta_2$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| [\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2}_{\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta}]$$

Perché è sufficiente dimostrare la formula in $\mathbb{R}^2$?

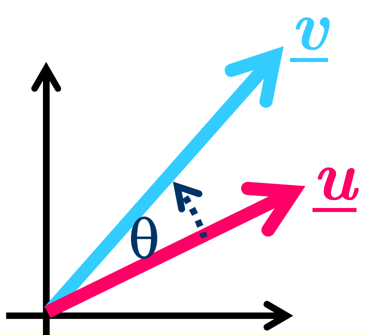
Angoli tra rette

X è uno spazio vettoriale normato

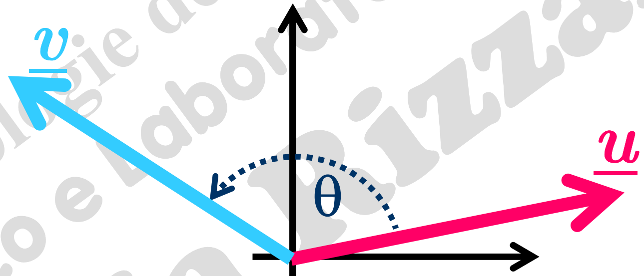
1) Angolo tra due vettori

$u, v \in X \qquad c = \cos(\theta) = \boxed{\dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}} \qquad \theta = \text{acos}(\square)$

angolo acuto



$\cos(\theta) > 0 \iff 0 \le \theta < \pi/2$



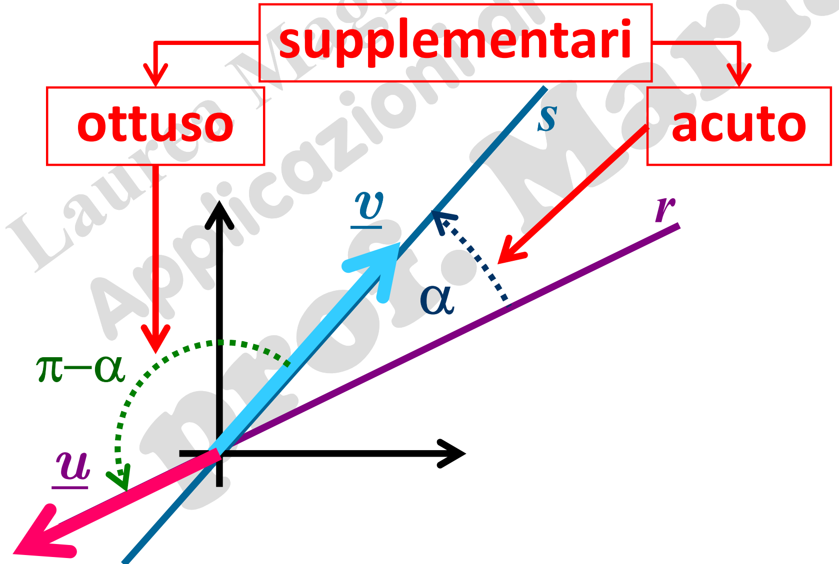
angolo ottuso

$\cos(\theta) < 0 \iff \pi/2 < \theta \le \pi$

la formula $\theta = \text{acos}(c)$ restituisce sempre $\theta \in [0, \pi]$

2) Angolo tra due rette

$r = \text{span}\{u\}, \quad s = \text{span}\{v\}$



$u, v \in X \qquad c = \cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \qquad \theta = \text{acos}(c)$

θ acuto $\iff$ theta = acos(abs(c))

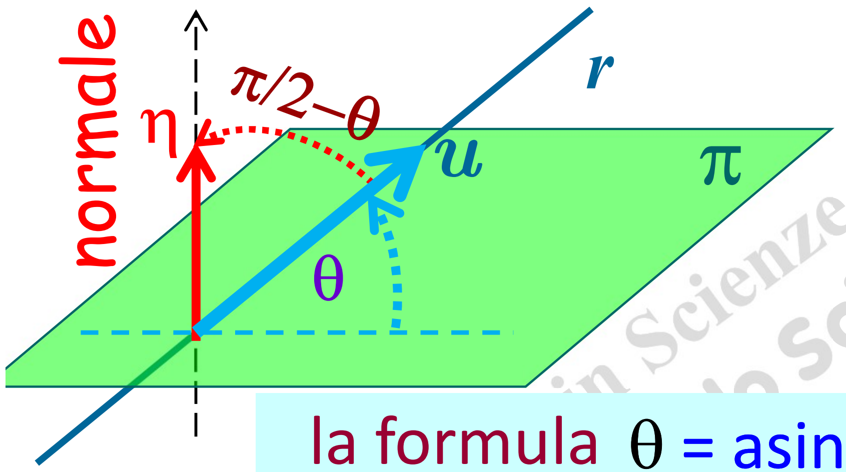
θ ottuso $\iff$ theta = acos(-abs(c))

Angoli tra sottospazi

X è uno spazio vettoriale normato

3) Angolo tra una retta r=span{u} e un piano π

come complementare dell'angolo tra il vettore e la normale al piano



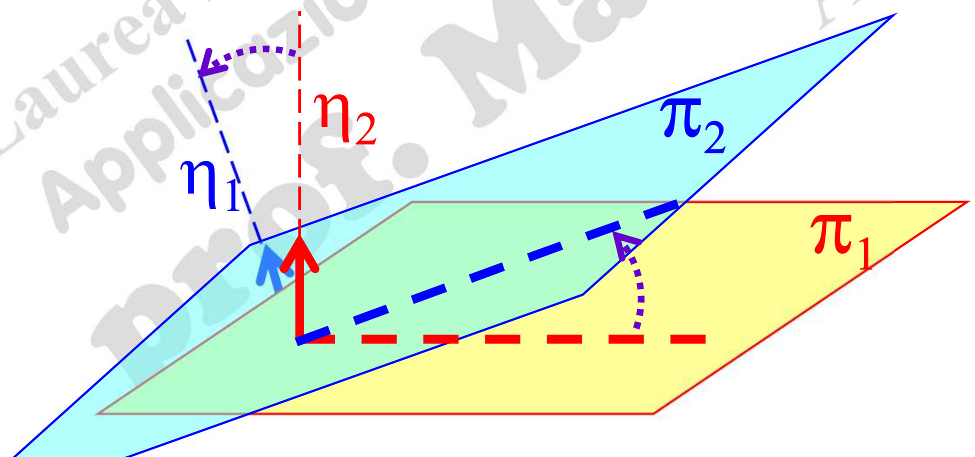
$$s = \sin\theta = \cos \widehat{u\eta} = \frac{\langle u, \eta\rangle}{\|u\|\cdot\|\eta\|} \qquad \theta = \mathrm{asin}(s)$$

θ **acuto:** $\theta>0$ ⇨ theta = asin(abs(s))

la formula θ = asin(s) restituisce sempre $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$

4) Angolo tra due piani

come angolo tra le normali ai piani



$$c = \cos \widehat{\pi_1\pi_2} = \cos \widehat{\eta_1\eta_2} = \frac{\langle \eta_1, \eta_2\rangle}{\|\eta_1\|\|\eta_2\|}$$

θ **acuto** ⇨ theta = acos(abs(c))

Esempio

Calcolare, in $\mathbb{R}^3$, l'angolo formato dalla retta $\boldsymbol{r}$ e dal piano π dove

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \pi = \mathbf{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \pi = \mathcal{R}(A), \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$$

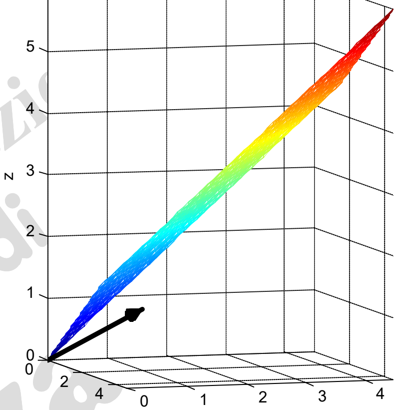
Come determinare i ***parametri direttori*** della retta η normale al piano π?

$$\pi \perp \eta \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix} = 0}$$

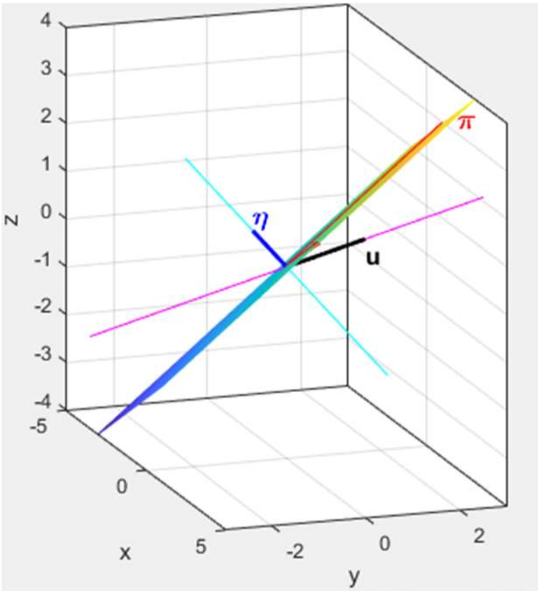
$$A^{\mathsf{T}}\eta = 0$$

$$\boxed{\pi = \mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{span}\{\eta\}}$$

$$r = \text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}}\right\}, \quad \pi = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Longleftrightarrow \pi = \mathscr{R}(A), \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$$



$$\boxed{\eta \in \mathscr{N}(A^{\mathsf{T}})}$$




```
A=sym([1 3 3;2 0 1]'); n=null(A')
n =
  -1/2
  -5/6
     1
[num,den]=numden(n); % estrae numeratore e denominatore
comden=lcm(den);     % mcm=lcm: least common multiple
eta=comden*n; disp(eta)
-3
-5
 6
```

$$\eta = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

equazione cartesiana

$$\boxed{\pi \;\equiv 3x + 5y - 6z = 0}$$

come condizione di ortogonalità

$$P \in \pi \quad P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \; : \; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix}$$

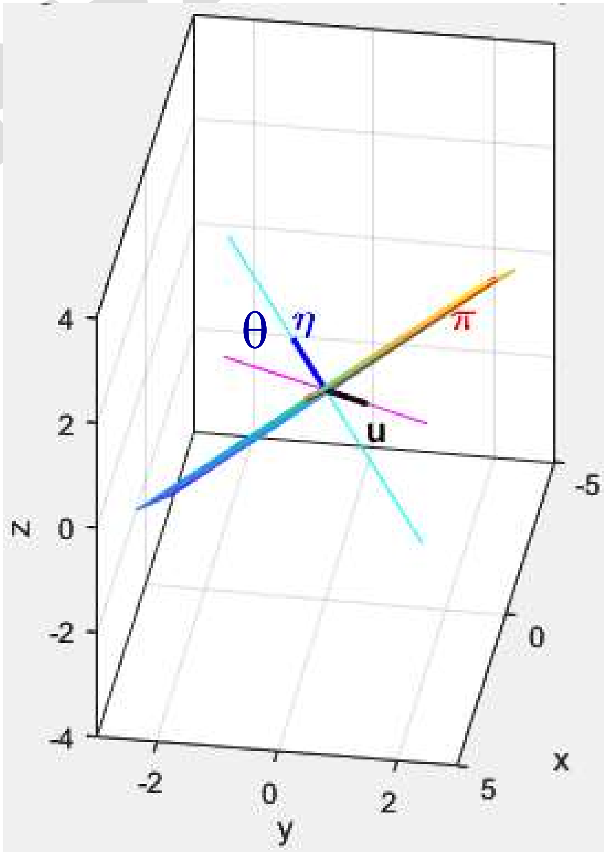
Interpretazione geometrica dell'equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{R}^3$: condizione di ortogonalità $\langle v,\eta\rangle = 0$ tra un qualsiasi vettore del piano $v=(x,y,z)^{\mathsf{T}}$ e la normale η al piano. I coefficienti dell'eq. sono le componenti di un vettore normale al piano.

(prof. M. Rizzardi)

$$r = \text{span}\left\{\underset{\boldsymbol{u}}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}\right\}, \quad \pi = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Longleftrightarrow \pi = \mathscr{R}(A), \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \cos\widehat{u\eta} = \frac{\langle u,\eta\rangle}{\|u\|\cdot\|\eta\|}$$

θ acuto θ>0 ⇒ `theta=asin(abs(s))`



L'angolo acuto tra r e π è dato da:

```
u=[2 1 1]'; A=[1 3 3;2 0 1]'; n=null(A');
SINtheta=dot(u,n)/(norm(u)*norm(n));
degrees=asin(abs(SINtheta))*180/pi
degrees =
       14.1213
```

```
degrees=rad2deg(asin(abs(SINtheta)))
```

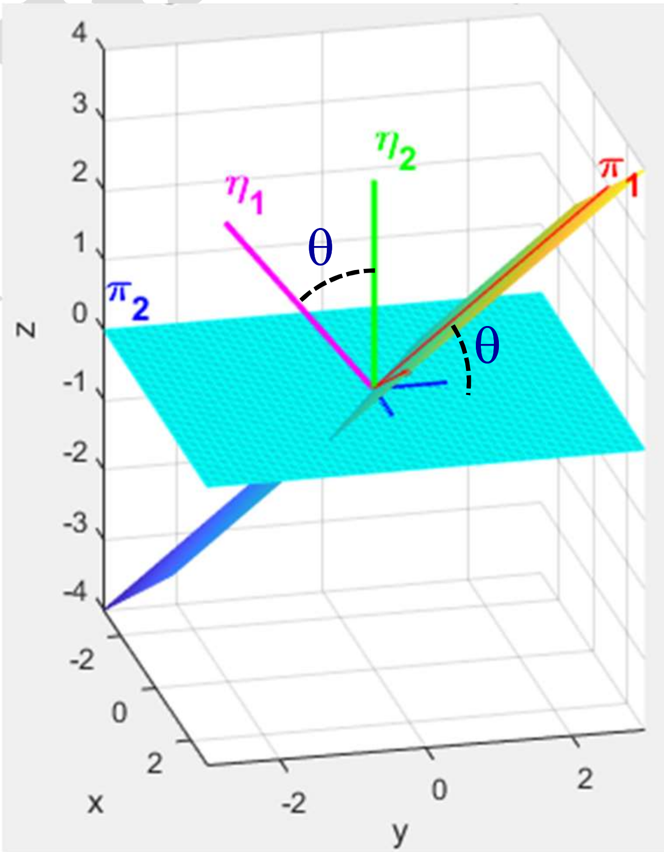
Esempio

Calcolare, in $\mathbb{R}^3$,
l'angolo formato dai due piani

$$\pi_1 = \text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{A}\right\},\quad \pi_2 = \text{span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{B}\right\}$$

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-6,6,25));
z1=(3*x+5*y)/6;     % il piano π1
z2=zeros(size(x)); % il piano π2
mesh(x,y,z2); hold on; surf(x,y,z1); axis equal
A=[1 3 3;2 0 1]'; B=[1 0 0;0 1 0]';
n1=null(A'); % base per la normale a ℛ(A)
n2=null(B'); % base per la normale a ℛ(B)
theta=acos(abs(dot(n1,n2)/(norm(n1)*norm(n2))));
degrees=theta*180/pi
degrees =
        44.1814
```

```
degrees=rad2deg(theta)
```



$\pi_1 \equiv 3x + 5y - 6z = 0$ $\pi_2 \equiv z = 0$

Interpretazione Geometrica: i coefficienti dell'eq. Cartesiana sono le componenti di un vettore normale al piano

$\eta_1 = (3,5,-6)^T$
$\eta_2 = (0,0,1)^T$ normals to planes

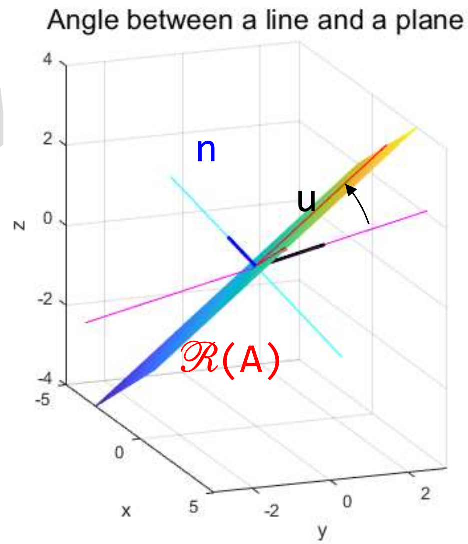
Lab: angolo tra sottospazi in MATLAB

In MATLAB la funzione **subspace(A,B)** restituisce l'angolo (in radianti) tra i due sottospazi $\mathscr{R}(A)$ e $\mathscr{R}(B)$.

1) Angolo tra r e π

$$r = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \pi = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

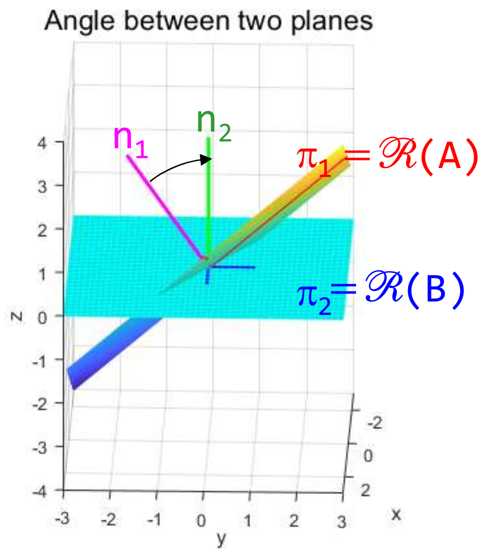
```
u=[2 1 1]';  A=[1 2;3 0;3 1];
n=null(A');
SINtheta=dot(u,n)/(norm(u)*norm(n));
degree=asin(abs(SINtheta))*180/pi
degree =
         14.121
theta=rad2deg( subspace(u,A) )
theta =
         14.121
```



2) Angolo tra π_1 e π_2

$$\pi_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \pi_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

```
A=[1 2;3 0;3 1];  B=[1 0;0 1;0 0];
nA=null(A');      nB=null(B');
COStheta=dot(nA,nB)/(norm(nA)*norm(nB));
degree=acos(abs(COStheta))*180/pi
degree =
         44.181
theta=rad2deg( subspace(A,B) )
theta =
         44.181
```



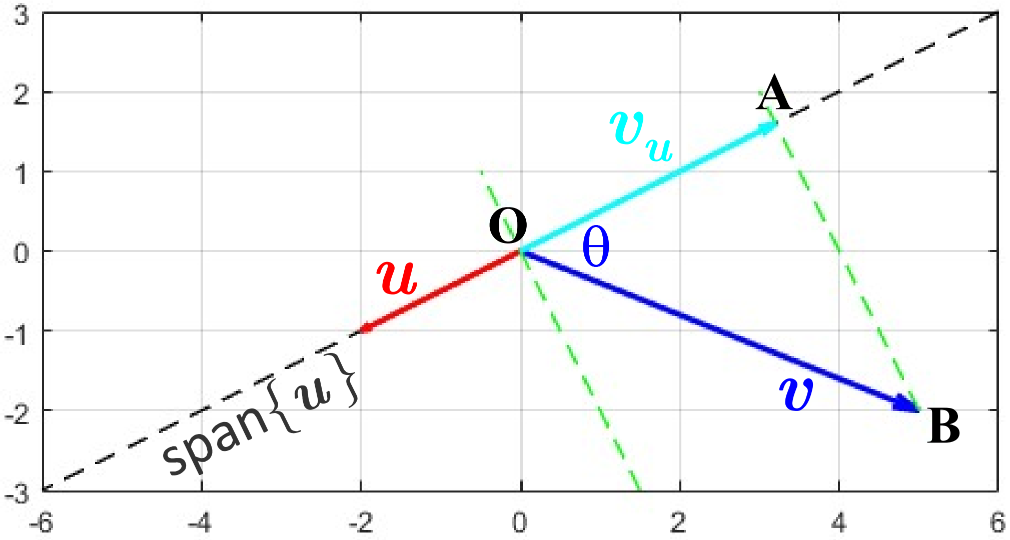
Lab: componente di un vettore lungo un altro vettore

Calcolare, in $\mathbb{R}^2$, la componente del vettore $\boldsymbol{v}$ lungo la retta individuata dal vettore $\boldsymbol{u}$, dove: $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

La componente di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$ è il vettore $\boldsymbol{v_u}$ ottenuto proiettando ortogonalmente **B** sulla retta $\boldsymbol{r}$=span{$\boldsymbol{u}$}.

Nel triangolo rettangolo **OAB**, il cateto **OA** è dato dall'ipotenusa **OB**=$\|\boldsymbol{v}\|$ per il coseno dell'angolo adiacente θ:

$$\mathbf{OA}=\|\boldsymbol{v_u}\|=\mathbf{OB}\cos(\theta)=\|\boldsymbol{v}\|\cos(\theta)$$



Dalla formula $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$ si ricava $\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta=\dfrac{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|}$ e si ottiene

$$\boldsymbol{v_u}=\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta\boxed{\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}}=\frac{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}=\boxed{\left\langle\boxed{\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}},\boldsymbol{v}\right\rangle\boxed{\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}}}=\boxed{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}}$$

```
u=[-2;-1]; v=[5;-2];
u1=u/norm(u); % versore
u=dot(u1,v)*u1;
```

versore della retta (o vettore unitario, cioè di norma 1)

```
u=[-2;-1];  v=[5;-2];
vu=dot(u,v)/norm(u)^2*u;
```

Lab: retta tangente ad una curva regulare in $\mathbb{R}^2$

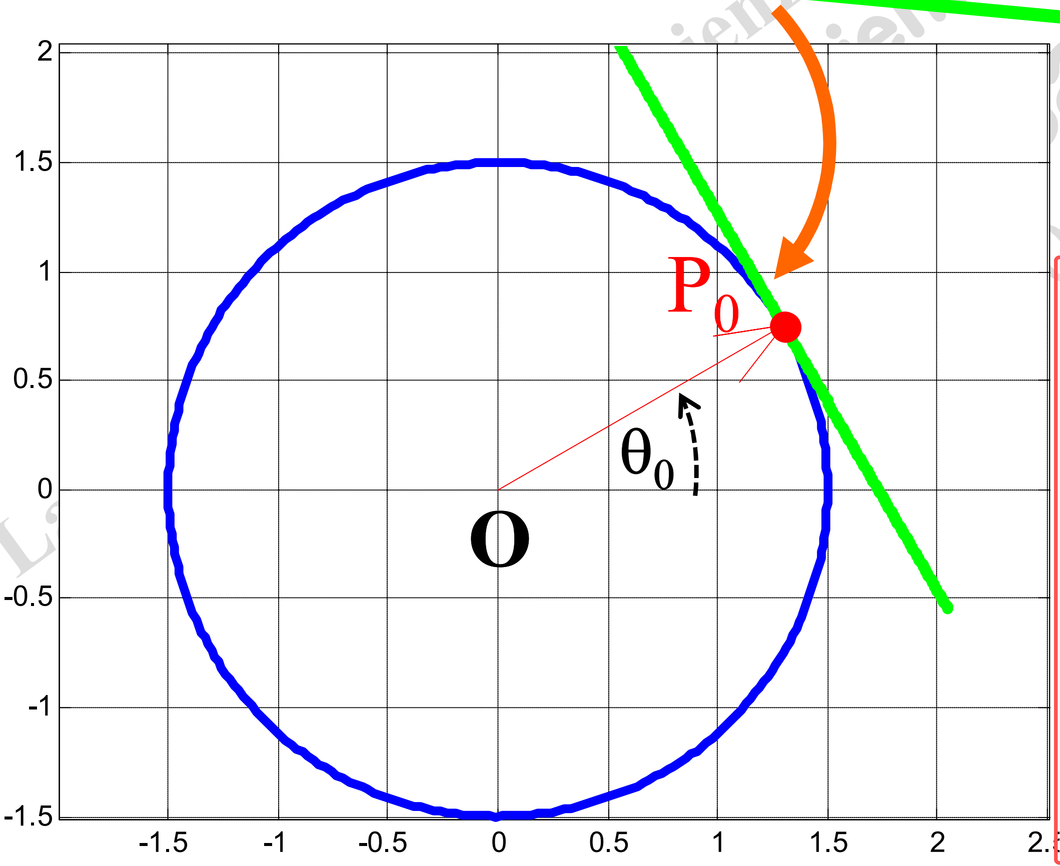
Eq. parametrica della circonferenza Γ nel piano di centro O e raggio ρ

$$\Gamma \begin{cases} x_1(\theta) = \rho\cos\theta \\ x_2(\theta) = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

curva regolare

τ: retta tangente a Γ nel punto $P_0(x_1(\theta_0), x_2(\theta_0))$

$$\tau \begin{cases} \tau_1 = x_1(\theta_0) + \lambda x_1'(\theta_0) \\ \tau_2 = x_2(\theta_0) + \lambda x_2'(\theta_0) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



mediante Symbolic Math Toolbox

```
syms q t real;  rho=1.5;
x1=rho*cos(t); x2=rho*sin(t);
x=[x1;x2]; % Gamma
ezplot(x1,x2); hold on
xp=diff(x); % derivata rispetto a t
t0=pi/6;
P0=subs(x,'t',t0);
xpP0=subs(xp,'t',t0);
T=P0 + q*xpP0; % tangente in P0
ezplot(T(1),T(2),[-1 1]); grid
```

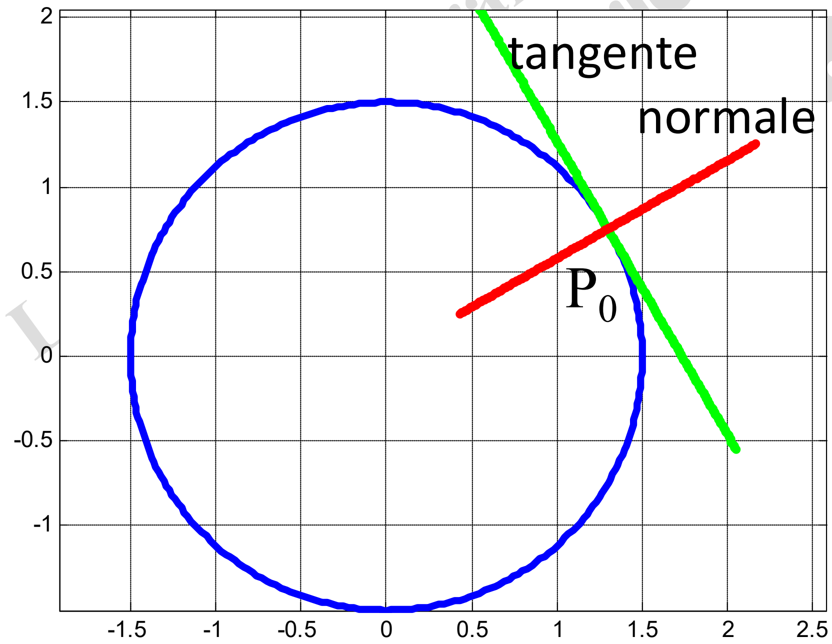
Lab: retta normale ad una curva regolare in $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma: \quad x = \begin{pmatrix} x_1(\theta) \\ x_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1(\theta) = \rho\cos\theta \\ x_2(\theta) = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il vettore direzione della tangente in P_0 è $\quad x'(\theta_0) = \begin{pmatrix} x_1'(\theta_0) \\ x_2'(\theta_0) \end{pmatrix}$

Il vettore normale in P_0 è tale che $\quad \langle \eta(\theta_0), x'(\theta_0) \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \quad [x'(\theta_0)]^T \eta(\theta_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\eta(\theta_0) \in \mathcal{N}\{[x'(\theta_0)]^T\}}$$



MATLAB Symbolic Math Toolbox

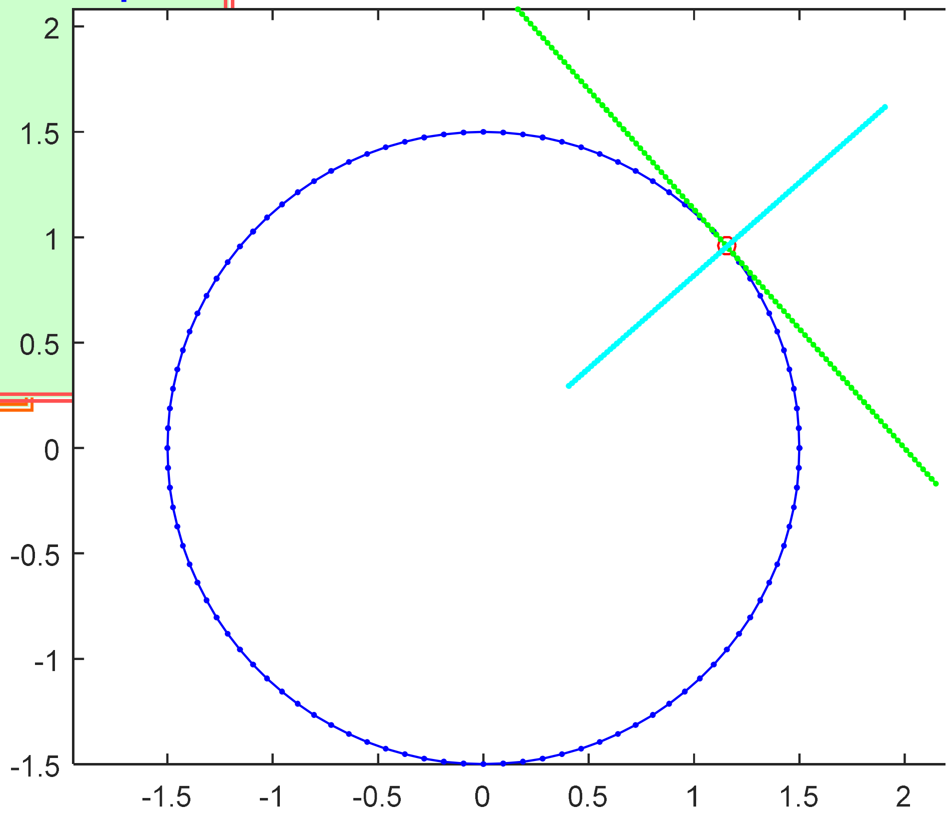
```
syms q t real ......
xp=diff(x); % derivata risp. a t
t0=pi/6;
P0=subs(x,'t',t0);
xpP0=subs(xp,'t',t0); % vettore direzione
N0 = null(xpP0.');
N=P0 + q*N0; % retta normale in P0
ezplot(N(1),N(2),[-1 1])
```

Esercizio: risolvere lo stesso problema numericamente

usare solo dei campioni per $\Gamma(0,\rho)$ $\Gamma: \quad P_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad k = 1,\ldots,n$

```
t=linspace(0,2*pi,101); rho=1.5;
x1=rho*cos(t); x2=rho*sin(t);
P=[x1;x2]; % punti campione
j=12; t0=t(j); P0=P(:,j); % punto particulare su Γ
plot(P(1,:),P(2,:),'.b-',P0(1),P0(2),'or'); axis equal
X1p=…; X2p=…; % approssimazione della derivata
q=linspace(-1,1);
T(1,:) = ... ; T(2,:) = ... ; % tangente
nj=null(...);
N(1,:) = ... ; N(2,:) = ... ; % normale
plot(T(1,:),T(2,:),'.g-',N(1,:),N(2,:),'.c-')
grid on
```

usare differenze finite



Che succede se P_0 non è un punto campione?

Lab: visualizzare il piano tangente ad una superficie

$$S: \quad z=f(x,y) \qquad \text{differenziabile in } P_0$$

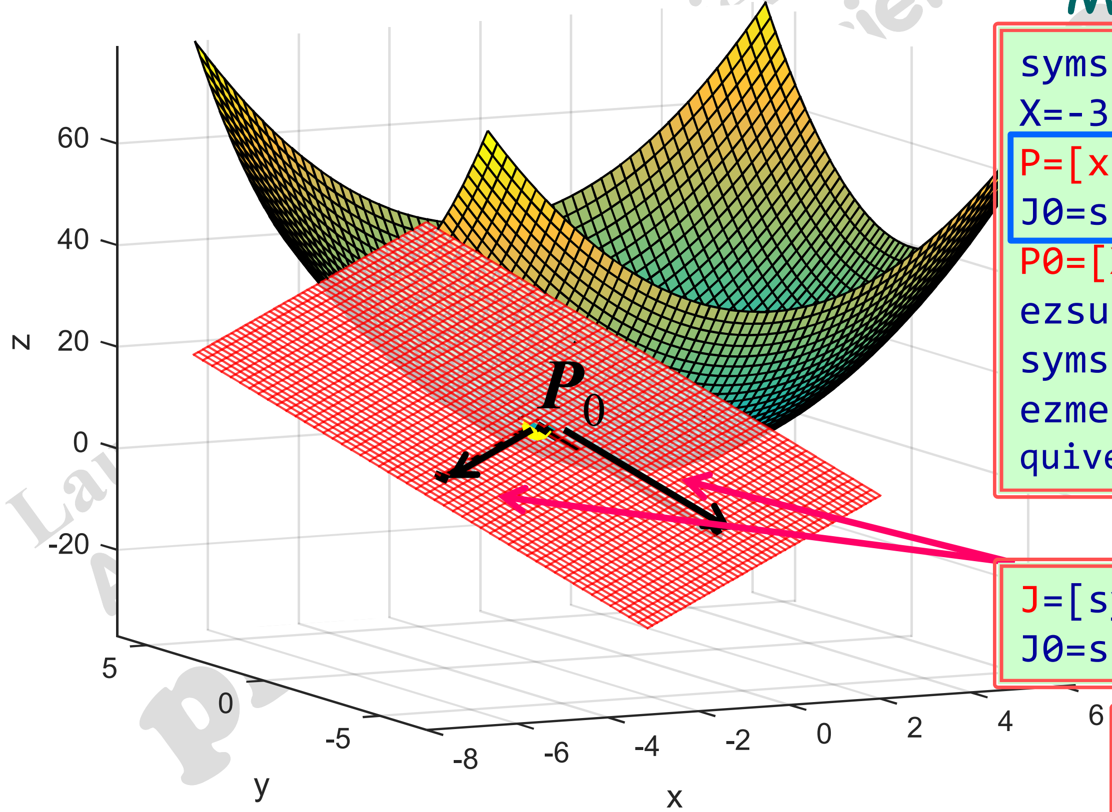
eq. parametriche

- superficie $\quad S: \quad P=P(x,y)=\begin{pmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \\ Z(x,y) \end{pmatrix}: \begin{cases} X=x \\ Y=y \\ Z=f(x,y) \end{cases}$

- piano tangente in $\boldsymbol{P}$ $\quad P=P(x,y)+\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\right]\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=P(x,y)+J\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

matrice Jacobiana

S: $f(x,y)=x^2+y^2$



MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms x y real;   f=x^2+y^2;
X=-3;  Y=-2;   Z=subs(f,{'x','y'},{X,Y});
P=[x;y;f];    J=jacobian(P);
J0=subs(J,{x,y},{X,Y}); v=double(J0);
P0=[X Y Z]'; % punto P0
ezsurf(f); hold on; plot3(P0(1),P0(2),P0(3))
syms a b real;  P=P0+J0*[a;b]; % piano tangente
ezmesh(P(1),P(2),P(3))
quiver3([X X],[Y Y],[Z Z],v(1,:),v(2,:),v(3,:),1)
```

J0: matrice jacobiana in P_0

```
J=[sym(eye(2));jacobian(f)];
J0=subs(J,{x,y},{X,Y}); v=double(J0);
```

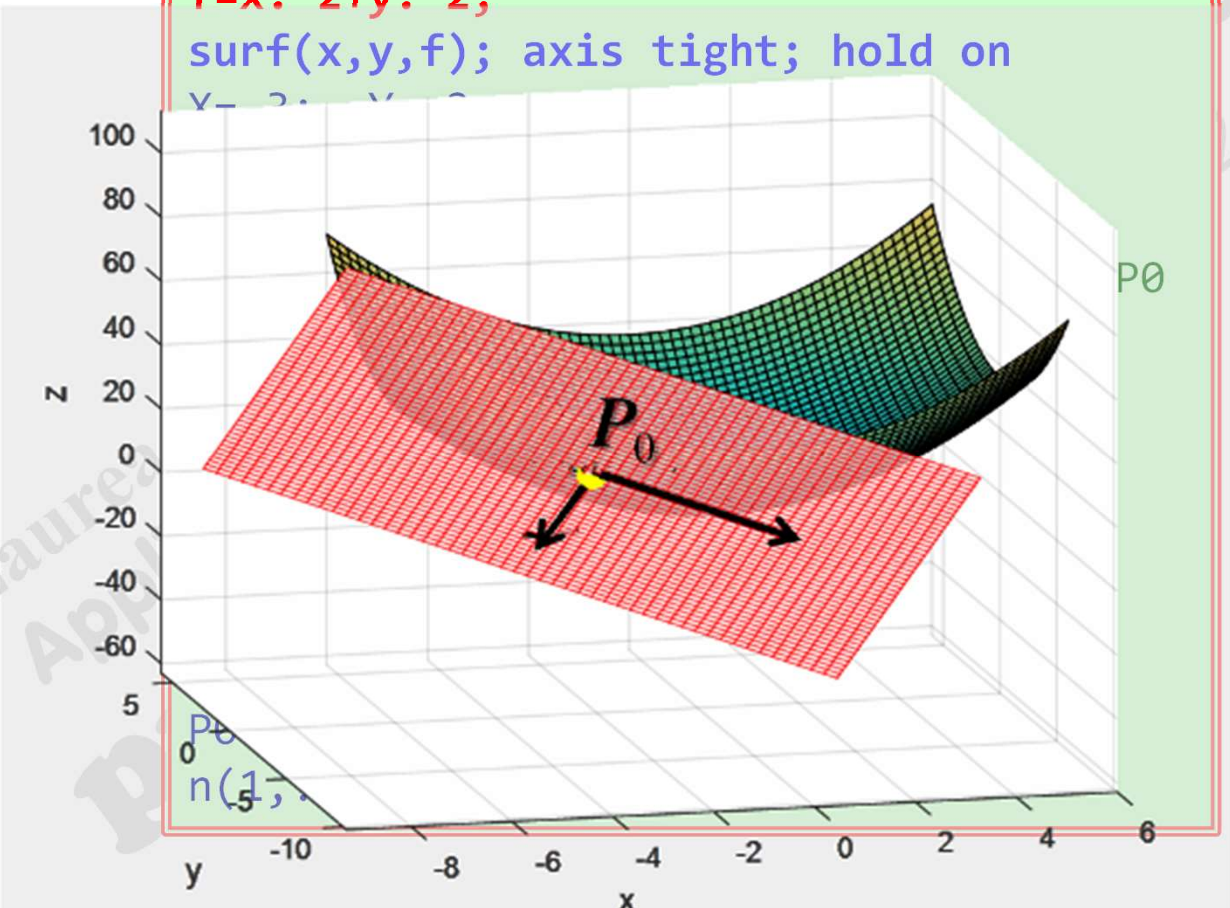
```
J=[sym(eye(2)); gradient(f).'];
J0=subs(J,{x,y},{X,Y}); v=double(J0);
```

Esercizio: risolvere lo stesso problema $\boxed{\text{numericamente}}$

$z_{h,k} = f(x_h, y_k)$ $\boxed{\text{solo campioni}}$ per $z = f(x,y)$ (differenziabile in P_0)

Usare la funzione (num) MATLAB **gradient()** al posto di **jacobian()**

```
w=0.2;  [x,y]=meshgrid(-6:w:6);
f=x.^2+y.^2;
surf(x,y,f); axis tight; hold on
```



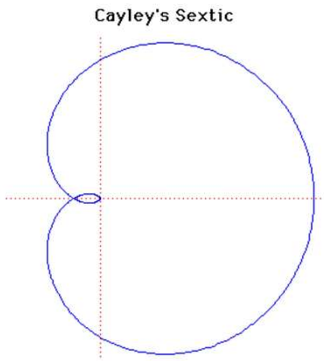

```
[fx,fy]=gradient(f,w);
```

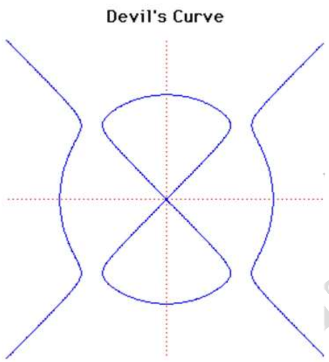
approssima il gradiente di f() nei punti di griglia

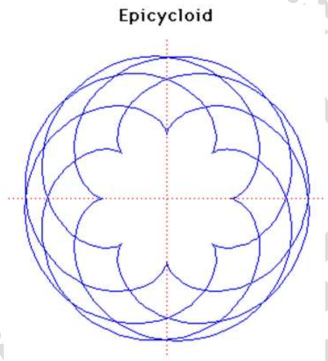
link utili per eq. parametriche

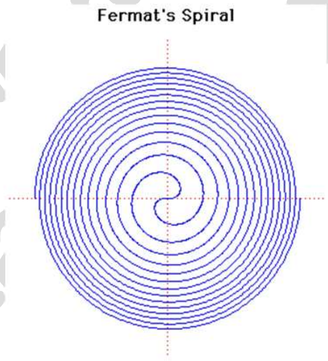
Famous Curves Index

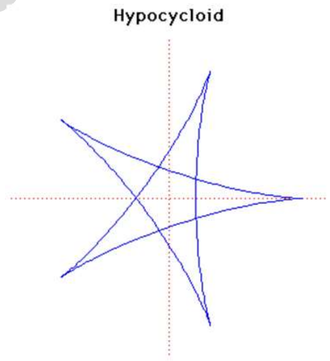
http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html





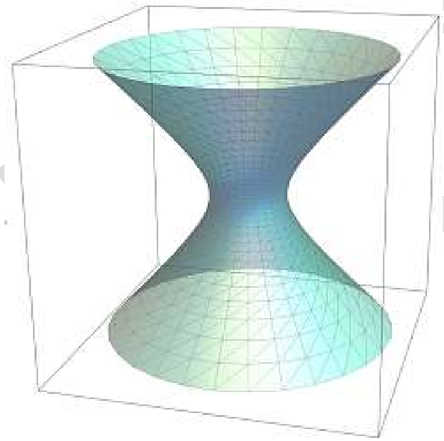




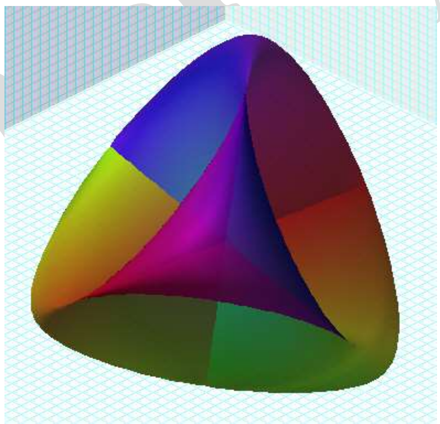


Gallery of Surfaces

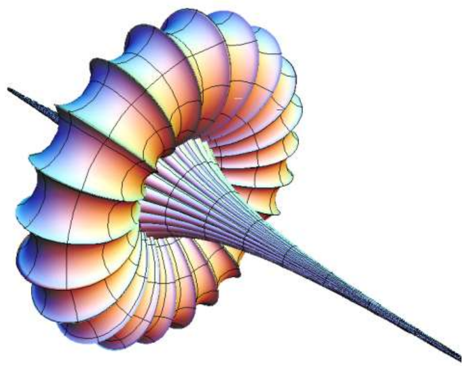
http://xahlee.info/surface/gallery.html



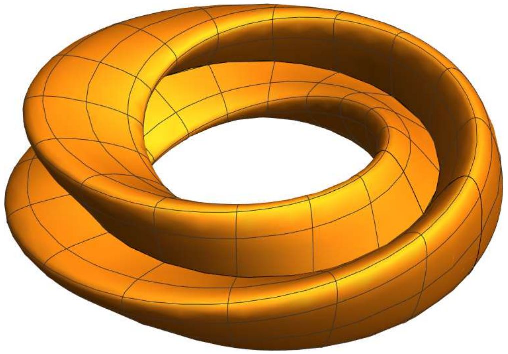
Hyperboloid of One Sheet



Steiner Surface



Breather Surface

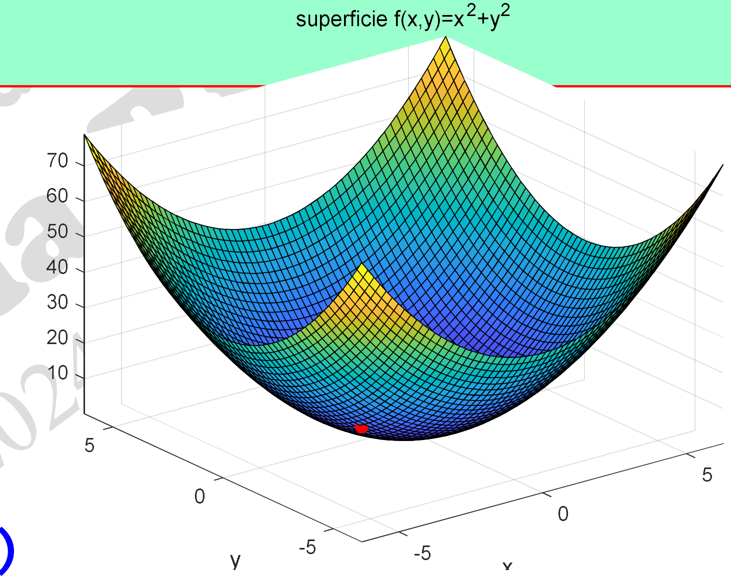


Klein Bottle

... dalla Parte 1 del corso di ACS

Esercizio: simbolicamente e numericamente ...

Visualizzare in MATLAB il piano tangente ad una superficie $z=f(x,y)$ in suo un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ e la corrispondente retta normale.

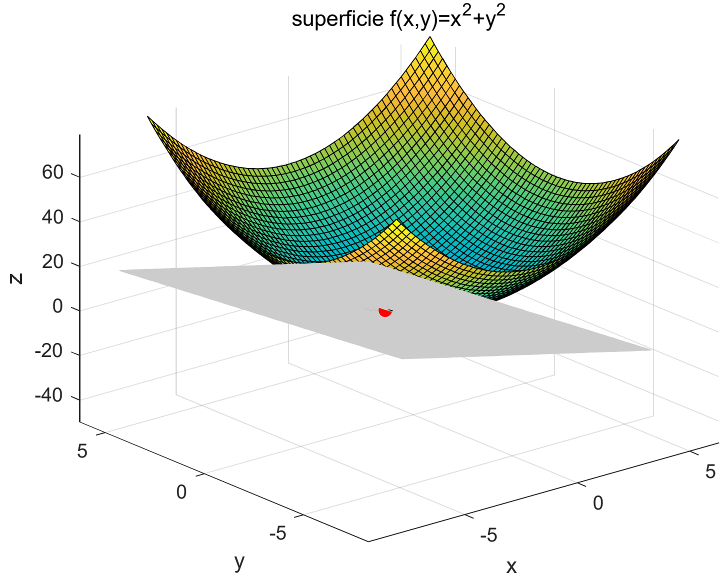


Gallery of Surfaces

http://xahlee.info/surface/gallery.html

Esempio:

```
syms x y real; f=x^2 + y^2;
ezsurf(f); axis tight; hold on
x0=-3; y0=-2; z0=x0^2+y0^2; hold on
plot3(x0,y0,z0,'or','MarkerFaceColor','r')
```



Suggerimento: eq. parametrica superficie

$X = x$

$Y = y$

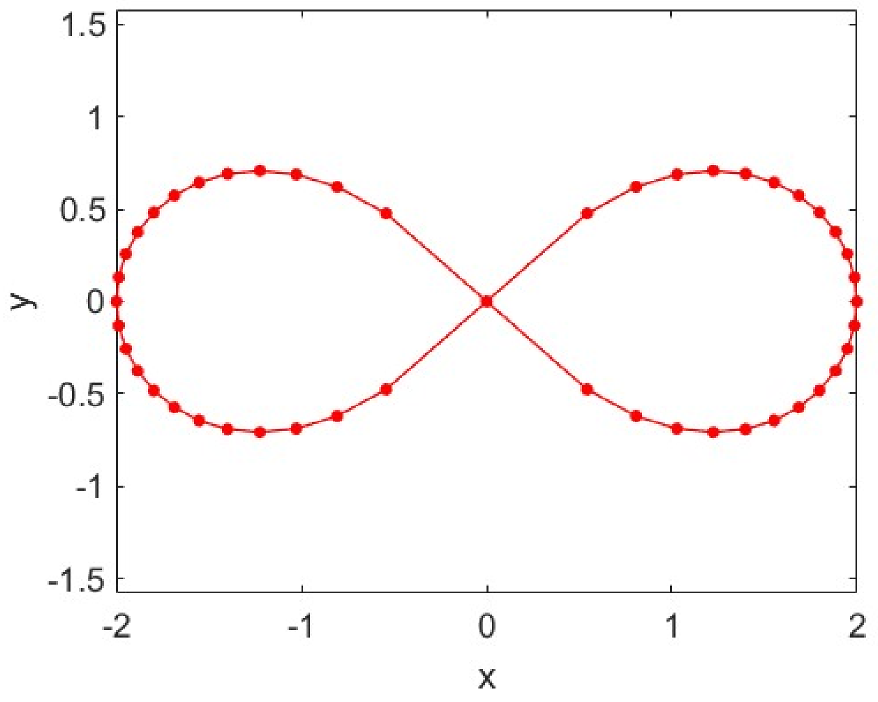
$Z = f(x,y)$

funzione **jacobian()**

... dalla Parte 1 del corso di ACS

Esercizio

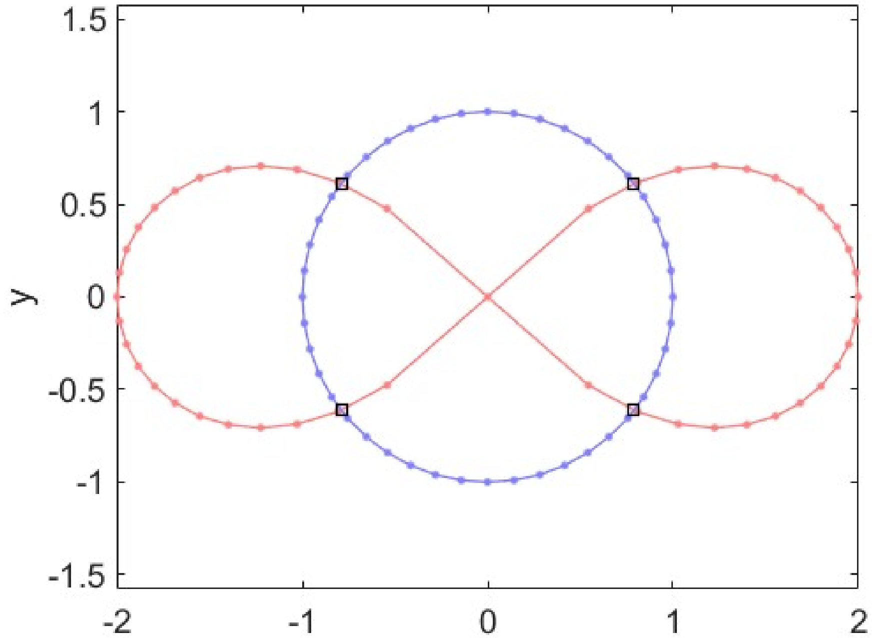
Visualizzare la retta tangente e la retta normale alla seguente curva piana (*lemniscata di Bernoulli*) in un suo punto regolare. Risolvere il problema numericamente, cioè conoscendo solo una sequenza di suoi campioni.



Nell'origine, la curva presenta una *continuità geometrica* o *parametrica*?

Esercizio

Ricordando che l'angolo tra due curve in un loro punto di intersezione è definito come angolo tra le tangenti alle due curve in quel punto, calcolare numericamente gli angoli nei punti di intersezione tra la precedente *lemniscata* e la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.



Si consiglia di usare il Symbolic Math Toolbox di MATLAB per determinare le coordinate dei quattro punti intersezione delle due curve, partendo dalle loro equazioni cartesiane:

lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

circonferenza: $x^2 + y^2 = 1$