Scuola Interdipartimentale delle Scienze, dell'Ingegneria e della Salute

DiST Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_01

Argomenti trattati

- **Algebra Lineare:**
  - Spazi e sottospazi lineari.
  - Indipendenza lineare.
  - Basi.
  - Dimensione di uno spazio.
  - Proprietà degli spazi e sottospazi.
  - I quattro sottospazi fondamentali di una matrice.

Fondamenti di Algebra

Gruppo commutativo (o gruppo abeliano) $\langle G,\# \rangle$

È un insieme G con una operazione # tale che:

$$\forall \alpha,\beta \in G,\quad \alpha \# \beta \in G$$

1. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in G \quad (\alpha\#\beta)\#\gamma = \alpha\#(\beta\#\gamma)$ (associatività di #)
2. $\exists \alpha_o \quad \beta\#\alpha_o = \beta$ (∃ elemento neutro)
3. $\forall \beta \; \exists \; \beta^* : \beta\#\beta^* = \alpha_o$ (∃ elemento inverso)
4. $\forall \alpha,\beta \quad \alpha\#\beta = \beta\#\alpha$ (commutatività di #)

Campo $\langle A,+,\times \rangle$

È un insieme A che risulta un ***gruppo commutativo*** rispetto a due operazioni compatibili, addizione (+) e moltiplicazione (×).
In più vale la seguente proprietà:

$$\forall a,b,c \in A,\quad a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

(distributività di × rispetto a +)

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ICS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Spazi Lineari (o vettoriali)

Sia X un insieme (detto supporto dello spazio) e K un campo di scalari (di solito K è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

La struttura algebrica $\langle X, K, +, * \rangle$

è uno **SPAZIO LINEARE** (o **SPAZIO VETTORIALE**) sul campo K, se X è una collezione di oggetti detti vettori, che possono essere sommati fra loro (+) o moltiplicati ($*$) per i numeri in K, che vengono detti scalari:

- **addizione** (*interna*)

$$+ \ : \ (u, v) \in X \times X \longrightarrow u + v \in X$$

- **moltiplicazione per uno scalare** (*esterna*)

$$* \ : \ (\alpha, v) \in K \times X \longrightarrow \alpha * v = \alpha v \in X$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Proprietà dell'addizione e moltiplicazione negli Spazi Lineari

1 $\exists\, 0 \in X \quad : \quad \forall x \in X \quad x + 0 = x$ (esistenza ed unicità dell'elemento identico o vettore nullo)

2 $\forall x \in X \;\; \exists -x \in X \quad : \quad x + (-x) = 0$ (esistenza ed unicità dell'opposto, o inverso additivo, di x)

3 $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$ (commutatività)

4 $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (associatività)

5 $\forall x \in X,\ \forall \alpha, \beta \in K \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (compatibilità del prodotto per uno scalare con la moltiplicazione del campo $\boldsymbol{K}$)

6 $\forall x \in X,\ \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7 $\forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in K \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(distributività)

di solito il simbolo di moltiplicazione viene omesso

Combinazione lineare di due vettori

Dati due scalari α e β e due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, allora il vettore $\boldsymbol{w}$ definito come

$$w = \alpha u + \beta v$$

è detto combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Uno Spazio Lineare contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi vettori.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Esempi di Spazi Lineari

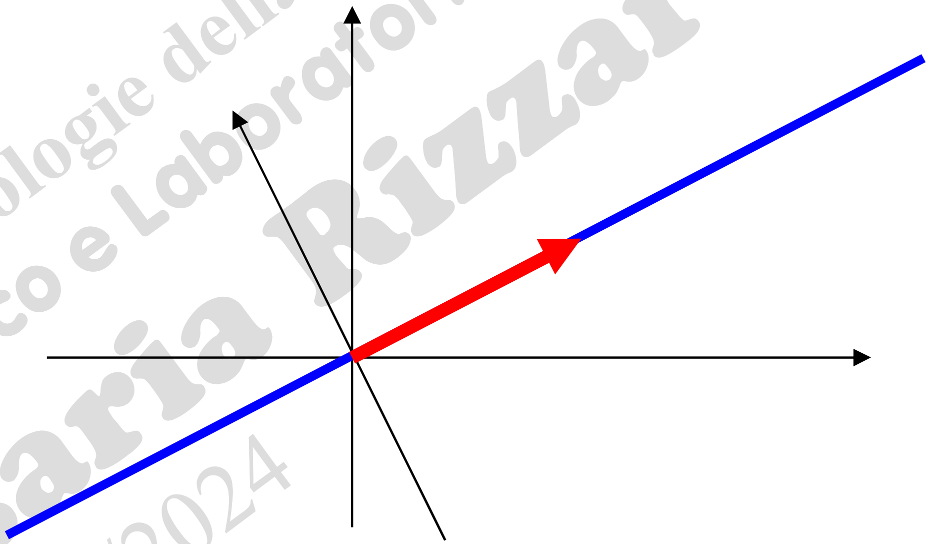
- $\mathbb{R}^2$: l'insieme dei vettori nel piano (coppia di componenti reali).
- $\mathbb{C}^2$: l'insieme dei vettori con due componenti complesse.
- $\mathbb{R}^3$: l'insieme dei vettori nello spazio (terna di componenti reali).
- $\mathbb{C}^3$: l'insieme dei vettori con tre componenti complesse.
- $\mathbb{R}^n$: l'insieme dei vettori con n componenti reali.
- $\mathbb{C}^n$: l'insieme dei vettori con n componenti complesse.
- $M_{(m\times n)}(\mathbb{R})$: l'insieme delle matrici reali di size $m\times n$.
- $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$: l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $\boldsymbol{Ax}=\underline{0}$.
- $\boldsymbol{C(a,b)}$: l'insieme delle funzioni reali $f(x)$ continue su (a,b).

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Esempi

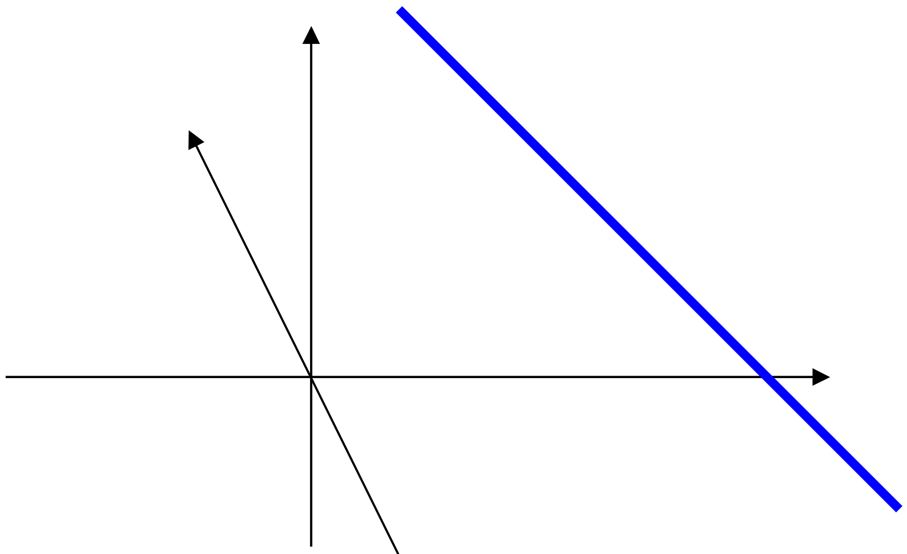
- Perché una retta nel piano passante per l'origine è uno spazio lineare?

Tale retta, che contiene tutti i vettori che giacciono su di essa, soddisfa tutte le proprietà di uno spazio lineare.



- Perché una retta nel piano non passante per l'origine non è uno spazio lineare?

Poiché tale retta non passa per l'origine, essa non contiene il vettore nullo e quindi non è uno spazio lineare.



Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Sottospazi di uno spazio lineare

DEF W è un **sottospazio** di uno spazio lineare X, se:

- W è un sottoinsieme non vuoto di X;
- W è uno spazio lineare.

Teorema

W è un sottospazio dello spazio lineare X se, e solo se, contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi vettori.

W è un **sottospazio**

$$\Updownarrow$$

$$\forall u, v \in W, \forall \alpha, \beta \in K \quad \alpha u + \beta v \in W$$

Laboratorio di ACS
Maria Rizzardi
Scienze e Tecnologie della Navigazione

Esempi

❖ Perchè l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ è un sottospazio lineare?

verifica il Teor.

$$x,y\in\mathcal{N}(A):\quad \begin{matrix} Ax=\underline{0} \\ Ay=\underline{0} \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=\underline{0}$$

Esso è detto Spazio Nullo di A e denotato con $\mathcal{N}(A)$.

❖ Perchè l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo $Ax=b$, $b\neq\underline{0}$, non è un sottospazio lineare?

non verifica il Teor.

$$\begin{matrix} Ax=b \\ Ay=b \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=(\alpha+\beta)b\neq b$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
Prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Combinazione lineare di n vettori

Si estende a n vettori la definizione di combinazione lineare:

$$\forall v_1, v_2, \ldots, v_n \in X, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$$

$$w = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n}_{\text{combinazione lineare di } n \text{ vettori}} \quad \Rightarrow \quad w \in X$$

L'insieme W contenente tutte le combinazioni dei vettori

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \in X$$

è un sottospazio di X, indicato con

$$W = \mathbf{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

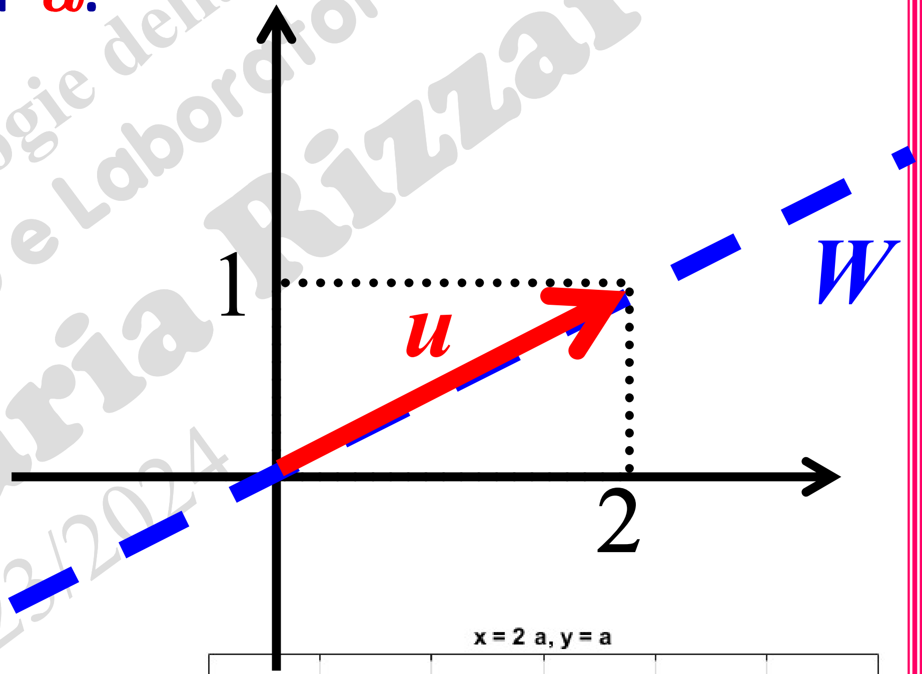
W è il sottospazio di X generato da $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
(o spanned)

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Esempio di span{...}

Il sottospazio generato da un solo vettore $u \in \mathbb{R}^2$ è la retta per l'origine sovrapposta a u.

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \mathrm{span}\{u\}$$



$$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

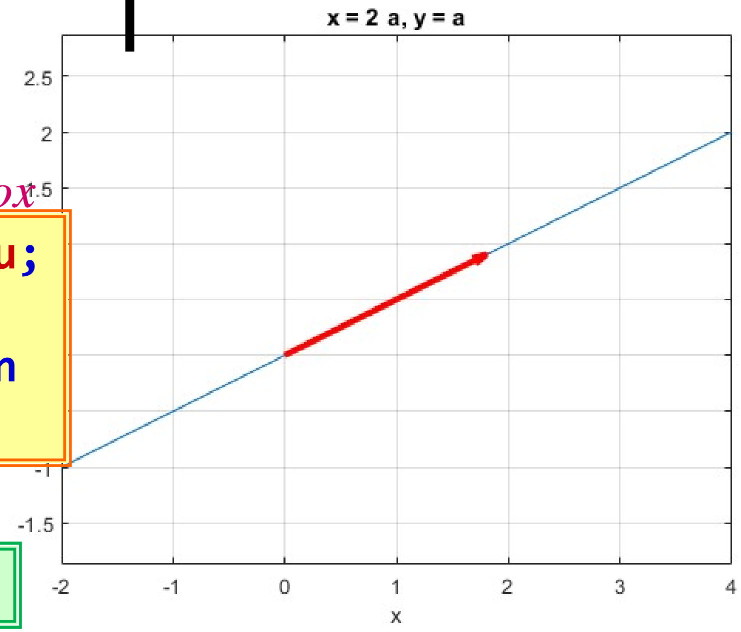
vettore direzione di W

MATLAB *Symbolic Math Toolbox*

```
u=[2 1]'; syms a real; W=a*u;
ezplot(W(1),W(2),[-1 2])
hold on; axis equal; grid on
quiver(0,0,u(1),u(2),'r')
```

```
fplot(W(1),W(2),[-1 2])
```

```
compass(u(1),u(2),'r')
```



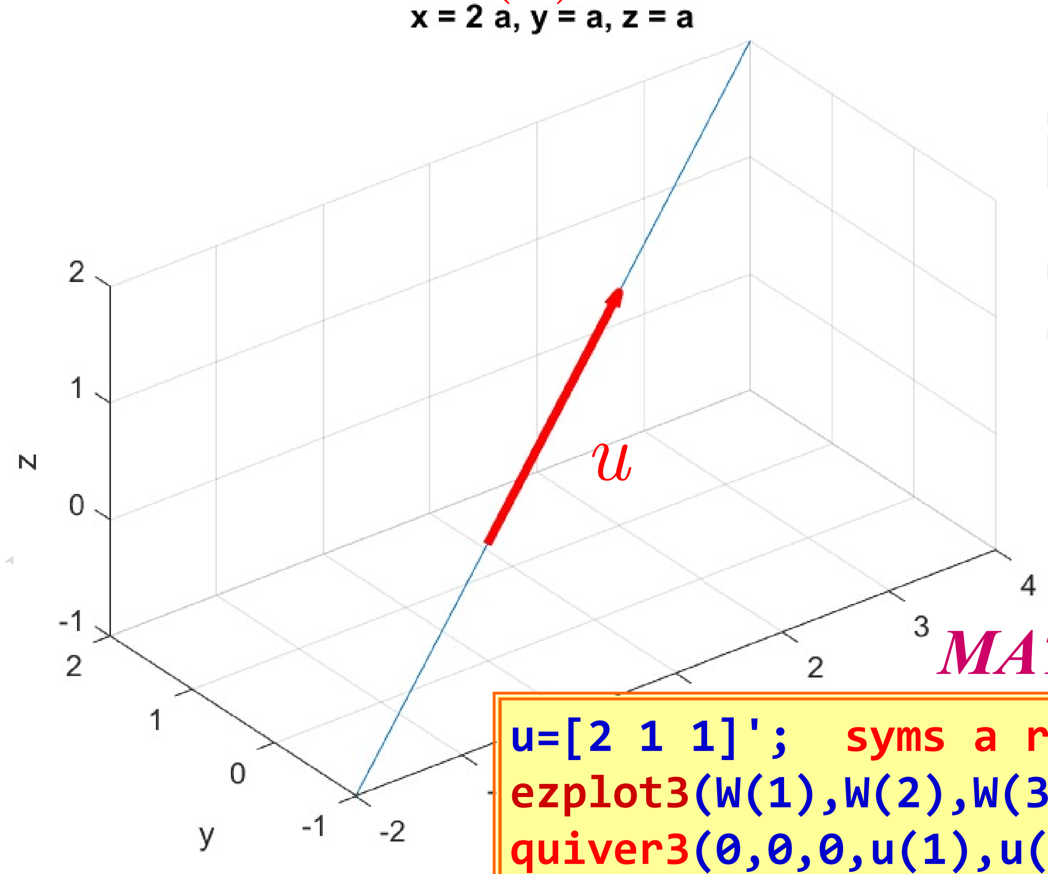
Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Esempio di span{…}

Il sottospazio generato da un solo vettore $u \in \mathbb{R}^3$ è la retta per l'origine sovrapposta a u.

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad W = \text{span}\{u\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

vettore direzione di W



MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
u=[2 1 1]';  syms a real;  W=a*u;
ezplot3(W(1),W(2),W(3),[-1 2]); hold on; axis equal
quiver3(0,0,0,u(1),u(2),u(3),1,'Color','r','LineWidth',3)
```

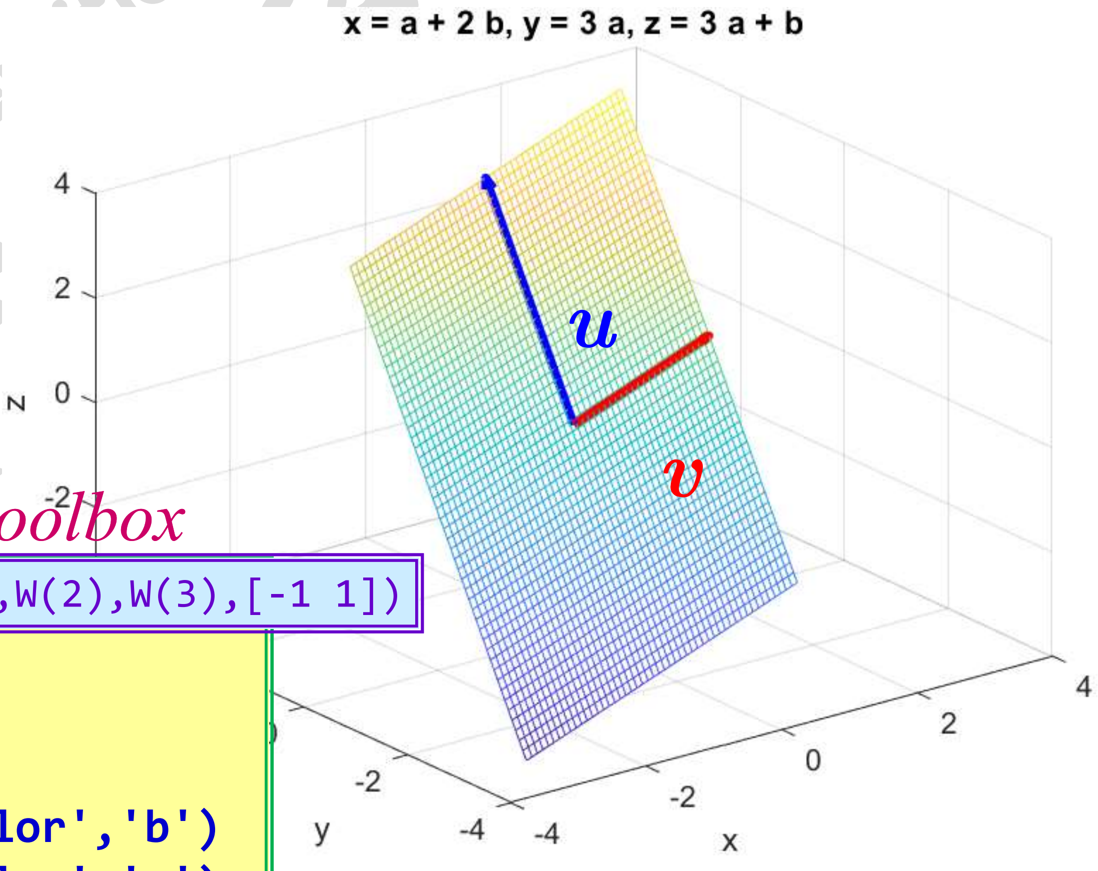

Tecnologie della Navigazione — Laboratorio di ACS — Mariarosaria Rizzardi — 2023/2024

Esempio di span{…}

Il sottospazio generato da due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ è il piano per l'origine che contiene $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad W = \operatorname{span}\{u, v\}$$

$$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$



MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
u=[1 3 3]'; v=[2 0 1]';
syms a b real;  W=a*u+b*v;
ezmesh(W(1),W(2),W(3),[-1 1])
hold on
quiver3(0,0,0,u(1),u(2),u(3),0,'Color','b')
quiver3(0,0,0,v(1),v(2),v(3),0,'Color','r')
```

```
fmesh(W(1),W(2),W(3),[-1 1])
```

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico Laboratorio di ACS
Maria Rizzardi

Equazione parametrica di una retta

in $\mathbb{R}^2$

$$W=\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\forall\alpha\in\mathbb{R}\right\}\equiv\begin{cases}w_1=2\alpha\\w_2=1\alpha\end{cases},\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

equazione parametrica vettoriale

equazioni parametriche scalare

in $\mathbb{R}^n$

$$W=\{w=\alpha u,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\}\equiv\begin{cases}w_1=\alpha u_1\\w_2=\alpha u_2\\\vdots\\w_n=\alpha u_n\end{cases}\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

La stessa eq.!

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

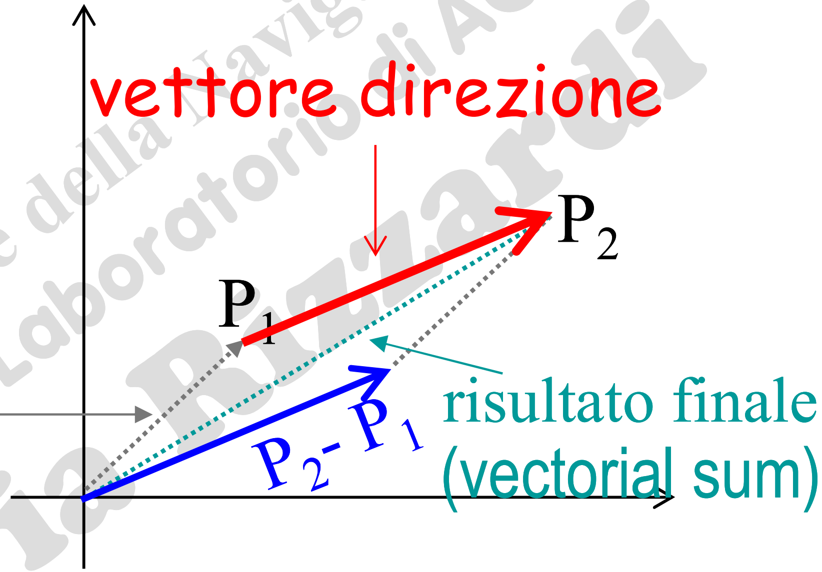
Equazione parametrica di un segmento in $\mathbb{R}^2$

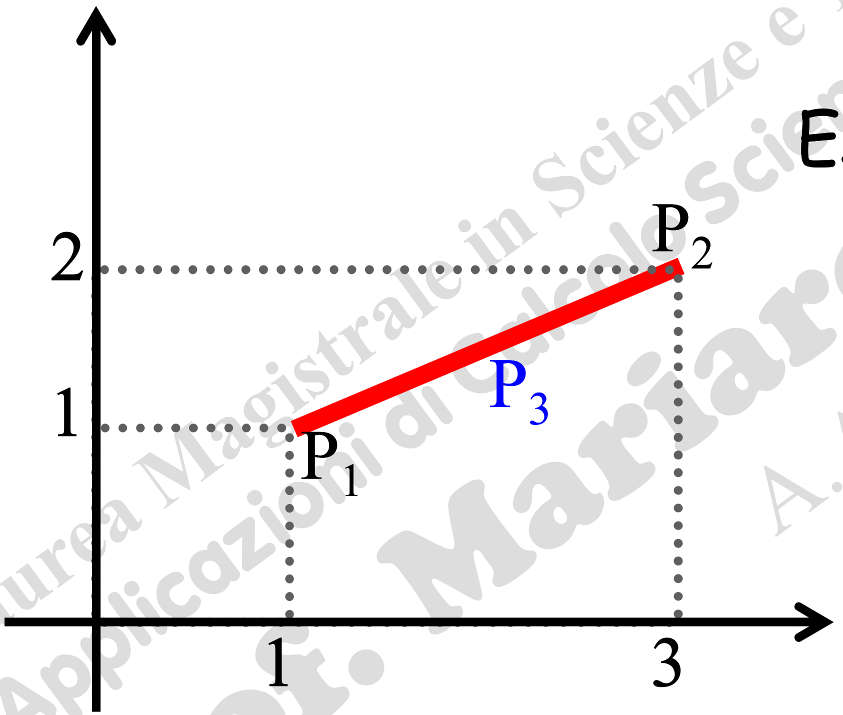
$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ equazione:

$$\boxed{s : P \equiv P_1 + \lambda (P_2 - P_1), \quad \lambda \in [0,1]}$$

$P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$ (direzione)

$P' = P_1 + P$ (traslazione: O in P_1)





Esempio

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad \lambda \in [0,1]$$

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

punto medio P_3

$$\boxed{\lambda = 0.5 \Rightarrow P_3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2024

Equazione parametrica di un segmento in $\mathbb{R}^3$

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\boxed{s : P \equiv P_1 + \lambda(P_2 - P_1), \quad \lambda \in [0,1]}$$

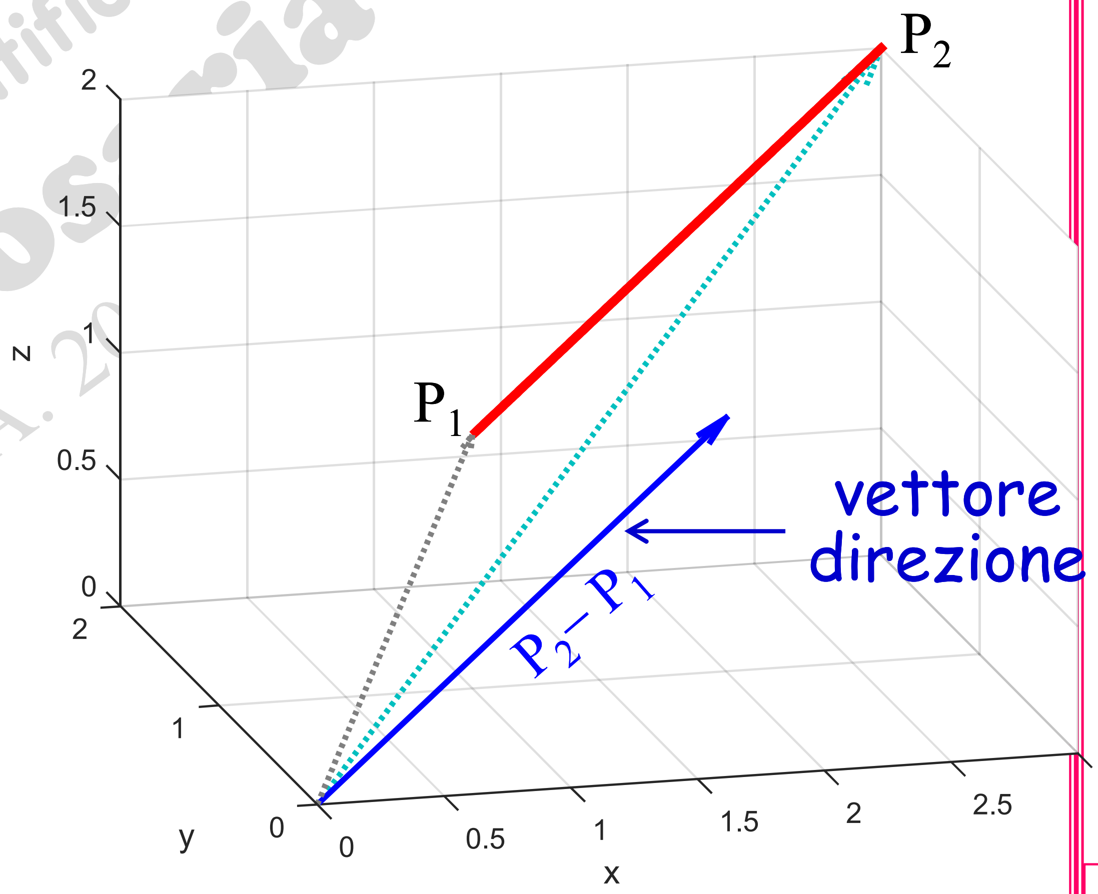
La stessa eq.!

Esempio

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad \lambda \in [0,1]$$

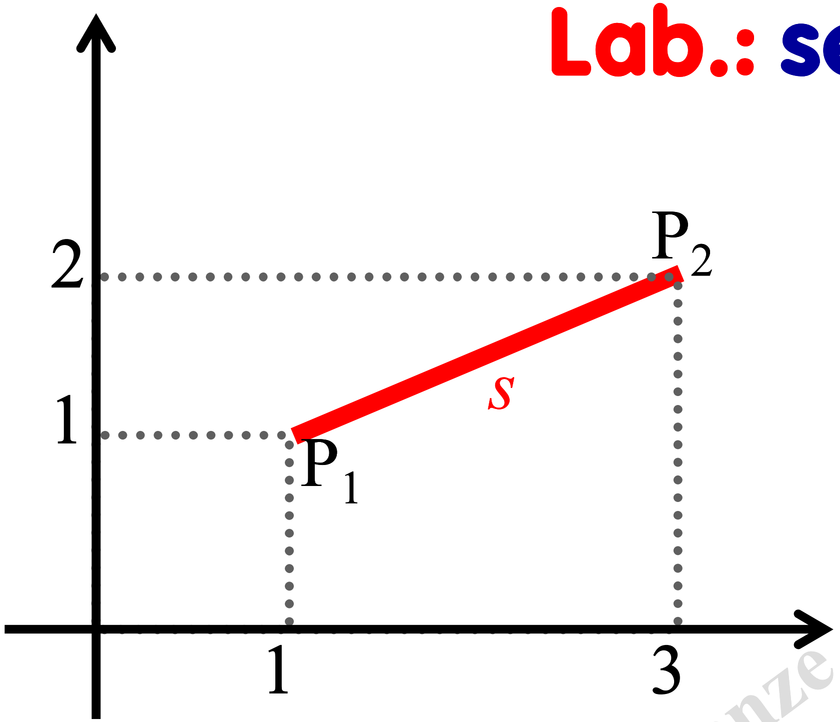
$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ 1+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$



Università di Napoli Parthenope - Scienze e Tecnologie della Navigazione - Laboratorio Scientifico e Laboratorio di ACS - A.A. 20.. - prof. Maria Rizzardi

Lab.: segmento in $\mathbb{R}^2$



$$s : P \equiv P_1 + \lambda(P_2 - P_1), \quad \lambda \in [0,1]$$

$P_1(1,1)$, $P_2(3,2)$

$$s \subset \mathbb{R}^2 \quad s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

Dato un altro punto, stabilire se giace sul segmento $s = \overline{P_1 P_2}$

$P_3(2,1) \in s$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

sistema incompatible in λ

P_3 non giace sulla retta passante per P_1 e P_2

$P_4(5,3) \in s$?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

sistema compatibile

$$\lambda = 2 \notin [0,1]$$

P_4 giace sulla retta sovrapposta a s, ma si trova oltre s

$P_5(2.5,1.75) \in s$?

$$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

sistema compatibile

$$\lambda = 0.75 \in [0,1]$$

$P_5 \in s$

download scripts: `segment1_sym.m`, `segment1_num.m`, `segment2_sym.m`, `segment2_num.m`

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Laboratorio di Applicazioni di Calcolo Scientifico
Prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{R}^2$

Solo in $\mathbb{R}^2$ dalle ***equazioni parametriche scalari*** di una retta si ottiene la sua **equazione cartesiana**.

$$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\} \equiv \begin{cases} w_1 = 2\alpha \\ w_2 = 1\alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Si rimuove il parametro α dalle due equazioni scalari:

$$\begin{cases} w_1 = 2\alpha \\ \boxed{w_2 = 1\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2\alpha \\ \alpha = w_2 \end{cases} \Rightarrow w_1 = 2w_2 \Rightarrow x - 2y = 0$$

$$x - 2y = 0$$

equazione cartesiana della retta ***W*** nel piano

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di calcolo scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Solo in $\mathbb{R}^2$ dalle ***equazioni parametriche scalari*** di una retta si ottiene la sua **equazione cartesiana**.

MATLAB Symbolic Maths

$$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\} \equiv \begin{cases} w_1 = 2\alpha \\ w_2 = 1\alpha \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

```
syms a x y real
u=[2 1]'; b=[x y]'; % system u*a=b
%% Gauss method on complete matrix G
G=[u*a  b]
G =
[2*a, x]
[  a, y]
m21=G(2,1)/G(1,1); G(2,:)=G(2,:)-m21*G(1,:)
G =
[2*a,       x]
[  0, y - x/2]
Ceq="cartesian eq.: "+string(G(2,2))+" = 0"
Ceq =
    "cartesian eq.: y - x/2 = 0"
```

Se il sistema è compatibile, allora la seconda riga deve contenere tutti zeri

"..." stringa costante

'...' array di chars
[ ] concatenazione di array

```
Ceq=['cartesian eq.: ' char(G(2,2)) ' = 0']
Ceq =
    'cartesian eq.: y - x/2 = 0'
```


Laboratorio di ACS della Navigazione Rizzardi

Viceversa, **solo in $\mathbb{R}^2$**, dall'equazione cartesiana di una retta si ottengono le sue ***equazioni parametriche scalari***.

MATLAB Symbolic Maths

$$x-2y=0$$

```
syms a x y real
Eq = x-2*y == 0;
Y=a;
X=solve(Eq,x) % risolve l'eq. rispetto a x
X =
2*y
X=subs(X,y,a) % sustituisce ad y a
X =
2*a
Peqs=[X;Y]
Peqs =
2*a
  a
```

Equazioni parametriche

Laurea Magistrale in Tecnologie della Navigazione
Applicazioni - Laboratorio di ACS
prof. Rizzardi

Equazione parametrica di un piano

$u, v \in \mathbb{R}^3$

$$W = \{\alpha u + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \begin{cases} w_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \\ w_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \\ w_3 = \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

equazione parametrica vettoriale

equazioni parametriche scalari

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$$W = \{\alpha u + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \begin{cases} w_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \\ w_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \vdots \\ w_n = \alpha u_n + \beta v_n \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La stessa eq.!

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{R}^3$

Solo in $\mathbb{R}^3$ dalle ***equazioni parametriche scalari*** di un piano si ottiene la sua **equazione cartesiana**.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \boxed{W = \{\alpha u + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \begin{cases} w_1 = \alpha 1 + \beta 2 \\ w_2 = \alpha 3 + \beta 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ w_3 = \alpha 3 + \beta 1 \end{cases}}$$

Si rimuovono i parametri α e β dalle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} w_1 = \alpha 1 + \beta 2 \\ w_2 = \alpha 3 + \beta 0 \\ w_3 = \alpha 3 + \beta 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1\alpha + 2\beta \\ \alpha = w_2/3 \\ w_3 = 3\alpha + 1\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1 w_2/3 + 2\beta \\ \alpha = w_2/3 \\ w_3 = 3 w_2/3 + 1\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2/3 + 2\beta \\ \alpha = w_2/3 \\ \beta = w_3 - w_2 \end{cases}$$

$$w_1 = w_2/3 + 2(w_3 - w_2) \Rightarrow$$

$$3x + 5y - 6z = 0$$

equazione cartesiana del piano ***W*** nello spazio

Laurea Magistrale in Scienze della Navigazione
Applicazioni di Calcolo scientifico Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

e solo in $\mathbb{R}^3$ … dall'**equazione cartesiana** di un piano

$$3x + 5y - 6z = 0$$

si ottengono le sue ***equazioni parametriche***.

Si considera l'equazione cartesiana come un sistema lineare omogeneo di una sola equazione in 3 incognite. Tale sistema è indeterminato; si possono fissare arbitrariamente i valori di due incognite (per es., x e y):

$$3x + 5y - 6z = 0$$

equazione cartesiana di un piano

risolviamo l'eq. in z, mentre le altre due sono considerate parametri liberi

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \dfrac{3\lambda + 5\mu}{6} \end{cases}$$

equazioni parametriche scalari

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

vettori scalati giacciono sulla stessa retta

equazione parametrica vettoriale

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
A.A. 2023/2024
Prof. Mariarosaria Rizzardi

e solo in $\mathbb{R}^3$ … dall'**equazione cartesiana** di un piano

$$3x + 5y - 6z = 0$$

si ottengono le sue ***equazioni parametriche***.

MATLAB Symbolic Maths

```
syms x y z real
Eq = 3*x + 5*y - 6*z == 0;
Z = solve(Eq, z) % risolve rispetto s z
Z =
x/2 + (5*y)/6
X=x; Y=y; sol=[X;Y;Z] % Eq. param.
sol =
              x
              y
x/2 + (5*y)/6
Cx=simplify(expand(sol/x))
Cx =
                  1
                y/x
(5*y)/(6*x) + 1/2
Cy=simplify(expand(sol/y))
Cy =
            x/y
              1
x/(2*y) + 5/6
```

vogliamo i coefficienti di x e y

coefficienti di x

vogliamo estrarre solo i numeri dai coefficienti

coefficienti di y

```
cCy=children(Cy)
cCy =
  3×1 cell array
    {1×2 cell}
    {1×1 cell}
    {1×2 cell}
cCy{2}
ans =
  1×1 cell array
    {[1]}
isempty(symvar(cCy{2}{1}))
ans =
  logical   1
cCy{3}
ans =
  1×2 cell array
    {[x/(2*y)]}    {[5/6]}
{cCy{3}{1} symvar(cCy{3}{1})}
ans =    1×2 cell array
    {[x/(2*y)]}    {[x    y]}
isempty(symvar(cCy{3}{1}))
ans =
  logical   0
isempty(symvar(cCy{3}{2}))
ans =
  logical   1
```

sottoespressioni o termini di un array simbolico

symvar: variabili simboliche nell'espressione

Viceversa, **solo in $\mathbb{R}^3$**, dalle ***equazioni parametriche*** di un piano si può ottenre la sua **equazione cartesiana**.

MATLAB Symbolic Maths

```
syms x y z real
A=[1 2;3 0;3 1] ; v=[x y z]';
G=[A v] % system A*w = v
G =
[1, 2, x]
[3, 0, y]
[3, 1, z]
%% metodo di Gauss in avanti (produce un sistema trapezoidale)
m21=G(2,1)/G(1,1); G(2,:)=G(2,:)-m21*G(1,:)
G =
[1,  2,         x]
[0, -6, y - 3*x]
[3,  1,         z]
m31=G(3,1)/G(1,1); G(3,:)=G(3,:)-m31*G(1,:)
G =
[1,  2,         x]
[0, -6, y - 3*x]
[0, -5, z - 3*x]
m32=G(3,2)/G(2,2); G(3,2:end)=G(3,2:end)-m32*G(2,2:end)
G =
[1,  2,                   x]
[0, -6,             y - 3*x]
[0,  0, z - (5*y)/6 - x/2]
Ceq="cartesian eq.: "+string(G(3,3))+" = 0"
Ceq =
    "cartesian eq.: z - (5*y)/6 - x/2 = 0"
```

$$P=\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

sistema di 3 eq. in 2 incognite

sistemi trapezoidali: generalizzazione dei sistemi triangolari superiori quando la matrice dei coefficienti è rettangolare

mij: moltiplicatore per inserire **0** in posizione **(i,j)**

Se il sistema è compatibile, allora la terza riga deve contenere tutti zeri

Teorema di Rouché-Capelli

Come disegnare un piano in $\mathbb{R}^3$ dalla sua eq. cartesiana?

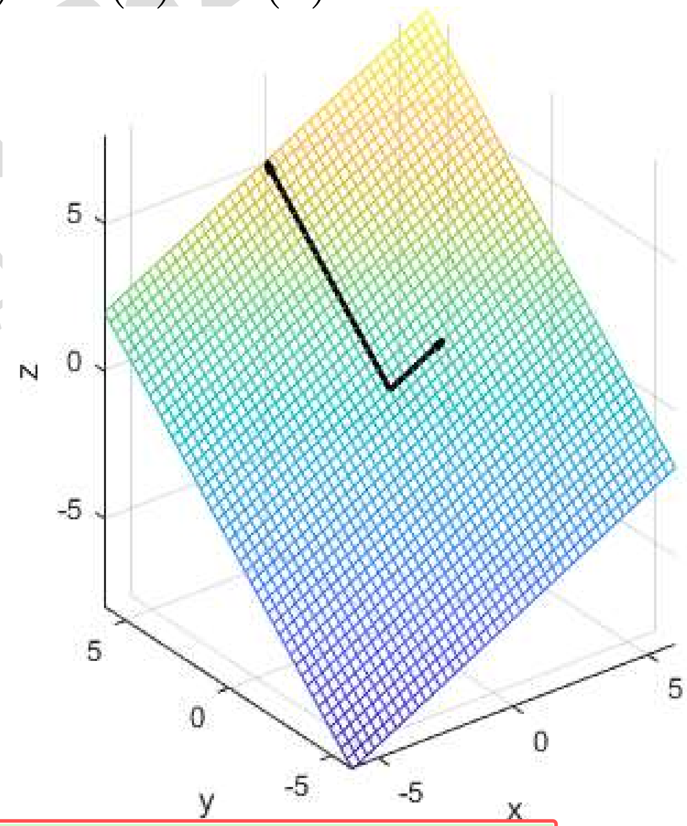
$$3x + 5y - 6z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = (3x+5y)/6$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

MATLAB simbolico

```
syms x y z real
Eq = 3*x + 5*y - 6*z;
Z = solve(Eq == 0, z) % risolve in z
Z =
x/2 + (5*y)/6
ezmesh(x,y,Z,[-4 4]); axis equal
```

```
fmesh(x,y,Z,[-4 4])
```



MATLAB numerico

```
x=linspace(-4,4,25); y=linspace(-4,6,25);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(3*X+5*Y)/6;
mesh(X,Y,Z); axis equal; hold on; hidden off
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```

disegna i due vettori dall'equazione parametrica:

```
V=[2 0;0 6;1 5]; % vettori
h=quiver3([0 0],[0 0],[0 0], V(1,:),V(2,:),V(3,:),1,'k','LineWidth',2)
```

o

```
h=quiver3([0 0],[0 0],[0 0],V(1,:),V(2,:),V(3,:),1,'k'); set(h, 'LineWidth',2)
```

```
h=quiver3([0 0],[0 0],[0 0],V(1,:),V(2,:),V(3,:),1,'k'); h.LineWidth=2;
```

Esercizio

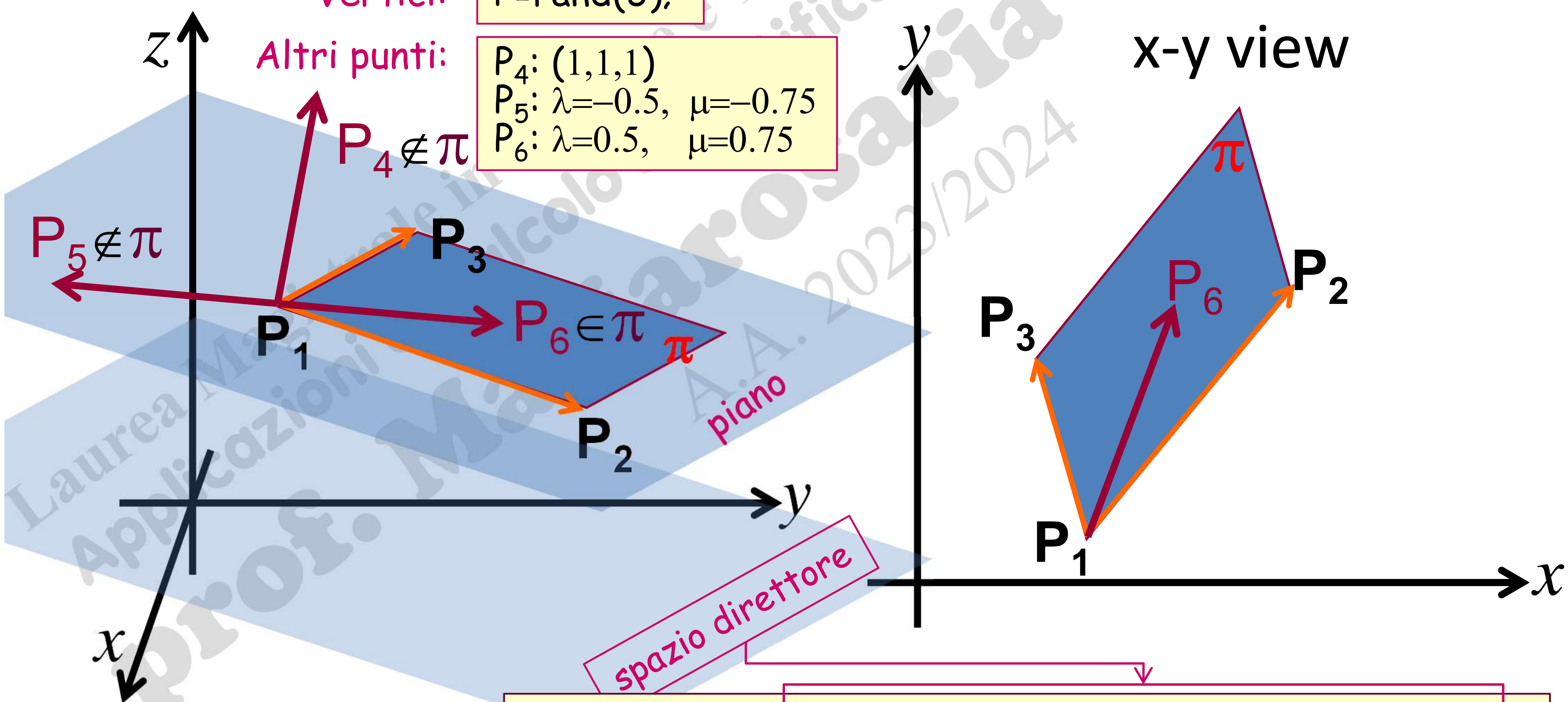
Analogamente a quanto detto su di un segmento in $\mathbb{R}^2$ (pg. 17), nell'eq. parametrica di un piano in $\mathbb{R}^3$, dati tre punti P_1,P_2,P_3 non allineati, se si limitano i parametri reali a variare tra 0 e 1, l'equazione descrive il parallelogramma avente tali tre punti come vertici:

$$\pi : P \equiv P_1 + \lambda\left(P_2 - P_1\right) + \mu\left(P_3 - P_1\right), \quad \lambda,\mu \in [0,1]$$

- È tale parallelogramma un sottospazio di $\mathbb{R}^3$?
- Assegnato un quarto punto, stabilire se esso appartenga al parallelogramma.

Vertici: `P=rand(3);`

Altri punti:
P_4: $(1,1,1)$
P_5: $\lambda=-0.5,\ \mu=-0.75$
P_6: $\lambda=0.5,\ \mu=0.75$

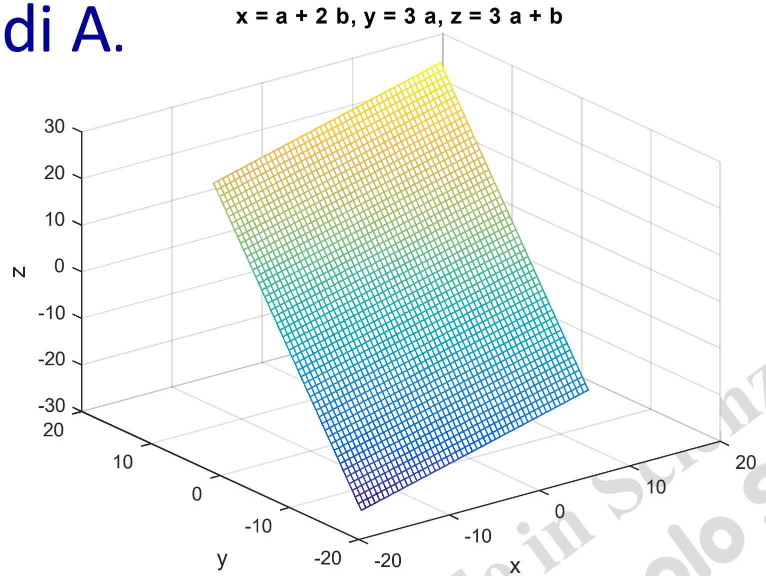


un punto sul piano:
```
Q = P(:,1) + [P(:,2)-P(:,1) P(:,3)-P(:,1)]*[λ;μ];
```

Laurea Magistrale in Applicazioni ... Calcolo Scientifico ... prof. Mariarosaria Rizzardi A.A. 2023/2024

Esempio di span{...}

Se A è una matrice m×n, lo Spazio delle Colonne (o Range) di A, denotato come $\mathscr{R}(A)$, è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.



$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathscr{R}(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

notazione matriciale per la combinazione lineare delle colonne della matrice

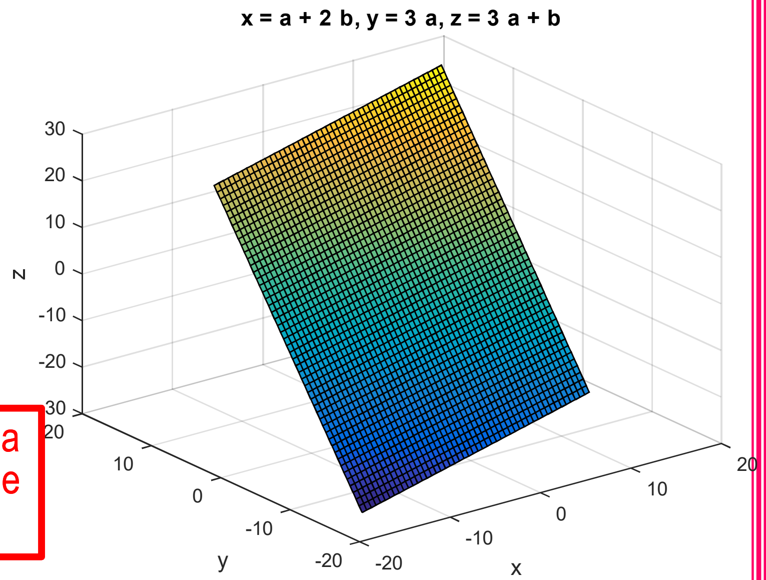
```
syms a b real
A=[1 2;3 0;3 1];
RA = A*[a;b];
ezmesh(RA(1),RA(2),RA(3))
```

Lo Spazio delle Righe di A, denotato come $\mathscr{R}(A^T)$, è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathscr{R}(A^T)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

```
A=[1 3 3;2 0 1];
syms a b real
RAT = A'*[a;b];
ezsurf(RAT(1),RAT(2),RAT(3))
```

notazione matriciale per la combinazione lineare delle righe della matrice



Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Spazio delle Colonne $\mathscr{R}(A)$ e Spazio Nullo $\mathscr{N}(A)$

A(m×n)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Spazio delle Colonne di A: $\mathscr{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y=Ax\}$

MATLAB (numerico)

```
A=[1 2;3 0;3 1];
Cn=orth(A)
      -0.34427        0.8677
      -0.62941      -0.49669
      -0.69665      0.019944
```

```
disp(Cn'*Cn)
   1            1.2837e-16
   1.2837e-16 1
```

MATLAB (simbolico)

```
S=sym(A);
Co=orth(S)
[     19^(1/2)/19, (33*19^(1/2)*70^(1/2))/1330]
[(3*19^(1/2))/19,  -(3*19^(1/2)*70^(1/2))/266]
[(3*19^(1/2))/19,    (2*19^(1/2)*70^(1/2))/665]
```

```
disp(Co'*Co)
[1, 0]
[0, 1]
```

```
S=sym(A);
Cs=colspace(S)
[   1,   0]
[   0,   1]
[ 1/2, 5/6]
```

```
disp(Cs'*Cs)
[ 5/4,  5/12]
[5/12, 61/36]
```

```
disp(rank([A Cn double(Co) double(Cs)]))
     2
```

Lo stesso spazio!

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Spazio Nullo di A: $\mathscr{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax=\underline{0}\}$

MATLAB (numerico)

```
A=[1 3 3;2 0 1];
Nn=null(A)
    -0.35857
    -0.59761
     0.71714
```

```
format rat
Nr=null(A,"rational")
        -1/2
        -5/6
         1
```

MATLAB (simbolico)

```
S=sym(A);
Ns=null(S)
-1/2
-5/6
   1
```

```
disp(rank([Nn Nr double(Ns)]))
     1
```

Lo stesso spazio!

Laurea Magistrale in Scienze della Navigazione e ... Laboratorio di ACS ... Mariarosaria Rizzardi A.A. 2023/2024

Spazio delle Righe $\mathscr{R}(A^T)$ e Spazio Nullo Sinistro $\mathscr{N}(A^T)$

A(m×n)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ Spazio delle Righe di A: $\mathscr{R}(A^T)=\{x\in\mathbb{R}^n : x=A^Ty\}$

MATLAB (numerico)

```
A=[1 3 3;2 0 1];
Rn=orth(A')
     -0.34427         0.8677
     -0.62941       -0.49669
     -0.69665       0.019944
```

MATLAB (simbolico)

```
S=sym(A);
Ro=orth(S')
[    19^(1/2)/19, (33*19^(1/2)*70^(1/2))/1330]
[(3*19^(1/2))/19,  -(3*19^(1/2)*70^(1/2))/266]
[(3*19^(1/2))/19,   (2*19^(1/2)*70^(1/2))/665]
```

```
S=sym(A);
Rs=colspace(S')
[   1,   0]
[   0,   1]
[ 1/2, 5/6]
```

```
disp(rank([A' Rn double(Ro) double(Rs)]))
     2
```

Lo stesso spazio!

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$ Spazio Nullo Sinistro of A: $\mathscr{N}(A^T)=\{y\in\mathbb{R}^m : A^Ty=\underline{0}\}$

MATLAB (numerico)

```
A=[1 2;3 0;3 1];
Ln=null(A')
     -0.35857
     -0.59761
      0.71714
```

```
format rat
Lr=null(A',"rational")
     -1/2
     -5/6
      1
```

MATLAB (simbolico)

```
S=sym(A);
Ls=null(S')
-1/2
-5/6
   1
```

```
disp(rank([Ln double(Lr) double(Ls)]))
     1
```

Lo stesso spazio!

Laurea Magistrale in Navigazione - Laboratorio di ACS della Navigazione: Applicazioni di Calcolo Scientifico - Mariarosaria Rizzardi - A.A. 2023/24

I 4 sottospazi fondamentali di una matrice

$\mathscr{R}(A)$, $\mathscr{R}(A^T)$, $\mathscr{N}(A)$, $\mathscr{N}(A^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad n = 4, \; m = 3$$

Tale matrice ha la 3ª riga uguale alla 1ª; la 4ª colonna uguale alla 1ª; la 3ª colonna è la somma delle prime due colonne.

⇨ Quindi r = rank(A) = 2.

MATLAB (numerico)		MATLAB (simbolico)

`A=[1 2 3 1; 1 1 2 1; 1 2 3 1];`
`Cn=orth(A)`
`-0.63853    0.30377`
`-0.42959   -0.90302`
`-0.63853    0.30377`
	$\mathscr{R}(A)$
	Perché 2 vettori?
		`S=sym(A);`
		`Cs=colspace(S)`
		`[ 1, 0]`
		`[ 0, 1]`
		`[ 1, 0]`

`A=[1 2 3 1; 1 1 2 1; 1 2 3 1];`
`Nn=null(A)`
`0.75059    0.19133`
`0.10759    0.62324`
`-0.10759   -0.62324`
`-0.64301    0.4319`
	$\mathscr{N}(A)$
	Perché 2 vettori?
		`S=sym(A);`
		`Ns=null(S)`
		`[-1, -1]`
		`[-1,  0]`
		`[ 1,  0]`
		`[ 0,  1]`

`A=[1 2 3 1; 1 1 2 1; 1 2 3 1];`
`Rn=orth(A')`
`-0.28161   -0.5663`
`-0.49234    0.598`
`-0.77395    0.031701`
`-0.28161   -0.5663`
	$\mathscr{R}(A^T)$
	Perché 2 vettori?
		`S=sym(A);`
		`Rs=colspace(S')`
		`[1, 0]`
		`[0, 1]`
		`[1, 1]`
		`[1, 0]`

`A=[1 2 3 1; 1 1 2 1; 1 2 3 1];`
`Ln=null(A')`
`-0.70711`
`-5.5511e-16`
`0.70711`
	$\mathscr{N}(A^T)$
	Perché 1 vettore?
		`S=sym(A);`
		`Ls=null(S')`
		`-1`
		`0`
		`1`

Marco Rizzardi - Tecnologie della Navigazione e Laboratorio di ACS - A.A. 2023/24

Esempio: perché 3 vettori in $\mathbb{R}^3$ generano un piano?

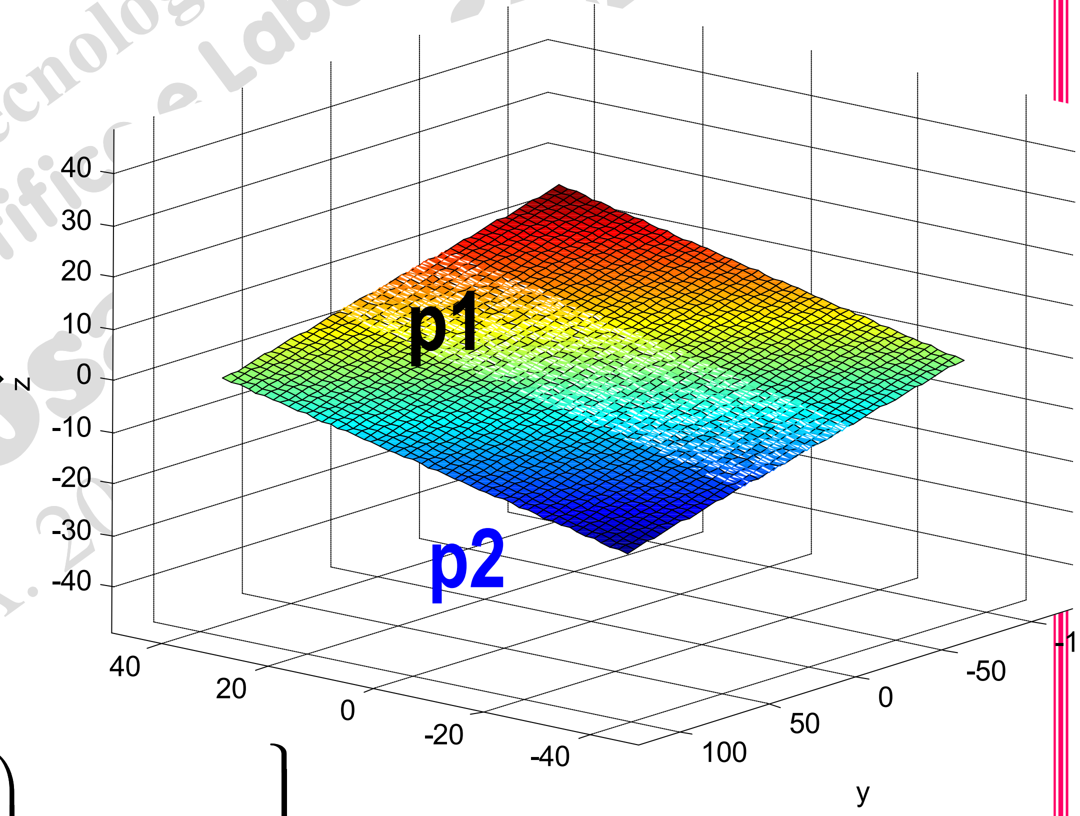
Display the range $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ where: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Colonne 1 e 3:

```
A=[1 3 3;2 6 9;-1 -3 3];
syms a b real
p1=A(:,[1 3])*[a b]';
ezmesh(p1(1),p1(2),p1(3))
```

Colonne 2 e 3:

```
syms c d real
p2=A(:,2:3)*[c d]';
hold on
ezsurf(p2(1),p2(2),p2(3))
```



$$\Rightarrow \mathscr{R}(\mathrm{A}) = \left\{ \boldsymbol{w} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

I 3 vettori sono linearmente dipendenti!

Laurea in Scienze e Tecnologie della Navigazione Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS A.A. 20.. prof. M. Rizzardi

Indipendenza lineare

k vettori in uno spazio lineare $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ sono detti **linearmente indipendenti** se il sistema lineare omogeneo

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0 \ \forall i$$

ammette, come soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)^T$, solo il $\boxed{\text{soluzione banale} \\ \text{vettore nullo}}$.

Altrimenti essi sono detti **linearmente dipendenti**.

Esempi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{linearmente indipendenti}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{linearmente dipendenti}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{linearmente dipendenti}$$

Esempi di vettori linearmente dipendenti

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists i : \alpha_i \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 3 3;2 6 9;-1 -3 3]
A =
     1     3     3
     2     6     9
    -1    -3     3
N=null(A); N'
ans =
   -0.9487    0.3162    0.0000
N(1)*A(:,1)+N(2)*A(:,2)+N(3)*A(:,3)
ans =
  1.0e-014 *
         -0.0583
         -0.1082
          0.0749
```

risolve il sistema omogeneo

combinazione lineare delle colonne di *A*

```
A*N
ans =
  1.0e-014 *
         -0.0583
         -0.1082
          0.0749
```

$\Rightarrow A\eta = \underline{0},\ \forall \eta \in \mathcal{N}(A)$

1e-14 denota un numero così piccolo da poter essere considerato zero!

Laboratorio di ACS - Applicazioni e Tecnologie della Navigazione - prof. M. Rizzardi

Teorema

k vettori in uno spazio lineare sono **linearmente dipendenti** se, e solo se, uno di essi è **combinazione lineare** dei rimanenti vettori.

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \underline{0}$$

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3}{\alpha_1}}$$

Laurea Magistrale in Scienze della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Conseguenze

2 vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ (entrambi$\neq\underline{\mathbf{0}}$) di uno spazio lineare sono paralleli ($\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$) se, e solo se, essi sono linearmente dipendenti.

$$\exists \alpha, \beta \;:\; |\alpha| + |\beta| \neq 0 \;\wedge\; \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\underline{u}$$

vettori scalati: sulla stessa retta

3 vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ di uno spazio lineare sono complanari se, e solo se, essi sono linearmente dipendenti.

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \;:\; |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0 \;\wedge\; \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w} = \underline{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{w} = -\frac{\alpha}{\gamma}\underline{u} - \frac{\beta}{\gamma}\underline{v}$$

vettori complanari: sullo stesso piano

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione A.A. 2024 — Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS — prof. Mariarosaria Rizzardi

Rango di una matrice

Il **rango** di una matrice indica il numero di righe e di colonne che sono **linearmente independenti**.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 3 3;2 6 9;-1 -3 3]
A =
     1     3     3
     2     6     9
    -1    -3     3
```

```
rref(A)
ans =
     1     3     0
     0     0     1
     0     0     0
```

```
rank(A)
ans =
     2
```

rref: row-reduced echelon form

rref: row-reduced echelon form

Una matrice è in echelon form se ha la forma rusultante da un'*eliminazione Gaussiana*. Row echelon form significa che l'*eliminazione Gaussiana* ha operato sulle righe (row reduction).

```
A=[1 3 3;2 6 9;-1 -3 3];
[L,U,P]=lu(A); U
U =
          2          6          9
          0          0       -1.5
          0          0        7.5
```

Una matrice è in row-reduced echelon form se soddisfa le seguenti condizioni:

- È in row echelon form.
- Ogni riga non nulla inizia con un 1 che è l'unico elemento non nullo in quella colonna.

```
A=[1 3 3;2 6 9;-1 -3 3];
S=rref(A); S
S =
          1          3          0
          0          0          1
          0          0          0
```

La row-reduced echelon form di una matrice può essere calcolata mediante l'*eliminazione di Gauss-Jordan* (Gauss↓ + Gauss↑, rispettivamente Gauss in avanti e all'indietro).

A differenza della *row echelon form*, la row-reduced echelon form di una matrice è **unica** e non dipende dall'algoritmo usato per calcolarla.

Basi di uno Spazio Lineare

Una sequenza di vettori $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ di uno spazio lineare X è detta una **base di X**, se

- $X = \text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (i vettori generano lo spazio)
- i vettori sono linearmente indipendenti.

ESEMPIO

una base per $\mathbb{R}^3$
(base standard)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

un'altra base per $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

In uno spazio lineare ci sono infinite basi

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie per la Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Componenti di un vettore

Se $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$ è una base per lo spazio $\boldsymbol{X}$, allora

$$\forall x \in X \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ : \ x = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \cdots + \alpha_n u^{(n)}$$

gli scalari (α_i) sono detti componenti di x rispetto alla base $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$.

Esempio

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le componenti di x rispetto alla base standard sono $(2, -1, 1)^T$.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Cambiamento di base

Per calcolare le componenti di $x=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ rispetto alla seguente base

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

si impone $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=x=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ e si risolve il sistema:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/3\\-5/3\\1/3\end{pmatrix}$$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di calcolo scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Teorema

Se entrambe le sequenze $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$ e $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)}\}$ sono **basi** di uno Spazio X, allora

$$k = n.$$

Cioè, tutte le basi di uno Spazio Lineare contengono lo stesso numero di vettori.

Laurea Magistrale in Navigazione
Applicazioni di Calcolo di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/24

$$x=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$ rispetto alla base standard $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=B_1$

$$x=\begin{pmatrix}10/3\\-5/3\\1/3\end{pmatrix}$$ rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}=B_2$

$$x=\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+\alpha_3\overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta}=\boxed{B_1^{-1}B_2}\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha}=\boxed{B_2^{-1}B_1}\,\vec{\beta}$$

$B_1\vec{\beta}=x=B_2\vec{\alpha}$ il vettore x è lo stesso

$$x=\beta_1\overrightarrow{v_1}+\beta_2\overrightarrow{v_2}+\beta_3\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \overrightarrow{v_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$$

$B_{new}^{-1}B_{old}$: matrice del cambiamento di base

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Dimensione di uno Spazio Lineare

La **dimensione** di uno Spazio Lineare X, denotata con **dim** X, *per definizione*, è il numero di vettori in qualunque base (**cardinalità della base**).

Per definizione, il sottospazio contenente solo il vettore nullo ha

$$\mathbf{dim}\,\{\underline{0}\} = 0.$$

Esistono spazi lineari con dimensione finita e spazi lineari con dimensione infinita.

Laurea Magistrale in Scienze ... Applicazioni di Calcolo Scientifico ... prof. Mariarosaria ... A.A. 2023/2024

Esempi

Π_n è lo Spazio Lineare dei polinomi reali al più di grado n. Esso contiene vettori come

$$\mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Una base di Π_n è $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$: quindi

$$\mathbf{dim}\ \Pi_n = n+1$$

$\mathscr{A}$ è lo Spazio Lineare delle funzioni reali che sono analitiche* in $x=0$. Esso contiene vettori come

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Una base di $\mathscr{A}$ consiste di tutte le funzioni potenza $\{x^k\}$: quindi

$$\mathbf{dim}\ \mathscr{A} = \infty$$

* una funzione si dice analitica in un punto se ivi è la somma di una serie di potenze

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Proprietà dei Sottospazi Lineari

- Se W è sottospazio dello spazio Lineare X, allora

$$\dim \boldsymbol{W} \leq \dim \boldsymbol{X}$$

- Se W è sottospazio di X e $\dim W = \dim X$ allora $W = X$.

- Se $\dim X = n$ e gli n vettori di X $\{\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(n)}\}$ sono linearmente indipendenti, allora essi formano una **base** per X.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

Esempi di basi e dimensione

- La base canonica di $\mathbb{R}^2$ è costituita dai vettori

$$\{(1,0)^\mathsf{T},\ (0,1)^\mathsf{T}\}:$$

quindi $\mathbf{dim}\,\mathbb{R}^2 = \mathbf{2}$.

- La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è costituita dai vettori

$$\{(1,0,\ldots,0)^\mathsf{T},(0,1,\ldots,0)^\mathsf{T},\ldots,(0,\ldots,0,1)^\mathsf{T}\}:$$

quindi $\mathbf{dim}\,\mathbb{R}^n = \boldsymbol{n}$.

- Una base per Π_2 è costituita dalle funzioni $\{1, x, x^2\}$:

quindi $\mathbf{dim}\,\Pi_2 = \mathbf{3}$.

- Se $M_{(2\times 2)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\}$ … una sua base è …

e quindi $\mathbf{dim}\, M_{(2\times 2)} = \ldots$

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione
Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS
prof. Mariarosaria Rizzardi
A.A. 2023/2024

I 4 Sottospazi Fondamentali associati ad una matrice $A(m\times n)$: dimensioni e basi

Spazio Nullo di una matrice A: $\mathcal{N}(A)$ sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{N}(A)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ Ax=\underline{0}\}\qquad \mathcal{N}(A)\subseteq\mathbb{R}^n$$

- $\dim\mathcal{N}(A)=n-r$ dove r è il rango di A.
- Una base si ottiene risolvendo il sistema $Ax=0$.

Spazio Nullo Sinistro di una matrice A: $\mathcal{N}(A^{\mathsf{T}})$ sottosp di $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{N}(A^{\mathsf{T}})=\{y\in\mathbb{R}^m:\ A^{\mathsf{T}}y=\underline{0}\}\qquad \mathcal{N}(A^{\mathsf{T}})\subseteq\mathbb{R}^m$$

- $\dim\mathcal{N}(A^{\mathsf{T}})=m-r$ dove r è il rango di A.
- una base si ottiene risolvendo il sistema $A^{\mathsf{T}}x=0$.

Appunti ... Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione ... Laboratorio di Calcolo Scientifico ... prof.ssa Mariarosaria Rizzardi 2023/2024

I 4 Sottospazi Fondamentali associati ad una matrice $A(m\times n)$: dimensioni e basi

Spazio delle Colonne (o ***Range***) ***di A:*** $\mathscr{R}(A)$ sottospazio di $\mathbb{R}^m$

$$\mathscr{R}(A) = \mathbf{span}\{A_{:,1}, A_{:,2}, \ldots, A_{:,n}\} \quad \mathscr{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

- $\dim \mathscr{R}(A) = r$ dove r è il rango di A.
- Una base è formata dalle colonne di A corrispondenti ai pivot.

Spazio delle Righe di A: $\mathscr{R}(A^\top)$ sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$$\mathscr{R}(A^\top) = \mathbf{span}\{A_{1,:}, A_{2,:}, \ldots, A_{n,:}\} \quad \mathscr{R}(A^\top) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- $\dim \mathscr{R}(A^\top) = r$ dove r is the rango di A.
- Una bas è formata dalle righe di A corrispondenti ai pivot.

Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie della Navigazione - Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS - prof.ssa Mariarosaria Rizzardi - 2023/2024

Esempi: Spazio Nullo e Spazio Nullo Sinistro

MATLAB

```
A=[1 0 1;5 4 9;2 4 6];
NA=null(A)
NA =
      0.57735
      0.57735
     -0.57735
disp(norm(NA))
        1
NAT=null(A')
NAT =
     -0.90453
      0.30151
     -0.30151
```

$\|\eta\|_2 = 1$

soluzione del sistema omogeneo

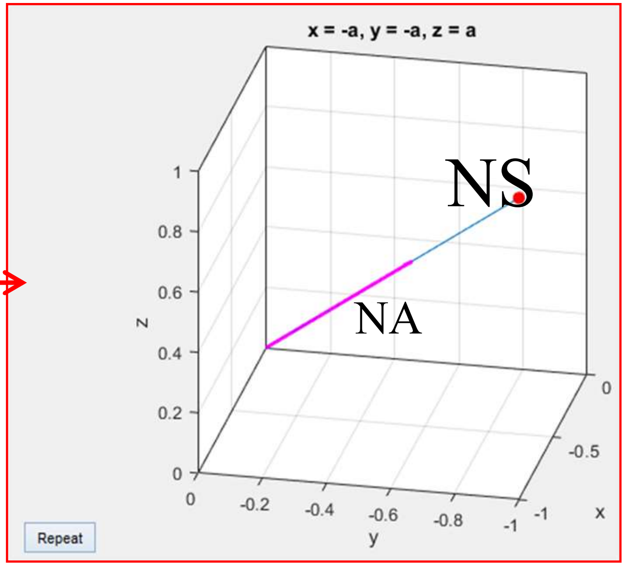
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Symbolic Math Toolbox

```
S=sym([1 0 1;5 4 9;2 4 6]);
NS=null(S)
NS =
   -1
   -1
    1
disp(norm(NS))
3^(1/2)
NST=null(S')
NST =
  3
 -1
  1
```

$\|\eta\|_2 \neq 1$

```
syms a real;     r = a*NS;
ezplot3(r(1),r(2),r(3),[0 1],'animate')
axis tight; axis equal; box on; hold on
h=quiver3(0,0,0,NA(1),NA(2),NA(3),1);
set(h,'Color','m','LineWidth',2)
view(-78,23)
```



Esempio: Spazio delle Colonne e Spazio delle Righe

MATLAB

```
A=[1 0 1;5 4 9;2 4 6];
disp(rank(A))
     2
RA = orth(A)
RA =
  -0.091519    0.41646
  -0.82791     0.47293
  -0.55335    -0.77646
RAT=orth(A')
RAT =
      -0.40119       0.71113
      -0.41527      -0.70301
      -0.81646       0.0081265
```

colonne ortonormali

```
RA'*RA
ans =
               1    1.1102e-16
 1.1102e-16                  1
norm(RA(:,1))
ans =
               1
```

Symbolic Math Toolbox

```
S=sym([1 0 1;5 4 9;2 4 6]);
disp(rank(S))
     2
RS=colspace(S)
RS =
[  1, 0]
[  0, 1]
[ -3, 1]
RST=colspace(S')
RST =
[ 1, 0]
[ 0, 1]
[ 1, 1]
```

```
RS'*RS
ans =
[10, -3]
[-3,  2]
norm(RS(:,1))
ans =
10^(1/2)
```

```
disp(rank([A RA double(RS) double(RS1)]))
  2
```

```
disp(rref(A))
     1     0     1
     0     1     1
     0     0     0
```

```
disp(A(:,1:2))
     1     0
     5     4
     2     4
```

La funzione **orth** può essere applicata anche ad una matrice simbolica, ma **colspace** non può essere applicata ad una matrice numerica.

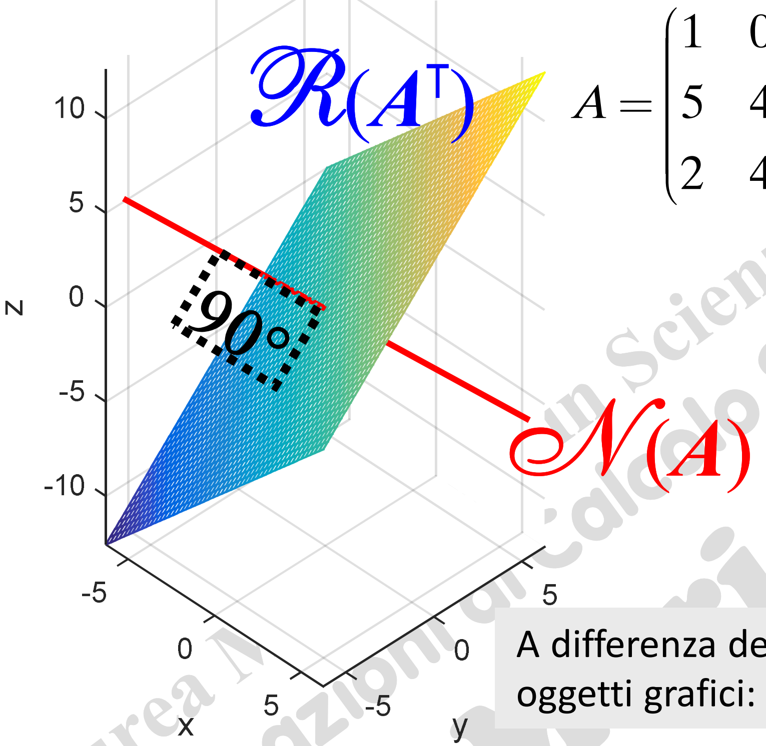
```
RS1=simplify(orth(S))
RS1 =
[30^(1/2)/30, -(7*330^(1/2))/330]
[ 30^(1/2)/6,        -330^(1/2)/66]
[30^(1/2)/15,  (8*330^(1/2))/165]
RS1'*RS1
ans =
[ 1, 0]
[ 0, 1]
norm(RS1(:,1))
ans =
1
```


(prof. M. Rizzardi)

Spazio Nullo e Spazio delle Righe

$$\mathscr{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = \underline{0}\} \qquad \mathscr{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\mathscr{R}(A^\top) = \mathbf{span}\{A_{1,:}, A_{2,:}, \ldots, A_{m,:}\} \qquad \mathscr{R}(A^\top) \subseteq \mathbb{R}^n$$



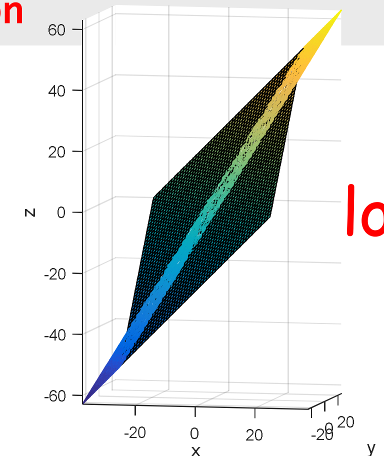
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 0 1;5 4 9;2 4 6];   S=rref(A)
S =
     1         0         1
     0         1         1
     0         0         0
syms a b real; p=A([1 2],:)'*[a b]';
fmesh(p(1),p(2),p(3),[-1 1]);
axis('equal')
N=null(A)*[-10 10]; % due punti su N(A)
line(N(1,:),N(2,:),N(3,:),'Color','r')
```

righe linearmente indipendenti

A differenza della funzione **plot**, **line** aggiunge la retta a gca senza cancellare gli altri oggetti grafici: non è necessario **hold on**

```
p=A([1 2],:)'*[a b]';
q=S([1 2],:)'*[a b]';
fmesh(p(1),p(2),p(3),[-1 1])
axis('equal'); hold on
fsurf(q(1),q(2),q(3),[-5 5])
```



$\mathscr{R}(A^\top)$

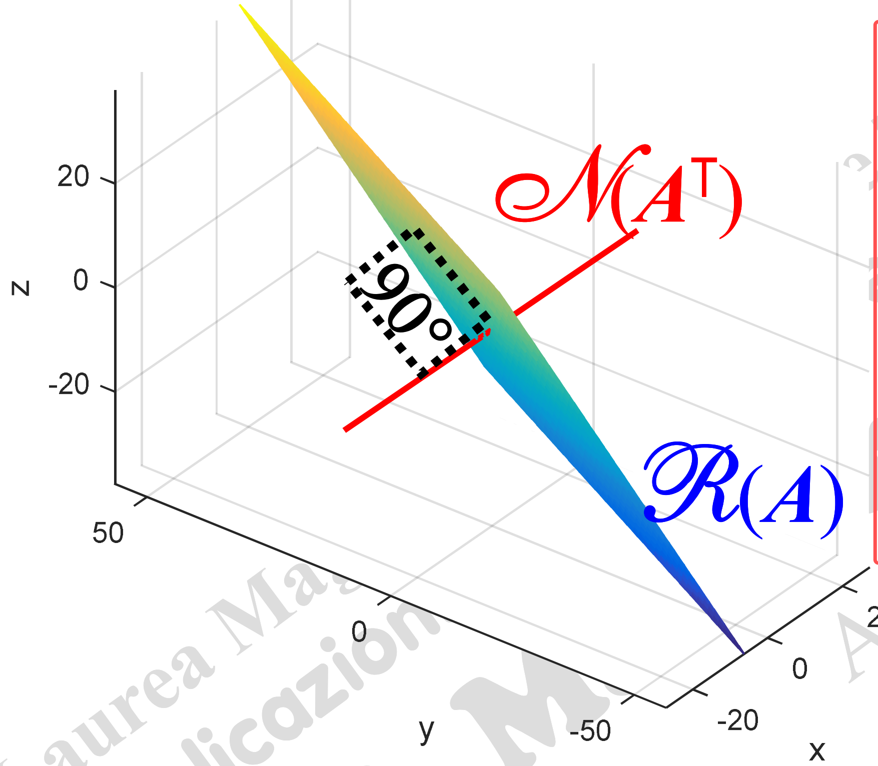
lo stesso piano!

$\mathscr{R}(S^\top)$

Spazio Nullo Sinistro e Spazio delle Colonne

$$\mathcal{N}(A^{\mathsf{T}}) = \{y \in \mathbb{R}^m : A^{\mathsf{T}} y = \underline{0}\} \qquad \mathcal{N}(A^{\mathsf{T}}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

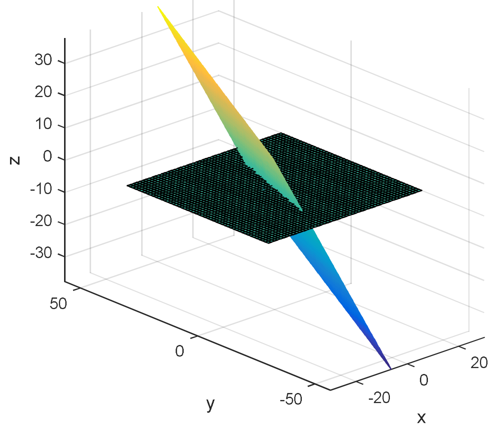
$$\mathcal{R}(A) = \textbf{span}\{A_{:,1}, A_{:,2}, \ldots, A_{:,m}\} \qquad \mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$




```
A=[1 0 1;5 4 9;2 4 6]; S=rref(A)
S =
     1     0     1
     0     1     1
     0     0     0
syms a b real; p=A(:,[1 2])*[a b]';
ezmesh(p(1),p(2),p(3)); axis('equal')
N=null(A')*[-10 10]; % due punti su N(Aᵀ)
line(N(1,:),N(2,:),N(3,:))
```

colonne linearmente indipendenti

```
p=A(:,[1 2])*[a b]';
q=S(:,[1 2])*[a b]';
fmesh(p(1),p(2),p(3));
axis('equal')
hold on; fsurf(q(1),q(2),q(3))
```



$\mathcal{R}(A)$

piani diversi!

$\mathcal{R}(S)$

(prof. M. Rizzardi)