Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

Corso di Laurea in Statistica e Informatica per l'Azienda, la Finanza e le Assicurazioni (SIAFA)

STATISTICA
II MODULO

Sergio LONGOBARDI
longobardi@uniparthenope.it

Stima intervallare

2

Stima intervallare

Il principale svantaggio della stima puntuale è legato alla casualità delle osservazioni campionarie Infatti, anche utilizzando uno stimatore con proprietà ottimali, la stima puntuale sulla base di un campione può essere molto diversa dal valore vero del parametro.

Per ovviare a questo limite si preferisce calcolare un intervallo di valori plausibili entro cui può essere compreso il parametro:

Stima intervallare

3

Stima intervallare

È un intervallo di valori plausibili costruito sulla base ("intorno") della stima puntuale a cui associamo un determinato livello di affidabilità o fiducia (generalmente fissato al 90%, 95% o 99%)

Per esempio, considerando la media, mediante la stima intervallare si è in grado calcolare due valori soglia tali che:

$$P\ (L_1 \leq \mu \leq L_2)=0{,}95$$

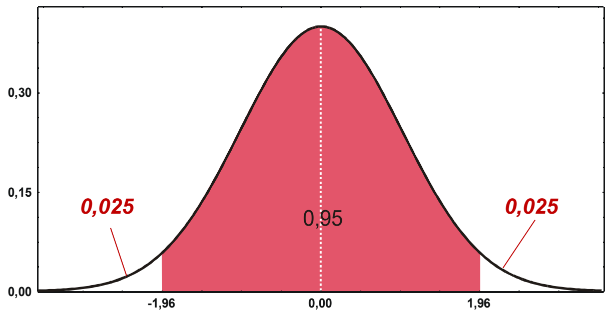
4

Stima intervallare

Considerando la stima intervallare della media si parte dalla normale standardizzata.

In particolare considerando le tavole della funz. di ripartiz. della Z si può osservare che:

P(-1,96 ≤ Z ≤ 1,96) = 0,95



5

Stima intervallare

Considerando che la media campionaria si distribuisce normalmente:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Si ricava che:

$$P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) = 0{,}95$$

$$= P(-1{,}96 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le 1{,}96) = 0{,}95$$

$$= P(\bar{X} - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$$

6

Stima intervallare della media

Quindi sulla base della stima campionaria della media e conoscendo la varianza della popolazione si è in grado di calcolare l'intervallo di confidenza di μ con una probabilità del 95% con la seguente formulazione:

$$P(\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$$

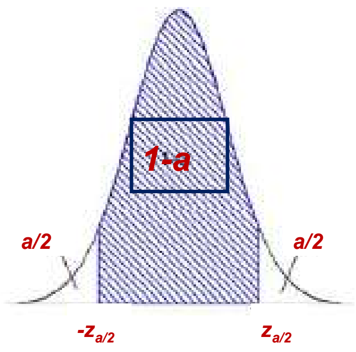
7

Stima intervallare

In generale il grado di affidabilità della stima è pari ad un valore 1-α ***(livello di confidenza)***.

Per cui si calcolerà la probabilità che

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-a$$



8

Stima intervallare della media (varianza nota)

Sia X una v.c. che rappresenta un carattere osservato su una popolazione. Supponiamo che la v.c. sia distribuita come una Normale con varianza nota. Allora sappiamo che:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le +z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le +z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le +z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

9

Stima intervallare della media (varianza nota)

Dato un campione casuale estratto da una popolazione Normale con media ignota e varianza nota, l'intervallo di confidenza per la media della popolazione al livello di confidenza 1-α è:

$$\left[\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Esempio

Si calcoli l'intervallo di confidenza di μ sapendo che la media calcolata su un campione di n=10 è pari a 4,924, mentre la varianza della popolazione è uguale a 9. Utilizzare un livello di confidenza pari al 99%.

10

Stima intervallare della media (varianza nota)

$$\bar{x} = 4{,}924 \quad n = 10 \quad \sigma^2 = 9 \quad 1-\alpha = 0{,}99$$

Dalle tavole della normale standardizzata si ricava che per α =0,01:

$$z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}576$$

Di conseguenza:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$$

$$P[2{,}4802 \le \mu \le 7{,}3678] = 0{,}99$$

11

Stima intervallare

La ***lunghezza*** dell'intervallo di confidenza si ricava dalla differenza tra estremo superiore e estremo inferiore:

Lunghezza= $2z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$

Dipende da:

1. la dimensione del campione

2. il livello di confidenza

3. la varianza della popolazione

12

Stima intervallare della media (varianza nota)

Intervenendo sulla dimensione del campione o sul livello di confidenza si può aumentare o diminuire la lunghezza dell'intervallo. Una volta fissati questi due elementi al variare dei campioni estratti, la lunghezza degli intervalli corrispondenti rimane costante.

Se ***n* aumenta** ➡ l'intervallo di confidenza si "restringe"

Se ***1-α*** aumenta ➡ l'intervallo di confidenza si "allarga"

Se ***σ* aumenta** ➡ l'intervallo di confidenza aumenta

13

Stima intervallare della media (varianza ignota)

Sia *X* una v.c. che rappresenta un carattere osservato su una popolazione. Supponiamo che la v.c. sia distribuita come una Normale con ***media e varianza ignota.***

Per stimare la varianza della popolazione si utilizza lo stimatore varianza campionaria corretta:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Ma standardizzando la media mediante la varianza campionaria si ottiene una v.c. T.

$$T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$$

Che si distribuisce come una v.c. ***t-Student*** con n-1 gradi di libertà.

14

T di student

La v.c. t di Student si ottiene dal rapporto tra una v.c. Z e la radice quadrata di una v.c. Chi-quadrato divisa per i propri gradi di libertà

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{g}}} \qquad T \sim student(g)$$

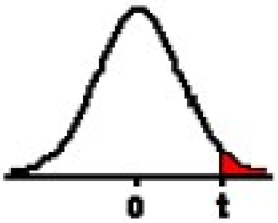
dove:

$$Z \sim N(0,1) \qquad Y \sim \chi^2_g$$

15

T di student

Sulla prima colonna il numero dei gradi g di libertà (g) Sulla prima riga l'area alla destra del valore t cercato (area rossa nel Disegno) All'incrocio si legge il valore t della corrispondente distribuzione che lascia alla sua destra tale area



g\p	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,0005
1	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,7649	1,6377	2,3534	3,1825	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,7407	1,5332	2,1318	2,7765	$\boxed{3,7470}$	4,6041	8,6103
5	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
∞ (infinito)	0,6745	1,2816	1,6449	1,9600	2,3264	2,5758	3,2905

16

Stima intervallare

Riepilogando

Se la varianza della popolazione non è nota si utilizzerà una stima campionaria della varianza indicata con S^{2}.

L'intervallo di confidenza della media sarà quindi

$$P\left[\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Con ***lunghezza*** pari a:

$$2t_{\alpha/2,n-1}\left(S/\sqrt{n}\right)$$

17

Stima intervallare (distribuzione ignota)

Quando ***non è nota la popolazione*** ma il campione ha una dimensione sufficientemente grande, possiamo considerare un'approssimazione dell'intervallo di confidenza per la media ottenuta attraverso il ***teorema del limite centrale.***

Per n sufficientemente grande possiamo utilizzare il seguente intervallo di confidenza a livello :

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

18

Qualche esercizio…

Esercizio 4.2.1 (Quintano- Castellano pag.119)

Da un campione di n = 50 famiglie è risultato che la spesa media mensile per divertimenti è $\bar{x}$= $45. Si sa che la varianza dell'universo, calcolata in indagini passate, è 128. Assumendo una distribuzione normale, trovare un intervallo di confidenza al 90% per la spesa media di tutte le famiglie.

Soluzione

α = 0,10; α / 2 = 0,05;

Dalle tavole si desume che $z_{0,05}$ = *1,645*

Infatti   *P(z* > 1,645) = 0,05

Qualche esercizio…

$$P\left(\bar{x} - \frac{z_{0,05} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} < \mu_x < \bar{x} + \frac{z_{0,05} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}\right) = 0,90$$

$$P\left(45 - \frac{1,645 \cdot \sqrt{128}}{\sqrt{50}} < \mu_x < 45 + \frac{1,645 \cdot \sqrt{128}}{\sqrt{50}}\right) = 0,90$$

$$P(45 - 2,632 < \mu_x < 45 + 2,632) = 0,90$$

$$P(42,368 < \mu_x < 47,632) = 0,90$$

Qualche esercizio…

Esercizio n. 3 (pag.493)

Per un campione di 20 automobilisti viene rilevata la velocità in un certo tratto di strada. La media aritmetica delle velocità su quel tratto risulta di 101 km orari, con uno scarto quadratico medio di 6,5 km orari.

Costruire un intervallo di confidenza per la velocità media delle auto che percorrono quel tratto:

1) al 95%
2) al 99%

21

Qualche esercizio…

L'intervallo si costruisce sulla base della distribuzione *t* di Student con *n* – 1 = 20 – 1 = 19 gradi di libertà. Essendo il livello di confidenza pari al 95%, i valori della *t* risultano:

$$t^*_{0,025;19} = 2{,}093$$

L'intervallo risulta:

$$\mathrm{P}\left(\bar{x} - t_{\alpha/2;n-1}\, s_x / \sqrt{n-1} < \mu_x < \bar{x} + t_{\alpha/2;n-1}\, s_x / \sqrt{n-1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left(101 - 2{,}093 \cdot 6{,}5/\sqrt{19} < \mu_x < 101 + 2{,}093 \cdot 6{,}5/\sqrt{19}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(101 - 3{,}1211 < \mu_x < 101 + 3{,}1211\right) = 0{,}95$$

$$P\left(97{,}8789 < \mu_x < 104{,}1211\right) = 0{,}95$$

22

Qualche esercizio…

Per un livello di confidenza pari al 99%, dato il valore della t:

$$t^*_{0,05;19} = 2{,}8609$$

$$\mathrm{P}\left(101 - 2{,}8609 \cdot 6{,}5/\sqrt{19} < \mu_x < 101 + 2{,}8609 \cdot 6{,}5/\sqrt{19}\right) = 0{,}99$$

$$P\left(101 - 4{,}2662 < \mu_x < 101 + 4{,}2662\right) = 0{,}99$$

$$P\left(96{,}7338 < \mu_x < 105{,}2662\right) = 0{,}99$$

23

Stima intervallare di una proporzione

Quando la popolazione è riferita a un carattere che può assumere solo due modalità (popolazione Bernoulliana), si può calcolare l'intervallo di confidenza per una ***proporzione π***, ad esempio, la proporzione di maschi nella popolazione.

Uno stimatore corretto ed efficiente di π è la media campionaria $\overline{X}$

$$E\left(\overline{X}\right) = \pi \qquad V\left(\overline{X}\right) = \pi(1 - \pi)/n$$

24

Stima intervallare di una proporzione

$$E(\overline{X}) = \pi \qquad\qquad V(\overline{X}) = \pi(1-\pi)/n$$

$$\overline{X} \sim N(\pi\,,\pi(1-\pi)/n)$$

Dal teorema del limite centrale sappiamo che al crescere della dimensione campionaria la distribuzione della $\overline{X}$ tende alla Normale, pertanto

$$Z = \frac{\overline{X}-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \sim N(0\,,1)$$

25

Stima intervallare di una proporzione

Perché la media campionaria può essere considerata una stima puntuale della proporzione?

Consideriamo una v.c. bernoulliana relativa ad un processo di produzione di bulloni.
La v.c. assumerà valori pari a 1 se il bullone è difettoso e valore pari a 0 se il bullone rispetta gli standard.

Osservando un campione di n=10 pezzi, si ottengono i seguenti dati:

0,1,1,1,0,1,0,1,1,0

La media campionaria sarà pari a:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(0+1+1+1+0+1+0+1+1+0) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Cioè la stima della proporzione di pezzi difettosi

26

Stima intervallare di una proporzione

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \leq +z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

$$=P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \leq \pi \leq \bar{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$$

Gli estremi dell'intervallo dipendono ancora dal parametro incognito e dunque devono essere sostituiti con degli stimatori, ottenendo il seguente intervallo di confidenza:

$$\left[\bar{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

27

Qualche esercizio…

In una certa regione viene osservato un campione casuale di 120 persone, di cui 78 sono fumatori. Si vuole ottenere una stima intervallare, con un livello di confidenza del 95%, della proporzione di fumatori presenti nella regione

Quindi
n=120 **$\bar{X}$=78/120=0,65** **1-a=95%** **$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$**

$$=P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq \pi \leq \bar{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)=0{,}95$$

$$=P\left(0{,}65-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}65(1-0{,}65)}{120}} \leq \pi \leq 0{,}65+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}65(1-0{,}65)}{120}}\right)=0{,}95$$

$$P(0{,}56 \leq \pi \leq 0{,}74)=0{,}95$$

28

Qualche esercizio…

Esercizio n. 4 (pag.494)

Dalla popolazione degli studenti di una città è stato estratto un campione casuale di 500 studenti e si è rilevato che 150 studenti del campione stesso non utilizzano i mezzi pubblici per andare a scuola. Si chiede di costruire un intervallo di confidenza (al livello di fiducia del 95%) della percentuale di studenti che non usano i mezzi pubblici.

Soluzione esercizio n. 4

p= 150/500 =0,3 $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

29

Qualche esercizio…

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Non essendo noto π, per determinare σ_p, si utilizza l'informazione campionaria disponibile tramite *p*:

$$P\left(0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3(0,7)}{500}} < \pi < 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3(0,7)}{500}}\right) = 0,95$$

$$P\left(0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3(0,7)}{500}} < \pi < 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3(0,7)}{500}}\right) = 0,95$$

$$P(0,2598 < \pi < 0,3402) = 0,95$$

30

Determinazione numerosità campionaria

Nella maggior parte degli studi statistici si cerca di programmare in anticipo la dimensione del campione da indagare in relazione al grado di precisione delle stime che si desidera raggiungere.

Nel caso degli intervalli di confidenza, per esempio, si stabilisce a priori l'ampiezza dell'intervallo che si desidera ottenere e si stabilisce n in funzione di questa ampiezza.

31

Determinazione numerosità campionaria

Ipotesi I: intervallo di confidenza della media

Mediante la stima intervallare siamo in grado di affermare che l'intervallo di confidenza della media, con una prob. pari a 1-a, è costituito da:

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Quindi si aggiunge e si sottrae alla media campionaria una quantità δ

$$\overline{X} \pm \delta \qquad \delta = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

32

Determinazione numerosità campionaria

$$\bar{X} \pm \delta \qquad \delta = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

Quindi se si stabilisce a priori il valore di δ (semi lunghezza dell'intervallo) si può ricavare di conseguenza il valore di n

$$\delta = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\delta} \right)^2$$

33

Determinazione numerosità campionaria

$$\delta = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma \cdot z_{\alpha/2}} = \frac{1}{\delta}$$

$$= \sqrt{n} = \frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{\delta}$$

$$= n = \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\delta} \right)^2$$

34

Determinazione numerosità campionaria

Ipotesi II: intervallo di confidenza della proporzione

Mediante la stima intervallare siamo in grado di affermare che l'intervallo di confidenza di una proporzione con una prob. pari a 1-a, è costituito da:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]$$

Quindi si aggiunge e si sottrae alla media campionaria una quantità δ

$$\bar{X} \pm \delta \qquad \delta = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

35

Determinazione numerosità campionaria

$$\bar{X} \pm \delta \qquad \delta = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

Quindi se si stabilisce a priori il valore di δ (semi lunghezza dell'intervallo) si può ricavare di conseguenza il valore di n

$$\delta = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

$$n = z^2_{a/2}\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{\delta^2}$$

36

Determinazione numerosità campionaria

$$\delta = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$$

$$\frac{\delta}{z_{\alpha/2}} = \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$$

$$\frac{\delta^2}{z^2{}_{\alpha/2}} = \frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}$$

$$\frac{n}{\overline{X}(1-\overline{X})} = \frac{z^2{}_{\alpha/2}}{\delta^2}$$

$$n = z^2{}_{a/2}\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{\delta^2}$$

37

Variabile casuale Chi-quadrato

La v.c. Chi-quadrato è una distribuzione asimmetrica, continua e definita per valori reali non negativi.

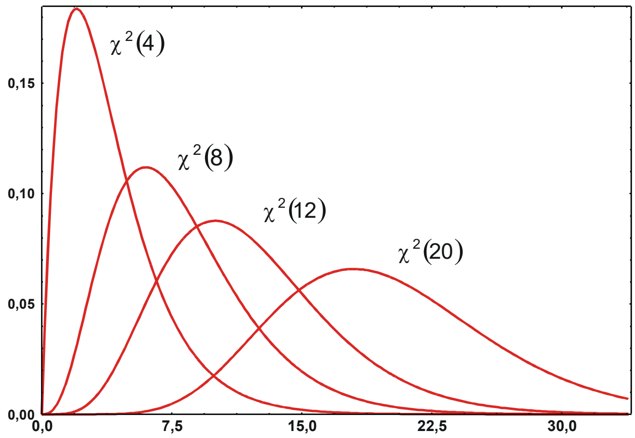
La funzione di densità dipende da un unico parametro, chiamato gradi di libertà, che è un intero positivo che possiamo indicare con il simbolo g.

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{g}{2}}\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} x^{\frac{g}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{per } x \geq 0$$

$$E(X) = g \qquad V(X) = 2g$$

38

Variabile casuale Chi-quadrato



All'aumentare di g la distribuzione tende ad una Normale

39

Stima intervallare della varianza

Si consideri una popolazione Normale con media e varianza entrambe ignote.
Come stimatori puntuali dei due parametri si possono utilizzare:

$$\bar{X} \Rightarrow \mu \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2$$

Si può dimostrare che la v.c.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Si distribuisce come una v.c. chi-quadrato con n-1 gradi di libertà.

40

Stima intervallare della varianza

Di conseguenza:

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
$$= P\left((n-1)S^2 / \chi^2_{\alpha/2} \le \sigma^2 \le (n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha/2}\right)$$

E quindi l'intervallo per la varianza al livello 1-a : :

$$\left[(n-1)S^2 / \chi^2_{\alpha/2}, (n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha/2}\right]$$

41

Stima intervallare della varianza

$$\left[(n-1)S^2 / \chi^2_{\alpha/2}, (n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha/2}\right]$$

Con $\chi^2_{a/2}$ e $\chi^2_{1-a/2}$ si intendono dei valori reali tali che:

$$P(\chi^2 > \chi^2_{a/2}) = a/2$$

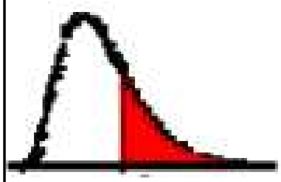
$$P(\chi^2 > \chi^2_{1-a/2}) = 1-a/2$$

42

Stima intervallare della varianza

(Area sulla coda destra, da χ^2 all'infinito)

g\p	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,1015	0,4549	1,3233	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,3863	2,7726	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	10,5966
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3519	0,5844	1,2125	2,3660	4,1083	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8382
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,9226	3,3567	5,3853	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8603
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,6746	4,3515	6,6257	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,4546	5,3481	7,8408	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
7	0,9893	1,2390	1,6899	2,1674	2,8331	4,2549	6,3458	9,0372	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	1,3444	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	5,0706	7,3441	10,2189	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550
9	1,7349	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,8988	8,3428	11,3888	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5894
10	2,1559	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,7372	9,3418	12,5489	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1882



χ^2_a

Sulla prima colonna si legge il numero dei gradi di libertà (g)
Sulla prima riga l’area alla destra del valore chi quadrato cercato (area rossa nel disegno)
All’incrocio si legge il valore chi-quadrato della corrispondente distribuzione che lascia alla sua destra tale area
Il valore della distribuzione chi quadrato con g=6 che lascia alla sua destra un’area pari a 0,025 è 14,4494:

$P(\chi^2_6 > 14{,}4494) = 0{,}025$

Stima intervallare della varianza

Si consideri una popolazione Normale con media e varianza entrambe ignote.
Estraendo un campione di ampiezza n=15 si ricava una media campionaria pari a 2,62 ed una varianza campionaria corretta pari a 0,147, Si calcoli un intervallo di confidenza della varianza ad un livello di confidenza pari al 0,95.

Si calcolano i percentili della chi quadrato sulle tavole per a=0,05 e g=14:

$P(\chi^2 > \chi^2_{0,025}) = 0{,}025$ dalle tavole risulta che $\chi^2_{0,025} = 26{,}12$

$P(\chi^2 > \chi^2_{1-0,025}) = 0{,}975$ dalle tavole risulta che $\chi^2_{0975} = 5{,}63$

$$\mathrm{P}\left[(n-1)S^2 / \chi^2_{\alpha/2} \le \sigma^2 \le (n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$P(14 \cdot 0{,}147 / 26{,}12 \le \sigma^2 \le 14 \cdot 0{,}147 / 5{,}63) = 0{,}95$$

$$P(0{,}079 \le \sigma^2 \le 0{,}366) = 0{,}95$$

44