Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Corso di Topografia e Idrografia

Materiale integrativo - MI-2

Richiami sulla risoluzione dei triangoli

Claudio Parente

Introduzione

In queste slide si riprendono alcuni concetti a supporto e integrazione di quanto riportato nel materiale relativo alle lezioni del corso.

La finalità è quella di fornire all'allievo una serie di riferimenti e note esplicative che fanno risparmiare la ricerca su libri di testo e appunti.

L'argomento trattato è quello della risoluzione dei triangoli, argomento di trigonometria piana, argomenti che fanno parte delle conoscenze di base di Matematica, ma che assumono importanza fondamentale per le appicazioni della Topografia.

Proprietà dei triangoli

Gli elementi di un triangolo qualunque sono i tre lati e i tre angoli. Per convenzione i vertici di un triangolo sono indicati con lettere maiuscole, in genere A, B, C,

mentre con le lettere minuscole corrispondenti, a, b, c, si indicano i lati opposti ai

rispettivi vertici (FIGURA 1). Infine, con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α, β, γ vengono indicate le ampiezze degli angoli con i vertici rispettivamente in A, B, C.

La geometria ci fornisce le seguenti proprietà fondamentali relative agli elementi di un triangolo qualunque:

Proprietà dei triangoli

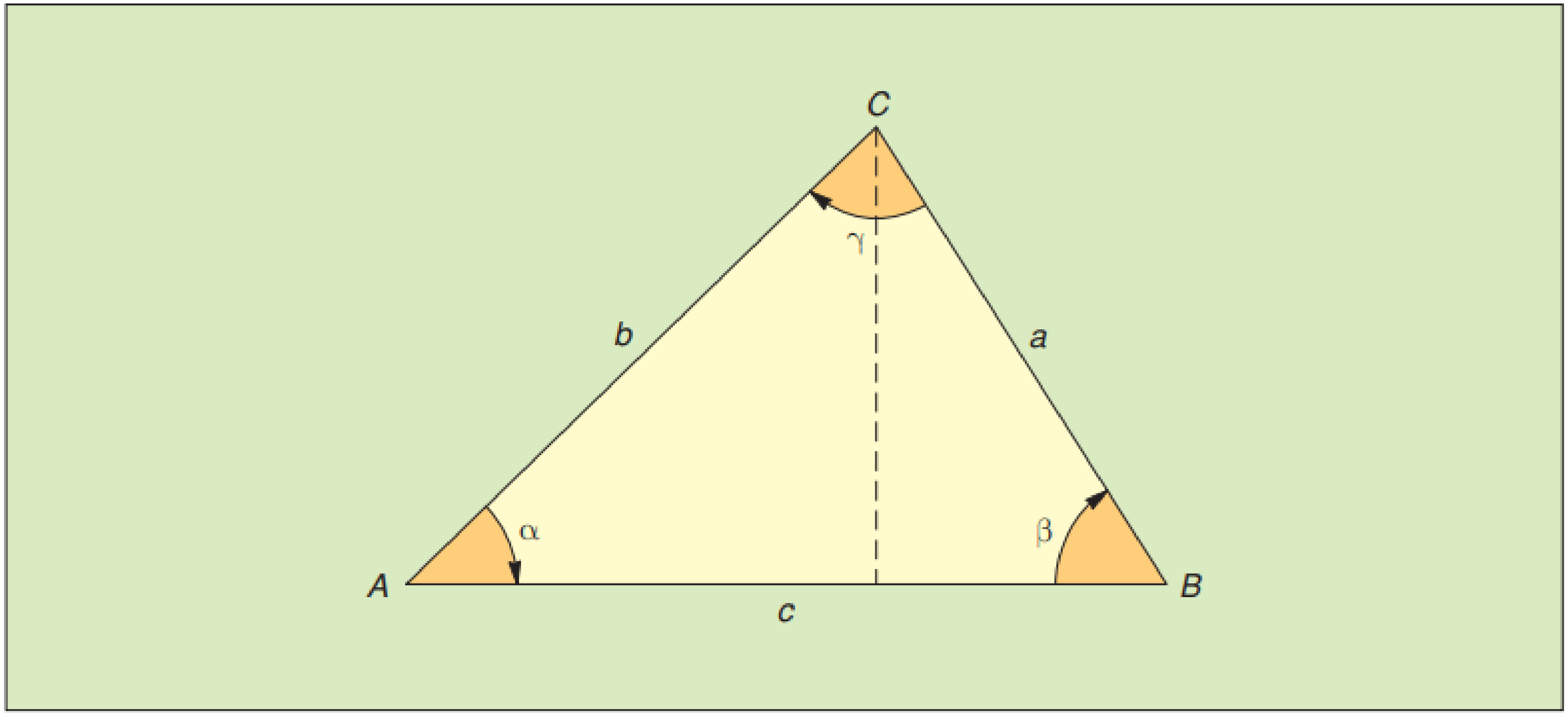


Figura 1

Proprietà dei triangoli

1. La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale all'angolo piatto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^c$$

2. In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (per esempio, $a < c + b$ e anche $a > c - b$).
3. In ogni triangolo la relazione di uguaglianza o disuguaglianza che intercorre tra due lati vale anche per gli angoli rispettivamente opposti (per esempio, se $a > b$ sarà anche $\alpha > \beta$).

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

Obiettivo della trigonometria è quello di calcolare le misure degli elementi incogniti di un triangolo, quando siano dati tre elementi, tra i quali almeno uno deve essere un lato.

Per raggiungere questo obiettivo, si devono stabilire le relazioni che legano le misure dei lati del triangolo con i valori delle funzioni goniometri che dei suoi angoli.

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

In trigonometria si utilizzano formule per la risoluzione dei triangoli rettangoli. Peraltro, si potrebbero utilizzare tali relazioni anche per risolvere un triangolo qualunque; in effetti, con ciascuna delle tre altezze di un triangolo qualunque, si individuano due triangoli rettangoli (FIGURA 1), i quali, risolti separatamente, permettono di definire gli elementi incogniti

del triangolo qualunque.

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

Tuttavia questo modo di procedere, nel caso dei triangoli qualunque, è poco conve niente. In effetti esistono i seguenti teoremi fondamentali con i quali si stabiliscono le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo qualunque; con essi si possono risolvere i triangoli in modo più rapido e più semplice:

- teorema dei seni;
- teorema di Carnot;
- teorema di Nepero;
- formule di Briggs.

Costruzione del cerchio circoscritto

Consideriamo il triangolo qualunque di vertici ABC. Esso è sempre inscrivibile in un cerchio, che viene chiamato **circoscritto**, il cui centro O è il punto di intersezione degli **assi** dei tre lati (▶FIGURA 2*a*). Allora ogni lato può essere considerato come una **corda** della circonferenza circoscritta, e ogni angolo come **angolo alla circonferenza** che insiste sulla corda coincidente con il lato a esso opposto.

Costruzione del cerchio circoscritto

Da un vertice qualunque del triangolo, per esempio dal vertice B, tracciamo il **diametro** $2R$ del cerchio circoscritto (▶FIGURA **2**b); indichiamo con A' il punto d'incontro tra questo diametro e la circonferenza. Congiungendo A' con i vertici C e A, si ottengono i due triangoli rettangoli $A'AB$ e $A'CB$ (gli angoli $A'\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}A'$ sono **retti** in quanto angoli alla circonferenza sottesi a un arco pari alla semicirconferenza, il cui *angolo al centro* è piatto). Inoltre l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A'}C$ è uguale a quella dell'angolo α, in quanto entrambi sono angoli alla circonferenza sottesi allo stesso arco $\widehat{BC}$ di corda a; per le stesse ragioni si ha che $A\widehat{A'}B = \gamma$.

Costruzione del cerchio circoscritto

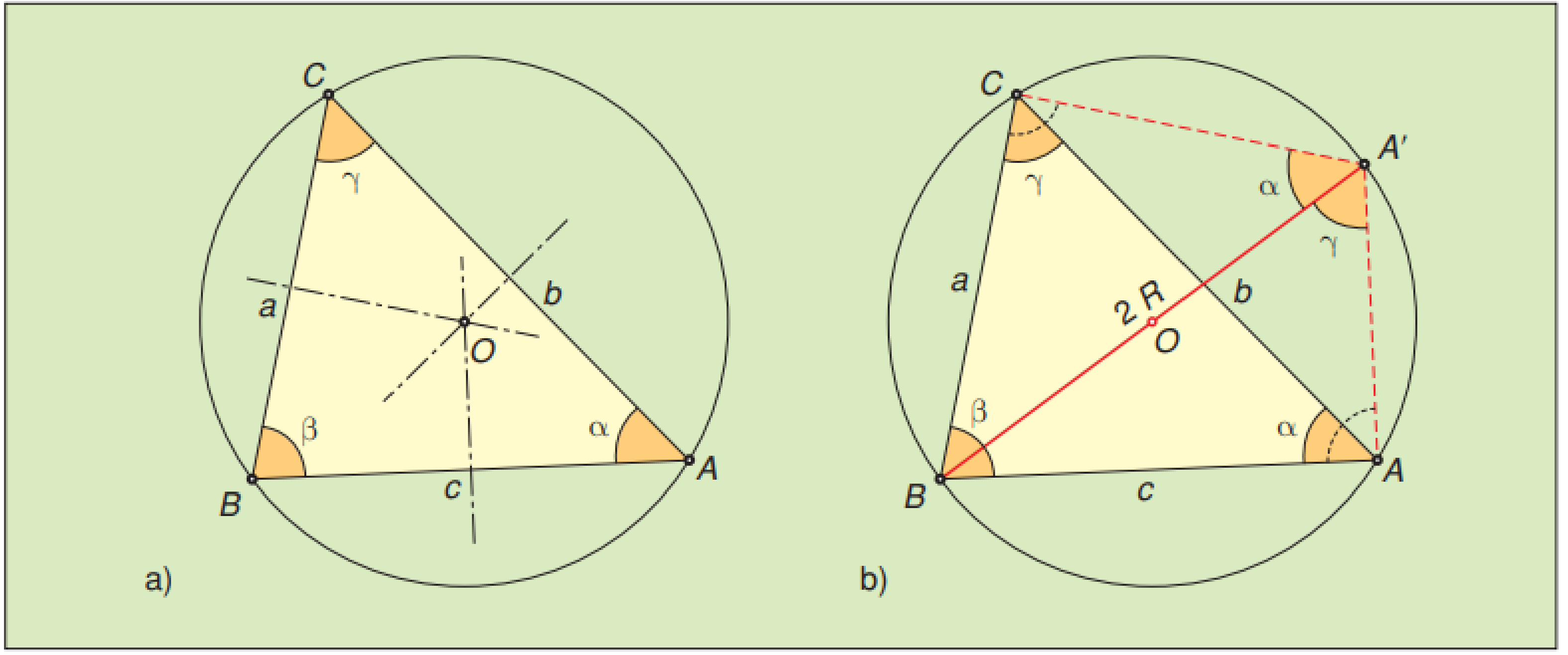


Figura 2

Costruzione del cerchio circoscritto

Considerando i triangoli rettangoli definiti in precedenza, possiamo esprimere per ciascuno di essi l'ipotenusa $\overline{BA'} = 2R$ che hanno in comune:

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}$$

Se poi, in modo del tutto analogo, tracciamo il diametro $2R$ del cerchio circoscritto, passante per il vertice A (o il vertice C), e ripetiamo le considerazioni geometriche sopra sviluppate, possiamo scrivere:

$$2R = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}$$

Enunciato del teorema dei seni

Combinando le relazioni precedentemente scritte, si ottengono facilmente le seguenti:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2R \qquad (1)$$

Le relazioni (1) sintetizzano il **teorema dei seni**, il cui enunciato può essere così formulato:

in un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è **costante** ed è uguale al diametro del **cerchio circoscritto**.

Il teorema dei seni è stato dimostrato considerando un triangolo *acutangolo* (con centro O interno al triangolo), tuttavia esso rimane perfettamente valido anche per triangoli *ottusangoli* (con centro O esterno al triangolo), per i quali si omette la dimostrazione, del tutto analoga a quella appena illustrata.

Enunciato alternativo del teorema dei seni

Nelle relazioni (1), permutando i medi, si possono scrivere le stesse relazioni in una forma diversa ottenendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma} \tag{1'}$$

Quindi il teorema dei seni può anche essere formulato nel seguente modo alternativo:

in un triangolo il rapporto tra due lati è uguale al rapporto tra i valori del seno degli angoli opposti.

Il teorema dei seni appare la prima volta in applicazioni geometriche di matematici arabi nel X sec., ma solo nel XIV sec. il matematico francese **L.B. Gerson** fornisce la dimostrazione che è stata descritta, basata sul cerchio circoscritto. Nel Settecento, poi, anche il matematico svizzero **Leonardo Eulero**, nella sua straordinaria produzione scientifica, affronta la dimostrazione del teorema dei seni dandone una diversa ulteriore versione.

Teorema di Carnot (o del coseno)

Con il teorema dei seni, il teorema di Carnot è di fondamentale importanza per la risoluzione trigonometrica dei problemi geometrici. Esso, di fatto, rappresenta l'estensione del teorema di Pitagora per i triangoli qualunque.

Consideriamo il triangolo ABC di ▶FIGURA **3** e tracciamo l'altezza CH relativa al lato c. Essa divide il triangolo ABC nei due triangoli rettangoli BCH e ACH. Applicando il teorema di Pitagora al primo di questi, si ha:

$$a^2 = HC^2 + HB^2$$

Considerando poi il triangolo rettangolo ACH, possiamo scrivere:

$$HC = b \operatorname{sen} \alpha \qquad \text{e} \qquad HB = c - b \cos \alpha$$

Con ciò la precedente relazione diventa:

$$a^2 = (b \operatorname{sen} \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2$$

$$a^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + c^2 + b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Teorema di Carnot (o del coseno)

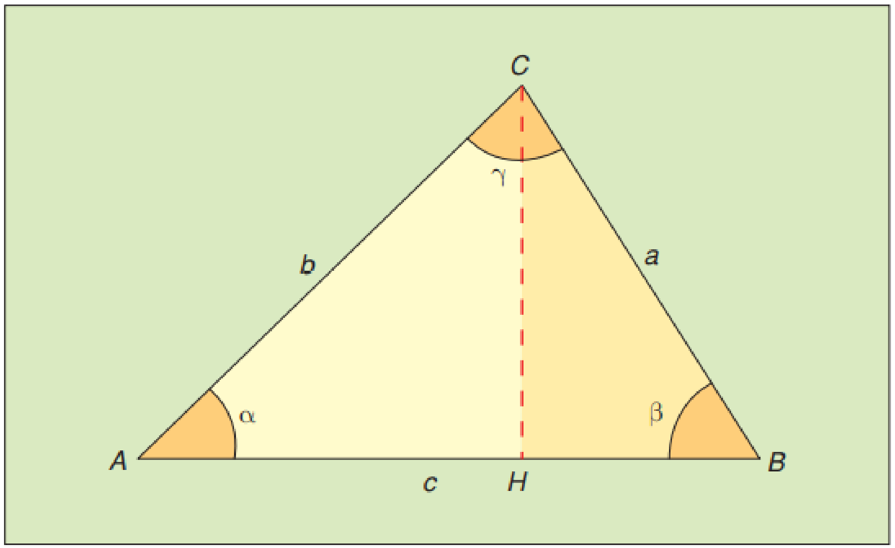


Figura 3

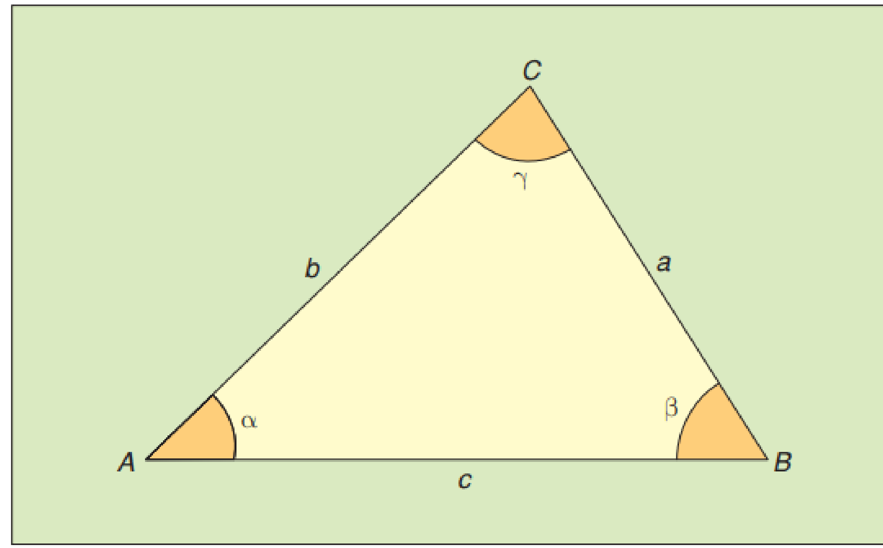


Figura 4

Teorema di Carnot (o del coseno)

In base alla relazione fondamentale della trigonometria si ha:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \qquad (2)$$

Ripetendo il ragionamento con le altre altezze del triangolo si ottiene facilmente:

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}} \qquad (2')$$

Teorema di Carnot (o del coseno)

Sulla base delle (2) e (2′) possiamo formulare il seguente enunciato del teorema di Carnot:

in un triangolo, il quadrato della lunghezza di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati, dedotta del doppio prodotto delle lunghezze di questi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Il teorema di Carnot può anche venire espresso in un'altra forma, altrettanto importante, ottenuta dalle (2) e (2′) isolando i *coseni*:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad (3)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Teorema di Carnot (o del coseno)

Il teorema di Carnot era poco usato fino ad alcuni anni or sono, in quanto non esprimibile in *forma logaritmica* e perciò difficoltoso da utilizzare senza appropriati strumenti di calcolo. Al contrario, con l'avvento delle calcolatrici e con il conseguente superamento di ogni problema connesso allo sviluppo di qualsiasi calcolo, il teorema di Carnot è il più utilizzato per risolvere molti problemi trigonometrici.

Questo teorema viene attribuito al matematico francese **Lazare Carnot** (1753-1823), padre del più noto fisico Sadi Carnot. Tuttavia, in realtà, sembra che questo teorema sia da ascrivere al matematico e uomo politico francese **François Viète** (1545-1603), fondatore del calcolo algebrico letterale.

Criteri per risolvere i triangoli qualunque

I teoremi visti nel paragrafo precedente, opportunamente utilizzati, permettono la *risoluzione dei triangoli*, cioè il calcolo degli **elementi incogniti** di un triangolo, conoscendo **tre** di essi, almeno uno dei quali deve essere un **lato** (o, quantomeno, un **elemento lineare**).

In effetti la conoscenza dei soli angoli **non è sufficiente** per determinare i tre lati incogniti, in quanto esistono infiniti triangoli, **simili** tra loro, che hanno gli stessi angoli.

Prima di procedere alla risoluzione dei triangoli, come peraltro di ogni figura piana, è bene **controllare** che gli elementi assegnati siano compatibili con il problema; allo scopo occorre verificare le proprietà generali enunciate all'inizio del paragrafo 1.

Inoltre è sempre raccomandabile far precedere al calcolo analitico eseguito con la calcolatrice, la **costruzione grafica** della figura assegnata in scala opportuna. Ciò permetterà di valutare meglio il problema, di evitare grossolani errori di interpretazione, e anche un primo rapido controllo dei calcoli effettuati.

In relazione ai dati assegnati, nella risoluzione dei triangoli si riconoscono **quattro casi** fondamentali, che esamineremo nel seguito.

Caso 1 (noti due angoli e un lato)

Dato il triangolo ABC di ▶FIGURA **5**, supponiamo di conoscere, per esempio, gli angoli α e β e la misura del lato a. Vogliamo determinare gli elementi incogniti: γ, b e c.

Si ha subito:

$$\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$$

I lati b e c si ricavano applicando due volte il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \quad \text{e} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

da cui segue:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Caso 1 (noti due angoli e un lato)

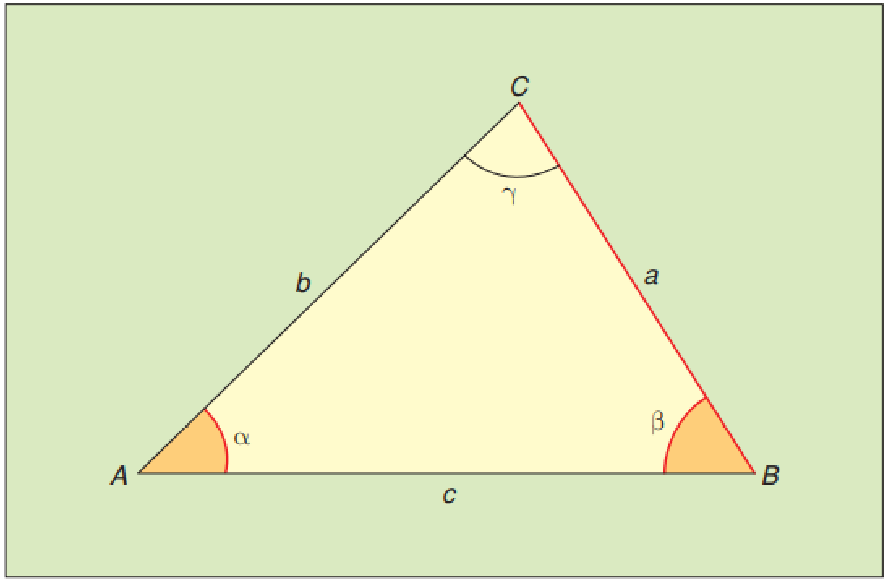


Figura 5

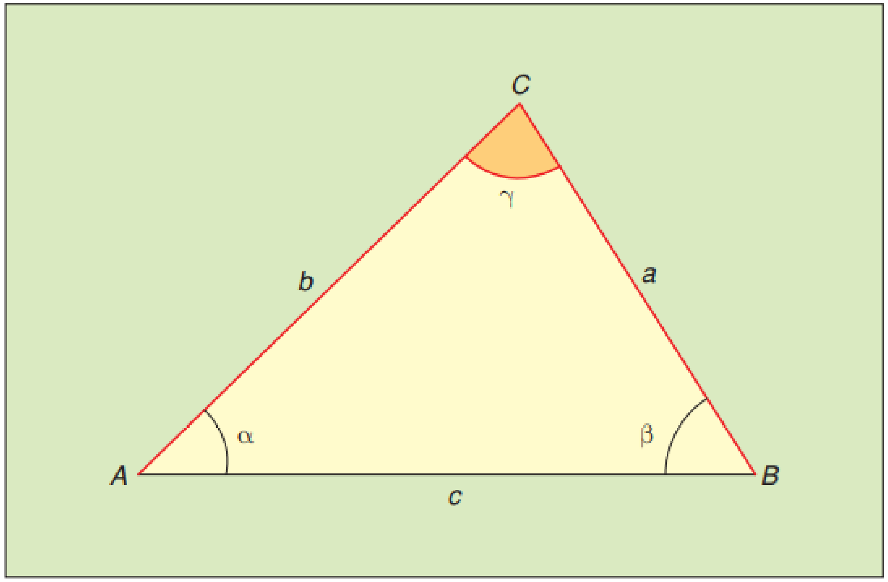


Figura 6

Caso 1 (noti due angoli e un lato)

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conosce la misura del lato* $c = \overline{AB} = 124{,}76$ m, *l'angolo* $\beta = 83^c{,}60$ *e l'angolo* $\alpha = 69^c{,}72$.

Soluzione

$$\gamma = 200^c - (83^c{,}60 + 69^c{,}72) = 46^c{,}68$$

$$b = \frac{124{,}76 \operatorname{sen} 83^c{,}60}{\operatorname{sen} 46^c{,}68} = 180{,}25 \text{ m}$$

$$a = \frac{124{,}76 \operatorname{sen} 69^c{,}72}{\operatorname{sen} 46^c{,}68} = 165{,}72 \text{ m}$$

Caso 2 (noti due lati e l'angolo compreso)

Dato il triangolo ABC di ▶FIGURA **6**, supponiamo di conoscere i lati a e b, oltre all'angolo γ. Vogliamo determinare gli elementi incogniti: c, α e β.

I modi per risolvere questo problema sono molteplici, tuttavia, con gli attuali mezzi di calcolo, il più conveniente è sicuramente quello che prevede il calcolo del lato c con il teorema di Carnot. In effetti dalla seconda delle (2′) si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Poi, con il teorema dei seni, si ricava:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}\operatorname{sen}\gamma \qquad \text{da cui:} \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{c}\operatorname{sen}\gamma\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}\operatorname{sen}\gamma \qquad \text{da cui:} \qquad \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{c}\operatorname{sen}\gamma\right)$$

Tuttavia, l'uso della funzione inversa **arcoseno**, nell'ambito della risoluzione dei triangoli qualunque, richiede particolari precauzioni.

Caso 2 (noti due lati e l’angolo compreso)

Infatti il valore dell’arcoseno fornito dalla calcolatrice è un angolo (per esempio β) inferiore a 100^c; tuttavia anche il suo angolo **associato** supplementare ($200^c - \beta$), oltre a soddisfare la prima delle relazioni precedenti, può essere un angolo del triangolo (in questo caso *ottusangolo*), per cui non lo si può escludere a priori.

Occorrerà allora, in questo caso, controllare quale, fra i due valori β e $200^c - \beta$, soddisfa le proprietà dei triangoli viste all’inizio del paragrafo 1, per poter stabilire quale dei due angoli risolve il problema.

Caso 2 (noti due lati e l'angolo compreso)

Occorrerà allora, in questo caso, controllare quale, fra i due valori β e $200^c - \beta$, soddisfa le proprietà dei triangoli viste all'inizio del paragrafo 1, per poter stabilire quale dei due angoli risolve il problema.

Esiste, però, il modo di evitare tale ambiguità, applicando di nuovo il **teorema di Carnot**, dopo aver calcolato c, anche per determinare gli angoli α e β, questa volta usando la forma vista nelle (3); in effetti si ha:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{da cui:} \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{da cui:} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Caso 2 (noti due lati e l'angolo compreso)

La funzione inversa arcocoseno, infatti, fornisce un valore compreso tra 0^c e 200^c, mentre l'angolo **associato** (che ha lo stesso valore del coseno, anche in segno), si trova nel IV quadrante, per cui **non può essere** l'angolo di un triangolo, eliminando con ciò qualsiasi ambiguità.

Facciamo poi notare che, calcolando entrambi gli angoli α e β con le espressioni precedenti, si può anche eseguire la **verifica del calcolo**, controllando che sia $\alpha + \beta + \gamma = 200^c$.

Caso 2 (noti due lati e l'angolo compreso)

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conosce la misura del lato* $c = \overline{AB} = 76{,}10$ m*, quella del lato* $b = \overline{CA} = 121{,}40$ m *e l'angolo* $\alpha = 82^c{,}5770$.

Soluzione

$$a = \sqrt{121{,}40^2 + 76{,}10^2 - 2 \cdot 76{,}10 \cdot 121{,}40 \cdot \cos 82^c{,}5770} = 124{,}64 \text{ m}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{124{,}64^2 + 76{,}10^2 - 121{,}40^2}{2 \cdot 76{,}10 \cdot 124{,}64}\right) = 77^c{,}4196$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{124{,}64^2 + 121{,}40^2 - 76{,}10^2}{2 \cdot 121{,}40 \cdot 124{,}64}\right) = 40^c{,}0038$$

Per controllo si ha:

$$82^c{,}577 + 77^c{,}4196 + 40^c{,}0038 = 200^c{,}0004 \cong 200^c$$

Caso 3 (noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito)

In ▶FIGURA 7 viene rappresentato il triangolo ABC del quale immaginiamo noti, per esempio, i lati a e b e l'angolo α opposto al lato a. Dobbiamo determinare gli elementi incogniti c, β e γ.

Possiamo senz'altro supporre $a \neq b$ e $\alpha \neq 100^c$, perché in questo caso il triangolo sarebbe rispettivamente del tipo isoscele o rettangolo, che sappiamo facilmente risolvere. Ciò premesso, applicando il teorema dei seni si ottiene:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{quindi} \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\right) \tag{4}$$

Si ha poi $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$, quindi, ancora con il teorema dei seni, si ottiene il terzo lato:

$$c = \frac{b\,\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{oppure} \qquad c = \frac{a\,\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Caso 3 (noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito)

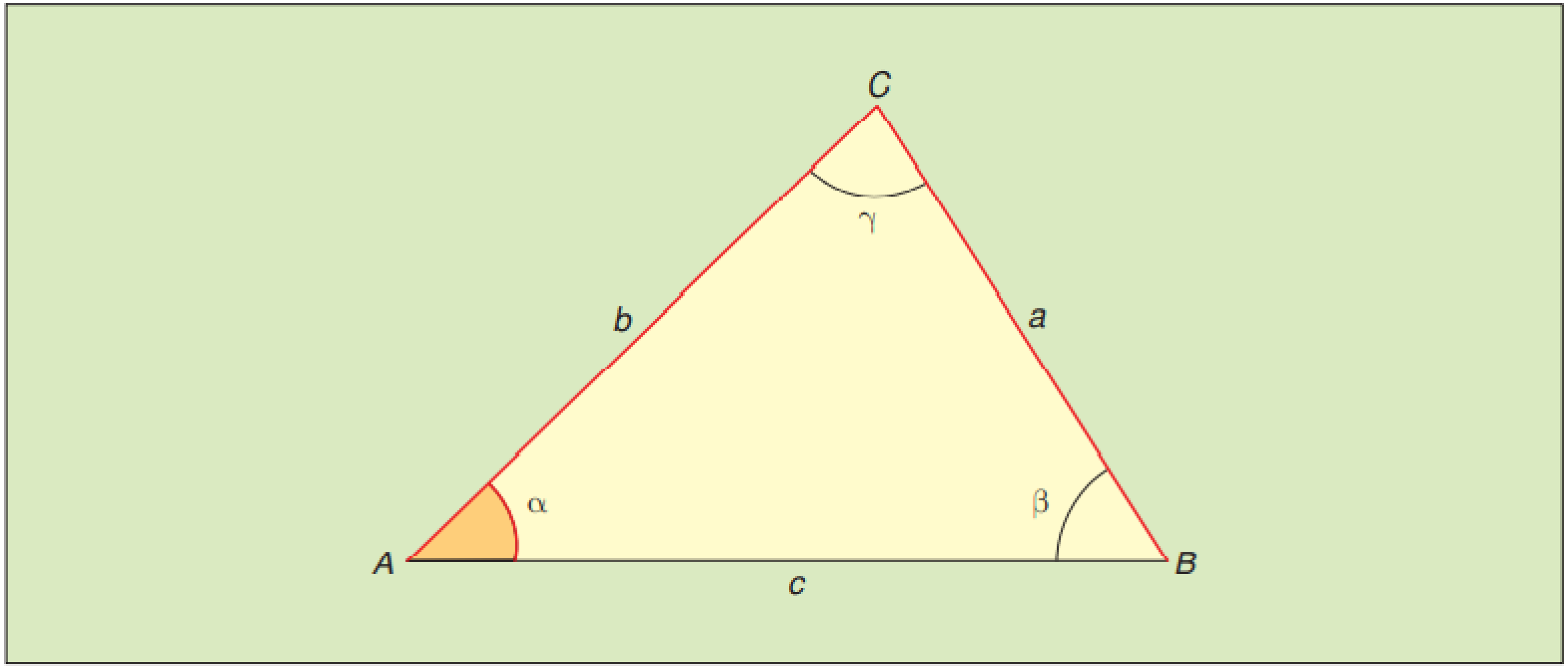


Figura 7

Caso 3 (noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito)

La soluzione proposta, peraltro l'unica possibile, richiede alcune riflessioni.
In effetti, nell'applicare la (4) possono verificarsi i seguenti casi:

- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha > 1$ Il problema è manifestamente **impossibile** in quanto non esiste l'arcoseno di un numero maggiore di 1.
- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha = 1$ L'angolo β è **retto** e quindi si tratta di un triangolo rettangolo.
- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha < 1$ Il valore di β **non è univoco** in quanto può trovarsi sia nel I che nel II quadrante, per quanto detto in precedenza.

Caso 3 (noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito)

In quest'ultimo caso, che è poi quello più frequente, possono verificarsi le seguenti condizioni:

- dei due valori di β uno è **incompatibile** con i dati del problema, pertanto il valore che soddisfa il problema è l'altro. Per esempio, si supponga che sia $\alpha = 120^c$ e che β possa assumere i due valori 40^c e $(200^c - 40^c) = 160^c$. Il valore 160^c è incompatibile con il valore di $\alpha = 120^c$ perché la somma $\alpha + \beta$ sarebbe maggiore di 200^c; in questo caso il valore che risolve il problema è $\beta = 40^c$.
- I due valori di β sono entrambi compatibili con il valore di α; in questo caso si avranno **due soluzioni** del problema, che danno luogo a **due triangoli distinti**. È questo un caso di ambiguità che la trigonometria non risolve.

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conoscono le misure dei lati* a = 695,18 m *e* b = 453,34 m, *oltre a quella dell'angolo* $\beta = 39^c,0815$.

Soluzione

$$\alpha_1 = \text{arcsen}\left(\frac{695,18}{453,34}\,\text{sen}\,39^c,0815\right) = 68^c,944$$

e anche:

$$\alpha_2 = 200^c - 68^c,9441 = 131^c,0559$$

Entrambi i valori calcolati per α sono compatibili con il valore assegnato di β, per cui si hanno **due distinti triangoli** che soddisfano i valori assegnati. Quindi si avrà:

$$\gamma_1 = 200^c - (39^c,0815 + 68^c,9441) = 91^c,9744$$

$$\gamma_2 = 200^c - (39^c,0815 + 131^c,0559) = 29^c,8626$$

$$c_1 = \frac{695,18\ \text{sen}\ 91^c,9744}{\text{sen}\ 68^c,9441} = 780,73\ \text{m}$$

$$c_2 = \frac{695,18\ \text{sen}\ 29^c,8626}{\text{sen}\ 68^c,9441} = 355,76\ \text{m}$$

Caso 4 (noti i tre lati)

In questo caso gli elementi incogniti sono i **tre angoli**; essi possono essere determinati con il teorema di Carnot, espresso nella forma delle relazioni (3). Considerando il triangolo di ▶FIGURA **8**, siano note le misure dei lati a, b e c. Applicando il teorema di Carnot, si ha:

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Trovato α, si potrebbero calcolare γ e β utilizzando il *teorema dei seni*. Tuttavia, per evitare l'**ambiguità** connessa con la funzione inversa arcoseno, è consigliabile continuare a utilizzare il teorema di Carnot. In effetti si ha:

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Caso 4 (noti i tre lati)

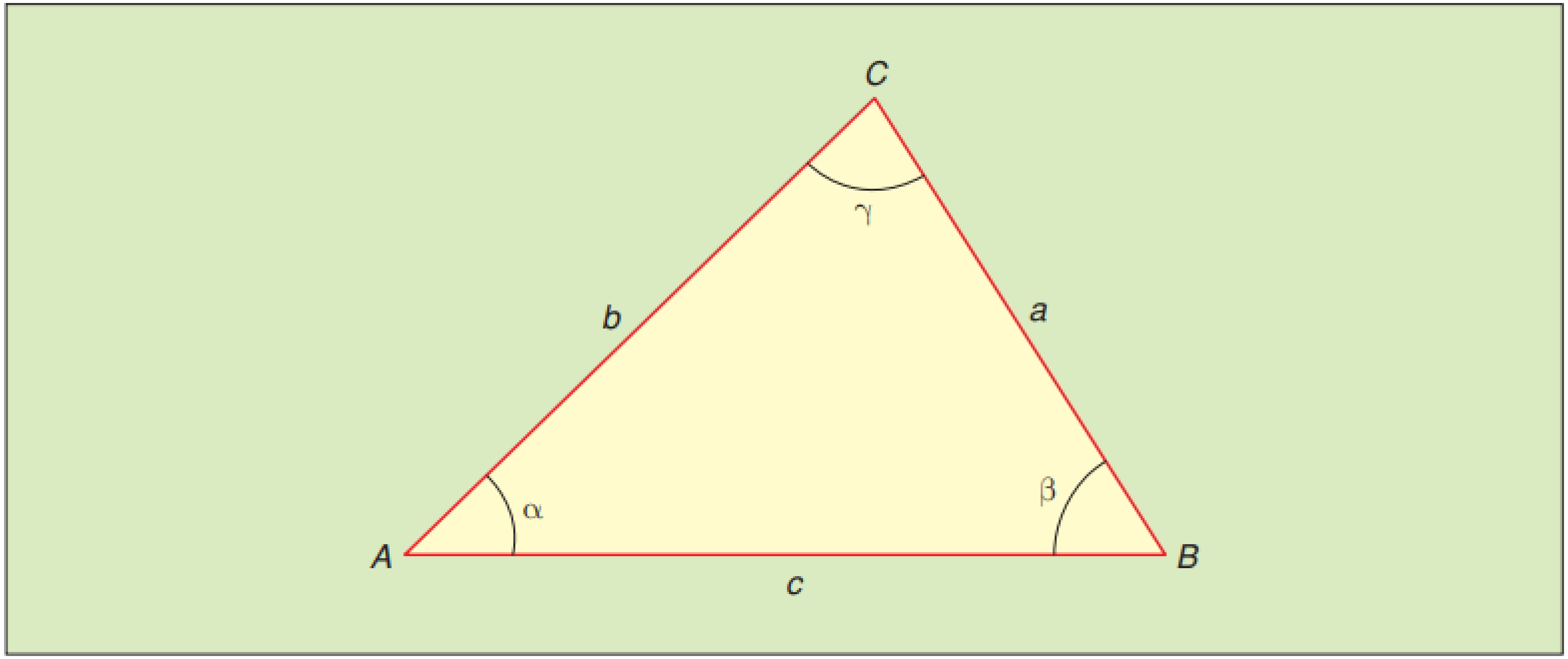


Figura 8

Caso 4 (noti i tre lati)

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conoscono le misure dei lati* a = 131,48 m, b = 94,52 m *e* c = 112,40 m.

Soluzione

$$\alpha = \arccos\left(\frac{112{,}40^2 + 94{,}52^2 - 131{,}48^2}{2 \cdot 112{,}40 \cdot 94{,}52}\right) = 87^c{,}0858$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{112{,}40^2 + 113{,}48^2 - 94{,}52^2}{2 \cdot 112{,}40 \cdot 131{,}48}\right) = 49^c{,}7345$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{131{,}48^2 + 94{,}52^2 - 112{,}40^2}{2 \cdot 94{,}52 \cdot 131{,}48}\right) = 63^c{,}1797$$

Per controllo si ha:

$$87^c{,}0858 + 49^c{,}7345 + 63^c{,}1797 = 200^c.$$

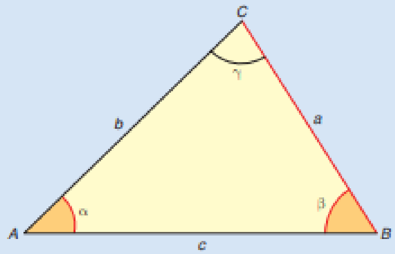
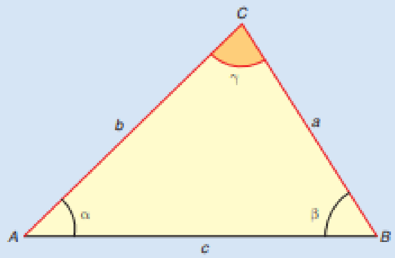
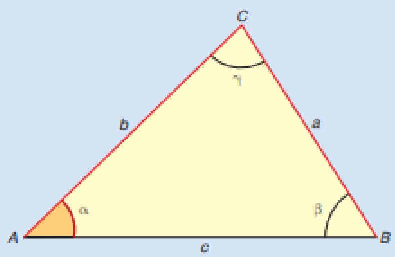
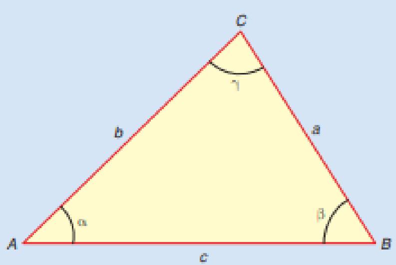
Caso	Schema geometrico	Elementi noti	Soluzione
1		1 lato (a) 2 angoli (α, β)	$\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$ $b = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha} \qquad c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$
2		2 lati (a, b) Angolo compreso (γ)	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ $\alpha = \arccos\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\beta = 200^c - (\alpha + \gamma)$
3		2 lati (a, b) Angolo non compreso (α)	$\beta = \text{arcsen}\left(\dfrac{b}{a}\,\text{sen}\,\alpha\right)$ (*) $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$ $c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$ (*) Richiede la verifica delle due soluzioni β_1 e β_2
4		3 lati (a, b, c)	$\alpha = \arccos\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\beta = \arccos\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$

Tabella 1 – Riepilogo dei 4 casi di risoluzione dei triangoli