Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Applicazioni lineari: autovalori

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Siano $L : V^n \to V^n$ un'appl. lin. e $A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ la matrice associata.

Definizione (Autovalore, autovettore, autospazio)

Uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore di L (o di A) se esiste un vettore non nullo $\vec{u} \in V^n \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$L(\vec{u}) = A\,\vec{u} = t\,\vec{u}.$$

Ogni vettore che verifica questa relazione si dice autovettore di L (o di A) relativo all'autovalore λ.
L'insieme di tutti gli autovettori relativi allo stesso autovalore (incluso il vettore nullo) si dice autospazio di L (o di A) relativo all'autovalore λ.

Osservazione

L'autospazio è effettivamente un spazio vettoriale.

Osservazione

L'autospazio è effettivamente un spazio vettoriale.

Infatti, se $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono due autovettori relativi allo stesso autovalore λ e $t, s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} A(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) &= t\,A\vec{u}_1 + s\,A\vec{u}_2 = t\,\lambda\,\vec{u}_1 + s\,\lambda\,\vec{u}_2 \\ &= \lambda\,(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) \end{aligned}$$

Osservazione

L'autospazio è effettivamente un spazio vettoriale.

Infatti, se $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono due autovettori relativi allo stesso autovalore λ e $t, s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} A(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) &= t\,A\vec{u}_1 + s\,A\vec{u}_2 = t\,\lambda\,\vec{u}_1 + s\,\lambda\,\vec{u}_2 \\ &= \lambda\,(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) \end{aligned}$$

cioè anche la combinazione lineare $t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$ è un autovettore relativo a λ.

Osservazione

L'autospazio è effettivamente un spazio vettoriale.

Infatti, se $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono due autovettori relativi allo stesso autovalore λ e $t, s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} A(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) &= t\,A\vec{u}_1 + s\,A\vec{u}_2 = t\,\lambda\,\vec{u}_1 + s\,\lambda\,\vec{u}_2 \\ &= \lambda\,(t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2) \end{aligned}$$

cioè anche la combinazione lineare $t\,\vec{u}_1 + s\vec{u}_2$ è un autovettore relativo a λ.

Definizione

La dimensione dell'autospazio è detta molteplicità geometrica dell'autovalore.

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L: V^2 \to V^2,$	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x, y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L: V^2 \to V^2$,	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x, y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si vede subito che $\lambda = 2$ è un autovalore, e sia $\vec{e}_1 = (1, 0)$ che $\vec{e}_2 = (0, 1)$ sono autovettori.
Precisamente, l'autospazio relativo è tutto V^2 (dunque la sua molteplicità geometrica è 2)

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L: V^2 \to V^2$,	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x,y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si vede subito che $\lambda = 2$ è un autovalore, e sia $\vec{e}_1 = (1,0)$ che $\vec{e}_2 = (0,1)$ sono autovettori.
Precisamente, l'autospazio relativo è tutto V^2 (dunque la sua molteplicità geometrica è 2)
Cosa vediamo graficamente?

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L: V^2 \to V^2$,	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x,y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

La retta nella direzione di $\vec{e}_1$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputa   inputb

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L : V^2 \to V^2$,	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x, y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

La retta nella direzione di $\vec{e}_2$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputc inputd

Esempio (Dilatazione nel piano)

$L: V^2 \to V^2$,	$L(\vec{u}) = 2\,\vec{u}$
per componenti:	$L(x, y) = (2x, 2y)$
matrice associata:	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

L'immagine del quadrato individuato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ è ancora un quadrato, con i lati paralleli a quelli di partenza: inpute inputf

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (2x, y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (2x, y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1,0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$.

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (2x, y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1,0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$. Infatti $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $y = 0$.

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (2x, y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1,0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$.
- $\lambda = 1$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_2 = (0,1)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 1 è la retta individuata da $\vec{e}_2$.

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (2x,y)$.

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1,0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$.
- $\lambda = 1$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_2 = (0,1)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 1 è la retta individuata da $\vec{e}_2$. Infatti $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x = 0$.

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1,0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$

- $\lambda = 2$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_1 = (1, 0)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 2 è la retta individuata da $\vec{e}_1$

Graficamente:
la retta nella direzione di $\vec{e}_1$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputg inputh

- $\lambda = 1$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 1 è la retta individuata da $\vec{e}_2$

- $\lambda = 1$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{e}_2 = (0,1)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 1 è la retta individuata da $\vec{e}_2$

Graficamente:
la retta nella direzione di $\vec{e}_2$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputi inputj

- $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ sono autovettori (relativi ad autovalori diversi) che formano una base

- $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ sono autovettori (relativi ad autovalori diversi) che formano una base

Graficamente:
l'immagine del quadrato individuato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ è un rettangolo, con i lati paralleli a quelli di partenza:

inputk inputl

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x, y) = (3x + 2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessun asse resta fisso: non quello orizzontale

inputa inputm

Esempio

$$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessun asse resta fisso: non quello verticale

inputc inputn

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessun asse resta fisso: l'immagine del quadrato individuato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ è un parallelogramma senza nessuna connessione con gli assi

inpute inputo

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Fra poco saremo in grado di accorgerci che

- $\lambda = -1$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{u}_1 = (1,-2)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a -1 è la retta individuata da $\vec{u}_1$.

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Graficamente: la retta nella direzione di $\vec{u}_1$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputp inputq

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (3x+2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Fra poco saremo in grado di accorgerci che

- $\lambda = 4$ è un autovalore (di molt. geom. 1) e $\vec{u}_2 = (2,1)$ un autovettore relativo. Precisamente, l'autospazio relativo a 1 è la retta individuata da $\vec{e}_2$.

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x, y) = (3x + 2y, 2x).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Graficamente: la retta nella direzione di $\vec{u}_2$ è fissa, cioè coincide con la sua immagine:

inputr inputs

In conclusione

- $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono autovettori (relativi ad autovalori diversi) che formano una base.

Graficamente: l'immagine del quadrato individuato da $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ è un parallelogramma, con i lati paralleli a quelli di partenza:

inputt inputu

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (x-y, x+y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (x-y, x+y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessuna retta resta fissa: non l'asse orizzontale

inputa input1

Esempio

$$L : V^2 \to V^2, \quad L(x, y) = (x - y, x + y).$$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessuna retta resta fissa: non quello verticale

inputc input2

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x, y) = (x - y, x + y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessuna retta resta fissa: né nessun altra retta

inpute input3

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x, y) = (x - y, x + y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessuna retta resta fissa: né nessun altra retta

inpute input4

Esempio

$L: V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (x-y, x+y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Graficamente, si vede che nessuna retta resta fissa: né nessun altra retta

inpute input5

Esempio

$L : V^2 \to V^2, \quad L(x,y) = (x-y, x+y).$

La matrice associata è $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Fra poco saremo in grado di accorgerci che

- questa applicazione non ammette autovalori.

Teorema (Caratterizzazione di autovalori e autospazi)

Siano $L : V^{\mathsf{n}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'applicazione lineare ed* $A \in \mathcal{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{n}}$ *la matrice associata. Uno scalare* λ *è un atovalore se, e solo se,*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Il relativo autospazio è dato da tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{0}.$$

In particolare, la molteplicità geometrica è uguale a

$$\mathsf{n} - \mathrm{Rank}(A - \lambda I).$$

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^{\mathsf{n}} \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}.$$

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}} \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}.$$

Poiché $\lambda\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v}$, ciò è equivalente a

$$A\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v} \Leftrightarrow A\,\vec{v} - \lambda\,I\,\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda\,I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^n \setminus \{\vec{0}\}$ tale che
$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$
Poiché $\lambda\vec{v} = \lambda I\vec{v}$, ciò è equivalente a
$$A\vec{v} = \lambda I\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Questo significa che $\vec{v}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$.

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^n \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}.$$

Poiché $\lambda\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v}$, ciò è equivalente a

$$A\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v} \Leftrightarrow A\,\vec{v} - \lambda\,I\,\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda\,I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Questo significa che $\vec{v}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda\,I$. Ora, il teorema di Cramer implica che tale soluzione non banale esiste se, e solo se, $\det(A - \lambda\,I) = 0$.

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^n \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Poiché $\lambda\vec{v} = \lambda I\vec{v}$, ciò è equivalente a

$$A\vec{v} = \lambda I\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Questo significa che $\vec{v}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$.
Ora, il teorema di Cramer implica che tale soluzione non banale esiste se, e solo se, $\det(A - \lambda I) = 0$.
Inoltre, gli autovettori sono tutte e sole le soluzioni di tale sistema.

Dimostrazione. Per definizione λ è un autovalore se, e solo se, esiste $\vec{v} \in V^{n} \setminus \{\vec{0}\}$ tale che

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}.$$

Poiché $\lambda\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v}$, ciò è equivalente a

$$A\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v} \Leftrightarrow A\,\vec{v} - \lambda\,I\,\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda\,I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Questo significa che $\vec{v}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda\,I$.
Ora, il teorema di Cramer implica che tale soluzione non banale esiste se, e solo se, $\det(A - \lambda\,I) = 0$.
Infine, il Teorema di Rouché-Capelli afferma che la dimensione dell'insieme delle soluzioni è $n - \mathrm{Rank}(A)$. ■

Definizione (Polinomio caratteristico)

Sviluppando $\det(A-\lambda I)$ *si ottiene un polinomio di grado* n *nella variabile* λ*, che prende il nome di* *polinomio caratteristico*

La molteplicità di λ *come radice del polinomio caratteristico prende il nome di* *molteplicità algebrica*.

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^3 \to V^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^3 \to V^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^3 \to V^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Si noti che il polinomio caratteristico di una matrice 3×3 ha grado 3.

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L : V^3 \to V^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

L'equazione caratteristica è dunque $\quad -\lambda(2-\lambda)^2 = 0.$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^3 \to V^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

L'equazione caratteristica è dunque $\quad -\lambda(2-\lambda)^2 = 0$.

Ci sono due autovalori: $\lambda = 0$ (di molt. alg. 1) e

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 0, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0\,I = A$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\mathbf{0}$, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0\,I = A$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A - 0\,I$ ha rango 2, la molt. alg. è 3-2=1.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 0, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0I = A$
Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A - 0I$ ha rango 2, la molt. alg. è 3-2=1.
L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema (ridotto)

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases}$$

cioè
$V(0) = \left\{(x, 2x, -x) \in V^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}(1, 2, -1).$

Autovalori: esempi

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 2, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2\,I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalori: esempi

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 2, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A-2I$ ha rango 2, la molt. geom. è 3-2=1.

Autovalori: esempi

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 2, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A-2I$ ha rango 2, la molt. geom. è 3-2=1.
Osservate che in questo caso molt. alg. e molt. geom. sono diverse.

Autovalori: esempi

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 2, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema (ridotto)

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

cioè $V(2)=\{(x,0,-x)\in V^3 \,:\, x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Span}(1,0,-1)$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 0, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0\,I = A$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\mathbf{0}$, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0\,I = A$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A - 0\,I$ ha rango 2, la molt. alg. è 3-2=1.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\mathbf{0}$, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0\,I = A$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A - 0\,I$ ha rango 2, la molt. alg. è 3-2=1.

L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema (ridotto)

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases}$$

cioè

$V(0) = \left\{(x, 2x, -x) \in V^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}(1, 2, -1)$.

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^2 \to V^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^2 \to V^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L : V^2 \to V^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Si noti che il polinomio caratteristico di una matrice 2×2 ha grado 3.

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L: V^2 \to V^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

L'equazione caratteristica è dunque $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, che ha soluzioni

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = -1, 4$$

Esempio

Determinare autovalori ed autospazi dell'appl. lin. $L : V^2 \to V^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo il polinomio caratteristico calcolando $\det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

L'equazione caratteristica è dunque $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, che ha soluzioni

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = -1, 4$$

Ci sono due autovalori: $\lambda = -1$ e $\lambda = 4$, entrambi di molt. alg. 1.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore -1, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 1\,I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore -1, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A+1\,I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A+1\,I$ ha rango 1, la molt. alg. è 2-1=1.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore -1, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A+1\,I=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A+1\,I$ ha rango 1, la molt. alg. è 2-1=1.

L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema (ridotto a una sola equazione):

$$2x+y=0 \;\; y=-2x$$

cioè $V(-1)=\left\{(x,-2x)\in V^2 : x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Span}(1,-2)$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 4, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 4, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A-4I$ ha rango 1, la molt. alg. è 2-1=1.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore 4, dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riducendo la matrice vediamo che

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A-4I$ ha rango 1, la molt. alg. è 2-1=1.
L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema (ridotto a una sola equazione):

$$-x+2y=0 \ \ x=2y$$

cioè $V(4) = \left\{(2y, y) \in V^2 : y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}(2,1)$.

Osserviamo che gli autovalori di A $\vec{v}_1 = (1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1)$ formano una base di V^2.
Graficamente, il parallelogramma costruito su $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ viene trasformato in un parallelogramma con i lati paralleli.

Osserviamo che gli autovalori di A $\vec{v}_1 = (1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1)$ formano una base di V^2.
Graficamente, il parallelogramma costruito su $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ viene trasformato in un parallelogramma con i lati paralleli.
In questo caso risulta più appropriato utilizzare la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ anziché la base canonica.
Proviamo a scrivere la matrice associata secondo questa base (seguendo il teorema di caratterizzazione delle appl. lin.):

$$L(\vec{v}_1) = -\vec{v}_1 = (-1, 0) \qquad L(\vec{v}_2) = 4\vec{v}_2 = (0, 4)$$

Dunque nella nuova base la matrice associata è diagonale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definizione (Matrici simili)

Due matrici che rappresentano la stessa appl. lin. secondo basi diverse si dicono simili.

Definizione (Matrici simili)

Due matrici che rappresentano la stessa appl. lin. secondo basi diverse si dicono simili.

Definizione (Matrice diagonalizzabile)

Una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ *si dice diagonalizzabile se i suoi autovettori formano una base di* V^n *o, equivalentemente, se è simile a una matrice diagonale.*

Definizione (Matrici simili)

Due matrici che rappresentano la stessa appl. lin. secondo basi diverse si dicono simili.

Definizione (Matrice diagonalizzabile)

Una matrice $A \in \mathscr{M}_{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se i suoi autovettori formano una base di V^n o, equivalentemente, se è simile a una matrice diagonale.

Esempio

La matrice dell'esempio precedente è diagonalizzabile.