Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Applicazioni lineari: nucleo e immagine

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Definizione (Immagine di una appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. Chiamiamo immagine di* L ($\mathrm{Im}(L)$) *l'insieme dei vettori di* V^{m} *che sono i trasformati di qualche vettore di* V^{m}*. In altre parole,* $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ *appartiene all'immagine di* L *se, e solo se, esiste almeno un vettore* $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ *tale che* $L(\vec{u}) = \vec{v}$*.*

Definizione (Immagine di una appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ un'appl. lin. Chiamiamo immagine di L ($\mathrm{Im}(L)$) l'insieme dei vettori di V^{m} che sono i trasformati di qualche vettore di V^{m}. In altre parole, $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ appartiene all'immagine di L se, e solo se, esiste almeno un vettore $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ tale che $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

Per costruzione l'immagine di L è contenuta V^{m}, poi

Teorema (Proprietà dell'immagine)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ un'appl. lin. ed $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ la matrice associata. Allora l'immagine è un sottospazio di V^{n}, generato dai vettori colonna di A.
In particolare, la sua dimensione è uguale a $\mathrm{Rank}(A)$.

Definizione (Immagine di una appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. Chiamiamo immagine di* L ($\mathrm{Im}(L)$) *l'insieme dei vettori di* V^{m} *che sono i trasformati di qualche vettore di* V^{m}*. In altre parole,* $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ *appartiene all'immagine di* L *se, e solo se, esiste almeno un vettore* $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ *tale che* $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

In seguito indicheremo con il simbolo $\mathscr{R}(L)$ la dimensione dell'immagine di L.
Possiamo sintetizzare

Teorema (Proprietà dell'immagine)

$$\mathscr{R}(L) = \mathrm{Rank}(A)$$

Definizione (Appl. suriettiva)

Diremo che l'applicazione L è suriettiva se la sua immagine coincide con V^{m}. In altre parole, se per ogni $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ esiste almeno un vettore $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ tale che $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

Definizione (Appl. suriettiva)

Diremo che l'applicazione L è suriettiva se la sua immagine coincide con V^{m}. In altre parole, se per ogni $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ esiste almeno un vettore $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ tale che $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

Corollario (C.N.S. suriettività)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ un'appl. lin. ed $A \in \mathscr{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ la matrice associata. Allora L è suriettiva se, e solo se,

$$\boxed{\mathrm{Rank}\, A = \mathrm{n}}$$

Definizione (Appl. suriettiva)

Diremo che l'applicazione L è suriettiva se la sua immagine coincide con V^m. In altre parole, se per ogni $\vec{v} \in V^n$ esiste almeno un vettore $\vec{u} \in V^m$ tale che $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

Corollario (C.N.S. suriettività)

Sia $L : V^m \to V^n$ un'appl. lin. ed $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ la matrice associata. Allora L è suriettiva se, e solo se,

$$\boxed{\text{Rank}\, A = n}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\text{Im}(L)$ è un sottospazio, dunque coincide con V^n se, e solo se, la sua dimensione è n.

Definizione (Appl. suriettiva)

Diremo che l'applicazione L è suriettiva se la sua immagine coincide con V^{m}. In altre parole, se per ogni $\vec{v} \in V^{\mathrm{n}}$ esiste almeno un vettore $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ tale che $L(\vec{u}) = \vec{v}$.

Corollario (C.N.S. suriettività)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ un'appl. lin. ed $A \in \mathscr{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ la matrice associata. Allora L è suriettiva se, e solo se,

$$\boxed{\operatorname{Rank} A = \mathrm{n}}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\operatorname{Im}(L)$ è un sottospazio, dunque coincide con V^{n} se, e solo se, la sua dimensione è n. D'altra parte la dimensione dell'immagine è data da $\operatorname{Rank} A$. ∎

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è suriettiva.

Esempio

Sia $L : V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è suriettiva.

Basta verificare se $\operatorname{Rank} A = 2$.

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è suriettiva.

Basta verificare se $\operatorname{Rank} A = 2$.

Si vede immediatamente che la sottomatrice 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero.

Dunque $\operatorname{Rank} A = 2$ e l'appl. lin. <u>è</u> <u>suriettiva</u>.

Definizione (Nucleo di una appl. lin.)

Sia $L : V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. . Chiamiamo* **nucleo** *di* L ($\ker(L)$) *l'insieme dei vettori di* V^{n} *che vengono trasformati nel vettore nullo. In altre parole,* $\vec{u} \in V^{\mathsf{m}}$ *appartiene al nucleo di* L *se, e solo se,* $L(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathsf{n}}$.

Definizione (Nucleo di una appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. . Chiamiamo* **nucleo** *di* L *(*$\ker(L)$*) l'insieme dei vettori di* V^{n} *che vengono trasformati nel vettore nullo. In altre parole,* $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$ *appartiene al nucleo di* L *se, e solo se,* $L(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathrm{n}}$.

Per costruzione il nucleo è contenuto in V^{m}, poi

Teorema (Proprietà del nucleo)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. ed* $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ *la matrice associata. Allora il nucleo è formato da tutte e sole le soluzioni del sistema lineare omogeneo di* n *equazioni in* m *incognite* $A\vec{x} = 0$. *In particolare, è un sottospazio di* V^{m} *di dimensione* $\mathrm{m} - \mathrm{Rank}(A)$.

Definizione (Nucleo di una appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. . Chiamiamo* **nucleo** *di* L *(*$\ker(L)$*) l'insieme dei vettori di* V^{n} *che vengono trasformati nel vettore nullo. In altre parole,* $\vec{u} \in V^{\mathsf{m}}$ *appartiene al nucleo di* L *se, e solo se,* $L(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathsf{n}}$*.*

In seguito indicheremo con il simbolo $\mathcal{N}(L)$ la dimensione del nucleo di L.
I teoremi sulle proprietà di nucleo e immagine si sintetizzano in:

Teorema (Formula di Grassmann)

$$\mathcal{R}(L) + \mathcal{N}(L) = \mathsf{m}$$

Definizione (Applicazione iniettiva)

Diremo che l'appl. L *è* **iniettiva** *se a vettori diversi corrispondono immagini diverse. In altre parole, se* $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V^{\mathsf{m}}$ *sono tali che* $L(\vec{u}_1) = L(\vec{u}_2)$*, allora* $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

Definizione (Applicazione iniettiva)

Diremo che l'appl. L *è* **iniettiva** *se a vettori diversi corrispondono immagini diverse. In altre parole, se* $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V^{\mathrm{m}}$ *sono tali che* $L(\vec{u}_1) = L(\vec{u}_2)$, *allora* $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

Per le applicazioni lineari, la condizione di iniettività diventa più semplice:

Proposizione (Iniettività di appl. lin.)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. . Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\ker(L) = \{\vec{0}_{\mathrm{m}}\}.$$

Proposizione (Iniettività di appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. . Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\ker(L) = \{\vec{0}_{\mathsf{m}}\}.$$

Corollario (C.N.S. iniettività)

Sia $L: V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. ed* $A \in \mathscr{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{m}}$ *la matrice associata. Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\operatorname{Rank} A = \mathsf{m}.$$

Proposizione (Iniettività di appl. lin.)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. . Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\ker(L) = \{\vec{0}_{\mathrm{m}}\}.$$

Corollario (C.N.S. iniettività)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. ed* $A \in \mathscr{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ *la matrice associata. Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\operatorname{Rank} A = \mathrm{m}.$$

Dimostrazione. In generale, un sottospazio è banale (cioè si riduce al solo vettore $\vec{0}_{\mathrm{m}}$) se, e solo se, la sua dimensione è 0.

Proposizione (Iniettività di appl. lin.)

Sia $L : V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. . Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\ker(L) = \{\vec{0}_{\mathsf{m}}\}.$$

Corollario (C.N.S. iniettività)

Sia $L : V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ *un'appl. lin. ed* $A \in \mathscr{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{m}}$ *la matrice associata. Allora* L *è iniettiva se, e solo se,*

$$\mathrm{Rank}\, A = \mathsf{m}.$$

Dimostrazione. In generale, un sottospazio è banale (cioè si riduce al solo vettore $\vec{0}_{\mathsf{m}}$) se, e solo se, la sua dimensione è 0. D'altra parte, sappiamo che la dimensione di $\ker(L)$ è $\mathsf{m} - \mathrm{Rank}(A)$, dunque essa è zero se, e solo se, $\mathrm{Rank}(A) = \mathsf{m}$. ∎

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Si tratta di verificare se $\operatorname{Rank} A = 3$.

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Si tratta di verificare se $\operatorname{Rank} A = 3$. Poichè A è una matrice 2×3, essa ha al più rango 2 e dunque l'appl. non è iniettiva.

Esempio

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Il suo nucleo è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio

Sia $L : V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Il suo nucleo è dato dalle soluzioni del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Il sistema è già ridotto, e si scrive esplicitamente:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Esempio

Sia $L : V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Il suo nucleo è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è già ridotto, e si scrive esplicitamente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}$$

Esempio

Sia $L: V^3 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se è iniettiva e, in caso negativo, determinarne il nucleo.

Il suo nucleo è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è già ridotto, e si scrive esplicitamente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases} \quad \text{dunque}$$

$$\ker(A) = \underline{\{(x, x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}} = \underline{\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Definizione (Applicazione biettiva)

Diremo che l'applicazione L *è* **biettiva** *se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Definizione (Applicazione biettiva)

Diremo che l'applicazione L è **biettiva** *se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Sintetizzando le C.N.S. di suriettività e iniettività si ottiene

Corollario (C.N.S. biettività)

Sia $L : V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ un'appl. lin. ed $A \in \mathscr{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{m}}$ la matrice associata. Allora L è biettiva se, e solo se,

$$\mathsf{m} = \mathsf{n} = \operatorname{Rank} A$$

o, equivalentemente,

$$\mathsf{m} = \mathsf{n} \quad e \quad \det A \neq 0.$$

Sappiamo che la legge di una funzione biettiva può essere invertita. Per le appl. lin. vale inoltre

Teorema (Inversa di una appl. lin.)

Sia $L : V^n \to V^n$ *un'appl. lin.* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *la matrice associata. Allora* L *è invertibile, se, e solo se,*

$$\det A \neq 0$$

e l'inversa L^{-1} *è l'appl. lin. associata alla matrice* A^{-1}.