Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Applicazioni lineari: Caratterizzazione matriciale

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

In tutti gli esempi finora visti le appl. lin. potevano essere scritte in forma matriciale come il prodotto (righe per colonne) fra una matrice assegnata e il vettore variabile $\vec{u}$.

Esempio (Prodotto righe per colonne)

Se $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$, possiamo definire una appl. lin. mediante il prodotto righe per colonne:

$$\boxed{L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}} \quad L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

In tutti gli esempi finora visti le appl. lin. potevano essere scritte in forma matriciale come il prodotto (righe per colonne) fra una matrice assegnata e il vettore variabile $\vec{u}$.

Esempio (Prodotto righe per colonne)

Se $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$, possiamo definire una appl. lin. mediante il prodotto righe per colonne:

$$\boxed{L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}} \quad L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

Verifichiamo le proprietà di linearità:

$$L(\vec{u}+\vec{v}) = A\,(\vec{u}+\vec{v}) = A\,\vec{u} + A\,\vec{v} = L(\vec{u}) + L(\vec{v}) \tag{1}$$

In tutti gli esempi finora visti le appl. lin. potevano essere scritte in forma matriciale come il prodotto (righe per colonne) fra una matrice assegnata e il vettore variabile $\vec{u}$.

Esempio (Prodotto righe per colonne)

Se $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$, possiamo definire una appl. lin. mediante il prodotto righe per colonne:

$$\boxed{L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}} \quad L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

Verifichiamo le proprietà di linearità:

$$L(\vec{u}+\vec{v}) = A\,(\vec{u}+\vec{v}) = A\,\vec{u} + A\,\vec{v} = L(\vec{u}) + L(\vec{v}) \qquad (1)$$

$$L(t\,\vec{u}) = A\,(t\,\vec{u}) = t\,(A\,\vec{u}) = t\,L(\vec{u}) \qquad (2)$$

per le analoghe proprietà del prodotto righe per colonne.

In tutti gli esempi finora visti le appl. lin. potevano essere scritte in forma matriciale come il prodotto (righe per colonne) fra una matrice assegnata e il vettore variabile $\vec{u}$.

Esempio (Prodotto righe per colonne)

Se $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$, possiamo definire una appl. lin. mediante il prodotto righe per colonne:

$$\boxed{L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}} \quad L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

In effetti tutte le applicazioni lineari sono e il prodotto (righe per colonne) fra una matrice assegnata e il vettore variabile $\vec{u}$.

Teorema (Caratterizzazione delle appl. lin.)

Sia $L: V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. Allora esiste una matrice* $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$ *tale che*

$$\boxed{L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

per ogni $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$. *Precisamente la matrice* A *può essere scritta per colonne come*

$$\boxed{A = (L(\vec{e}_1)\,, L(\vec{e}_2)\,\ldots\, L(\vec{e}_{\mathrm{m}}))}$$

dove $\vec{e}_k$ *indica il* k*-esimo vettore della base canonica di* V^{m}, *per ogni* $k = 1, 2 \ldots \mathrm{m}$.

Teorema (Caratterizzazione delle appl. lin.)

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ *un'appl. lin. Allora esiste una matrice* $A \in \mathscr{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{m})$ *tale che*

$$\boxed{L(\vec{u}) = A\,\vec{u}}$$

per ogni $\vec{u} \in V^{\mathrm{m}}$*. Precisamente la matrice* A *può essere scritta per colonne come*

$$\boxed{A = (L(\vec{e}_1)\,,\,L(\vec{e}_2)\,\ldots\,L(\vec{e}_{\mathrm{m}}))}$$

dove $\vec{e}_k$ *indica il* k*-esimo vettore della base canonica di* V^{m}*, per ogni* $k = 1, 2 \ldots \mathrm{m}$*.*

Nella formula precedente i vettori si intendono <u>in colonna</u>!

Dimostrazione. Indichiamo

$$L(\vec{e}_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{n}k} \end{pmatrix} \in V^{\mathrm{n}},$$

sicchè

$$A = \left(L(\vec{e}_1)\,, L(\vec{e}_2) \ldots L(\vec{e}_{\mathrm{m}})\right) = (a_{ik})_{\substack{i=1\ldots\mathrm{n} \\ k=1\ldots\mathrm{m}}}\,.$$

Dimostrazione. Indichiamo

$$L(\vec{e}_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{n}k} \end{pmatrix} \in V^{\mathrm{n}},$$

sicchè

$$A = (L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2) \ldots L(\vec{e}_{\mathrm{m}})) = (a_{ik})_{\substack{i=1\ldots\mathrm{n} \\ k=1\ldots\mathrm{m}}}.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \in V^{\mathrm{m}}$ si ha

$L(\vec{u}) = A\,\vec{u}$, ovvero (per componenti)

$$L(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mathrm{m}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mathrm{m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{\mathrm{n}2} & \ldots & a_{\mathrm{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{n}k} x_k \end{pmatrix}$$

Ora, con la scrittura $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{m}} \end{pmatrix}$ si intende $\vec{u} = \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} x_k \vec{e}_k$.

Ora, con la scrittura $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mathrm{m} \end{pmatrix}$ si intende $\vec{u} = \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} x_k \vec{e}_k$.

Utilizzando dunque la definizione di appl.lin. si ha

$$L(\vec{u}) = L\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{m}} x_k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} x_k L(\vec{e}_k)$$

Ora, con la scrittura $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ si intende $\vec{u} = \sum_{k=1}^{m} x_k \vec{e}_k$.

Utilizzando dunque la definizione di appl.lin. si ha

$$L(\vec{u}) = L\left(\sum_{k=1}^{m} x_k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} x_k L(\vec{e}_k)$$

ma $L(\vec{e}_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ e dunque

$$= \sum_{k=1}^{m} x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k \end{pmatrix}$$

■

Esempio

$$L : V^3 \to V^2, \qquad L(x, y, z) = (3x - z, x + y + 2z)$$

Esempio

$L : V^3 \to V^2, \qquad L(x, y, z) = (3x - z, x + y + 2z)$

Costruiamo la matrice secondo il teorema:

$$L(\vec{e}_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad L(\vec{e}_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\vec{e}_3) = L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},$$

Esempio

$$L : V^3 \to V^2, \qquad L(x, y, z) = (3x - z, x + y + 2z)$$

Costruiamo la matrice secondo il teorema:

$$L(\vec{e}_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad L(\vec{e}_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\vec{e}_3) = L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},$$

dunque
$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Esempio

$$L : V^3 \to V^2, \qquad L(x,y,z) = (3x - z, x + y + 2z)$$

Costruiamo la matrice secondo il teorema:

$$L(\vec{e}_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad L(\vec{e}_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$L(\vec{e}_3) = L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},$$

dunque
$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che effettivamente $L(x,y,z) = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x - z\\ x + y - 2z\end{pmatrix}$$

Osservazione (Composizione di appl. lin. e prodotto di matrici)

Se $L : V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ e $T : V^{\mathsf{n}} \to V^{p}$ sono appl. lin. associate, rispettivamente, alle matrici $A \in \mathscr{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{m}}$ e $B \in \mathscr{M}_{p\times\mathsf{n}}$, allora la funzione $T \circ L : V^{\mathsf{m}} \to V^{p}$ è una appl. lin., e la sua matrice associata è $BA \in \mathscr{M}_{p\times\mathsf{m}}$.

Osservazione (Composizione di appl. lin. e prodotto di matrici)

Se $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ e $T : V^{\mathrm{n}} \to V^{p}$ sono appl. lin. associate, rispettivamente, alle matrici $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times\mathrm{n}}$, allora la funzione $T \circ L : V^{\mathrm{m}} \to V^{p}$ è una appl. lin., e la sua matrice associata è $BA \in \mathcal{M}_{p\times\mathrm{m}}$.

Osservazione (Inverse di appl. lin. e matrici)

Una appl. lin. $L : V^{\mathrm{n}} \to V^{\mathrm{n}}$, associata alla matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile.
In tal caso, la funzione inversa $L^{-1} : V^{\mathrm{n}} \to V^{\mathrm{n}}$ è una appl. lin., e la sua matrice associata è A^{-1}.

Esercizio 1.

Sia $L: V^2 \to V^3$ la funzione di legge

$$L(x, y) = (3x - y, y, x^2).$$

Stabilire se è una appl. lin. .

Esercizio 1.

Sia $L : V^2 \to V^3$ la funzione di legge
$$L(x, y) = (3x - y, y, x^2).$$
Stabilire se è una appl. lin. .

Nella legge di L, le variabili x e y non appaiono solo in forma di combinazioni lineari, poichè compare x^2. Questo ci convince che L non è un'appl. lin.

Esercizio 1.

Sia $L\colon V^2 \to V^3$ la funzione di legge
$$L(x,y) = (3x-y, y, x^2).$$
Stabilire se è una appl. lin. .

Nella legge di L, le variabili x e y non appaiono solo in forma di combinazioni lineari, poichè compare x^2. Questo ci convince che L non è un'appl. lin.

- Per dimostrarlo, dobbiamo mostrare che almeno una delle due propietà (1) o (2) non vale. Dobbiamo dunque trovare due vettori che non verificano (1), o un vettore e uno scalare che non verificano (2).

Esercizio 1.

Sia $L: V^2 \to V^3$ la funzione di legge
$$L(x, y) = (3x - y, y, x^2).$$
Stabilire se è una appl. lin. .

Nella legge di L, le variabili x e y non appaiono solo in forma di combinazioni lineari, poichè compare x^2. Questo ci convince che L non è un'appl. lin.

- Per dimostrarlo, dobbiamo mostrare che almeno una delle due propietà (1) o (2) non vale. Dobbiamo dunque trovare due vettori che non verificano (1), o un vettore e uno scalare che non verificano (2).

$$L(\vec{e}_1) = L(1, 0) = (3, 0, 1), L(-\vec{e}_1) = L(-1, 0) = (-3, 0, 1)$$

$$L(-\vec{e}_1) = (-3, 0, 1) \neq (-3, 0, -1) = -L(\vec{e}_1)$$

Esercizio 2.

Sia $L : V^3 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x, y, z) = (3x - y, y + z, x - z).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Esercizio 2.

Sia $L\colon V^3 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x,y,z) = (3x - y, y + z, x - z).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Nella legge di L, le variabili x, y e z appaiono solo in forma di combinazioni lineari. Questo ci convince che L è un'appl. lin.

Esercizio 2.

Sia $L : V^3 \to V^2$ la funzione di legge
$$L(x, y, z) = (3x - y, y + z, x - z).$$
Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Nella legge di L, le variabili x, y e z appaiono solo in forma di combinazioni lineari. Questo ci convince che L è un'appl. lin.

- Per dimostrarlo, dobbiamo mostrare valgono le due propietà (1) e (2) per tutti i vettori generici $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$) $\in V^3$ e per ogni scalare $t \in \mathbb{R}$

Esercizio 2.

Sia $L: V^3 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x,y,z) = (3x-y, y+z, x-z).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

$$\begin{aligned}
L(\vec{u}_1)+L(\vec{u}_2) &= L\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1-y_1\\y_1+z_1\\x_1-z_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3x_2-y_2\\y_2+z_2\\x_2-z_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3x_1-y_1+3x_2-y_2\\y_1+z_1+y_2+z_2\\x_1-z_1+x_2-z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\\(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\\(x_1+x_2)-(z_1+z_2)\end{pmatrix}\\
&= L\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) = L(\vec{u}_1+\vec{u}_2)
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

Sia $L: V^3 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x,y,z) = (3x - y, y + z, x - z).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

$$\begin{aligned} L(t\vec{u}_1) &= L\left(t\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} tx_1 \\ ty_1 \\ tz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3tx_1 - ty_1 \\ ty_1 + tz_1 \\ tx_1 - tz_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t(3x_1 - y_1) \\ t(y_1 + z_1) \\ t(x_1 - z_1) \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3x_1 - y_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 - z_1 \end{pmatrix} \\ &= t\,L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = t\,L(\vec{u}_1) \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Sia $L: V^3 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x, y, z) = (3x - y, y + z, x - z).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

- Scriviamo ora la matrice associata calcolando

$$L(\vec{e}_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad L(\vec{e}_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$L(\vec{e}_3) = L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

sicché $$A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Esercizio 3 (condizione necessaria).

Sia $L : V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ una appl. lin. .

Verificare che $L(\vec{0}_{\mathrm{m}}) = \vec{0}_{\mathrm{n}}$.

Esercizio 3 (condizione necessaria).

Sia $L: V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ una appl. lin. .
Verificare che $L(\vec{0}_{\mathsf{m}}) = \vec{0}_{\mathsf{n}}$.

Poniamo $\vec{v} = L(\vec{0}_{\mathsf{m}})$. Per la proprietà (2), si ha

$$L(t\,\vec{0}_{\mathsf{m}}) = t\,L(\vec{0}_{\mathsf{m}}) = t\,\vec{v}.$$

Esercizio 3 (condizione necessaria).

Sia $L: V^{\mathsf{m}} \to V^{\mathsf{n}}$ una appl. lin. .
Verificare che $L(\vec{0}_{\mathsf{m}}) = \vec{0}_{\mathsf{n}}$.

Poniamo $\vec{v} = L(\vec{0}_{\mathsf{m}})$. Per la proprietà (2), si ha

$$L(t\,\vec{0}_{\mathsf{m}}) = t\,L(\vec{0}_{\mathsf{m}}) = t\,\vec{v}.$$

D'altra parte $t\,\vec{0}_{\mathsf{m}} = \vec{0}_{\mathsf{m}}$ e dunque

$$L(t\,\vec{0}_{\mathsf{m}}) = L(\vec{0}_{\mathsf{m}}) = \vec{v}.$$

Esercizio 3 (condizione necessaria).

Sia $L\colon V^{\mathrm{m}} \to V^{\mathrm{n}}$ una appl. lin. .
Verificare che $L(\vec{0}_{\mathrm{m}}) = \vec{0}_{\mathrm{n}}$.

Poniamo $\vec{v} = L(\vec{0}_{\mathrm{m}})$. Per la proprietà (2), si ha

$$L(t\,\vec{0}_{\mathrm{m}}) = t\,L(\vec{0}_{\mathrm{m}}) = t\,\vec{v}.$$

D'altra parte $t\,\vec{0}_{\mathrm{m}} = \vec{0}_{\mathrm{m}}$ e dunque

$$L(t\,\vec{0}_{\mathrm{m}}) = L(\vec{0}_{\mathrm{m}}) = \vec{v}.$$

Ne segue che $t\vec{v} = \vec{v}$ per ogni scalare $t \in \mathbb{R}$, sicché necessariamente $\vec{v} = \vec{0}_{\mathrm{n}}$.

Esercizio 4.

Sia $L: V^2 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x, y, z) = (3x - y, y + 1).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Esercizio 4.

Sia $L\colon V^2 \to V^2$ la funzione di legge
$$L(x,y,z) = (3x - y, y+1).$$
Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Nella legge di L appare una costante additiva. Questa osservazione ci convince che L non è una appl. lin. Per dimostrarlo, verifichiamo che non vale la condizione necessaria vista nell'Esercizio 3.

Esercizio 4.

Sia $L: V^2 \to V^2$ la funzione di legge
$$L(x, y, z) = (3x - y, y + 1).$$
Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Nella legge di L appare una costante additiva. Questa osservazione ci convince che L non è una appl. lin. Per dimostrarlo, verifichiamo che non vale la condizione necessaria vista nell'Esercizio 3.

Nella fattispecie, $L(\vec{0}_2) = L(0,0) = (0,1) \neq (0,0) = \vec{0}_2$.

Esercizio 4.

Sia $L : V^2 \to V^2$ la funzione di legge

$$L(x, y, z) = (3x - y, y + 1).$$

Stabilire se è una appl. lin. e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata.

Nella legge di L appare una costante additiva. Questa osservazione ci convince che L non è una appl. lin.
Per dimostrarlo, verifichiamo che non vale la condizione necessaria vista nell'Esercizio 3.
Nella fattispecie, $L(\vec{0}_2) = L(0,0) = (0,1) \neq (0,0) = \vec{0}_2$.

Osservazione

La condizione dell'Esercizio 3 è necessaria, ma non sufficiente!

Infatti l'appl. dell'Esercizio 1 la verifica, ma non è lineare.

Esercizio 5.

Siano $L : V^2 \to V^3$ l'appl. lin. di legge

$$L(x,y) = (3y, x-y, 2x+y)$$

e $T : V^2 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scrivere, quando possibile, legge e matrice associata alle appl. lin. $L \circ T$ e $T \circ L$.

Esercizio 5.

Siano $L : V^2 \to V^3$ l'appl. lin. di legge

$$L(x, y) = (3y, x - y, 2x + y)$$

e $T : V^2 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scrivere, quando possibile, legge e matrice associata alle appl. lin. $L \circ T$ e $T \circ L$.

L'unica composizione possibile è $L \circ T : V^2 \to V^3$.

Esercizio 5.

Siano $L : V^2 \to V^3$ l'appl. lin. di legge
$$L(x,y) = (3y, x-y, 2x+y)$$
e $T : V^2 \to V^2$ l'appl. lin. associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Scrivere, quando possibile, legge e matrice associata alle appl. lin. $L \circ T$ e $T \circ L$.

L'unica composizione possibile è $L \circ T : V^2 \to V^3$.

- Scriviamo dapprima tutto in forma matriciale.

matr. ass. a L (si ricava dalla legge): $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

matr. ass. a T (nota): $\quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- La matr. ass. a $L \circ T$ è dunque

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3/2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matr. ass. a $L \circ T$ è dunque

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3/2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- La legge di $L \circ T$ è dunque

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3/2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 6y \\ 3x/2 - 2y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.

Sia $L: V^2 \to V^2$ l'appl. lin. di legge

$$L(x, y) = (3y, x - y).$$

Stabilire se L è invertibile e, se possibile, scrivere la legge dell'inversa.

Esercizio 6.

Sia $L: V^2 \to V^2$ l'appl. lin. di legge

$$L(x,y) = (3y, x-y).$$

Stabilire se L è invertibile e, se possibile, scrivere la legge dell'inversa.

- Scriviamo dapprima tutto in forma matriciale.

matr. ass. a L (si ricava dalla legge): $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 6.

Sia $L\colon V^2 \to V^2$ l'appl. lin. di legge
$$L(x, y) = (3y, x - y).$$
Stabilire se L è invertibile e, se possibile, scrivere la legge dell'inversa.

- Scriviamo dapprima tutto in forma matriciale.

matr. ass. a L (si ricava dalla legge): $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matr. ass. è invertibile, poiché $\det(A) = -3 \neq 0$ e la matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6.

Sia $L: V^2 \to V^2$ l'appl. lin. di legge
$$L(x, y) = (3y, x - y).$$
Stabilire se L è invertibile e, se possibile, scrivere la legge dell'inversa.

- Scriviamo dapprima tutto in forma matriciale.

matr. ass. a L (si ricava dalla legge): $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matr. ass. è invertibile, poiché $\det(A) = -3 \neq 0$ e la matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

- Dunque L è invertibile, e la sua inversa è l'appl. lin. associata a A^{-1}, cioè

$$L^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/3 + y \\ x/3 \end{pmatrix}$$