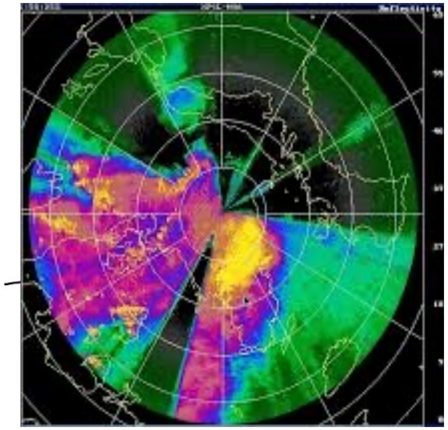
+

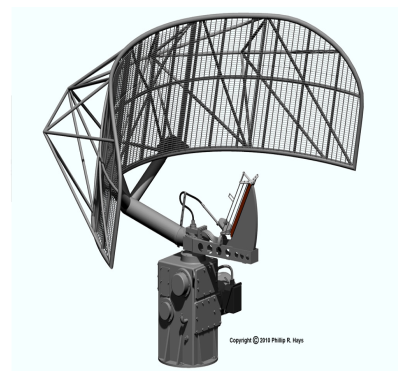
Radar

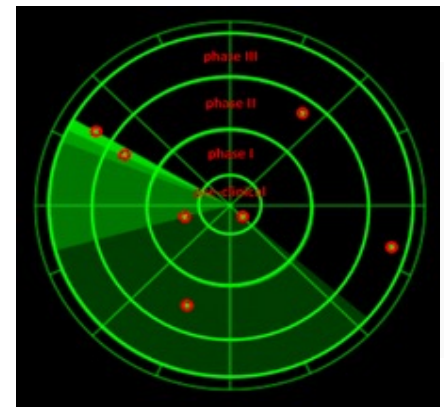
Corso di Laurea Magistrale:
Scienze e Tecnologie della Navigazione

Anno Accademico: 2022/2023
Crediti: 6 CFU
Docente: Giampaolo Ferraioli

Materiale Didattico Online – DM 752-2021







UNIVERSITÀ PARTHENOPE
DiST
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Università degli Studi di Napoli Parthenope

Cenni di Teoria dei Segnali e di Teoria dei Fenomeni Aleatori

UNIVERSITÀ PARTHENOPE
DiST
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Sommario

- Definizione di Segnale
- Classificazione di Segnali
- Caratterizzazione sintetica dei Segnali
- Durata Temporale
- Esempi di Segnali
- Potenza di un Segnale
- Trasformata di Fourier
- Filtri
- Modulazione Analogica
- Demodulazione
- Variabile Aleatoria
- PMF, CDF, PDF
- Segnali Aleatori

Definizione di Segnale

Un segnale è un modello matematico che descrive la variazione di una o più grandezze in funzione di altre grandezze.

Un segnale può essere descritto da una funzione di una o più variabili [*x*(*t*), *x*(*j*,*k*)].

$$x : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$$

Esempi di segnali: segnale acustico, segnale di un elettrocardiografo, il segnale radio, il segnale luminoso emesso da una televisione,…

L'elettrocardiogramma può essere schematizzato come un segnale $x(t)$, dove la variabile indipendente t rappresenta il tempo e la variabile dipendente x rappresenta la tensione.

Classificazione dei Segnali

I segnali possono essere classificati in segnali deterministici e in segnali aleatori.

Un segnale si dice deterministico se è perfettamente descritto da una funzione (es: generatore di forme d'onda)

Un segnale si dice aleatorio se non è possibile conoscere a priori il valore assunto dal segnale in un certo istante. Non può essere descritto da una funzione precisa (es: segnale raccolto da sensori geofisici). Sono affetti da un certo grado di incertezza

Classificazione dei Segnali

Una Classificazione dei Segnali può essere fatta in base ai valori assunti dalla variabile indipendente.

Segnali a tempo continuo $x(t)$: il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme dei numeri Reali. La variabile indipendente può assumere con continuità tutti i valori appartenenti ad un certo intervallo (es: elettrocardiogramma)

Segnali a tempo discreto $x(n)$: il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme dei numeri interi. La variabile indipendente può assumere valori all'interno di un insieme discreto (es: serie storica)

Classificazione dei Segnali

Una Classificazione dei Segnali può essere fatta anche in base ai valori assunti dalla variabile dipendente.

Segnali ad ampiezza continua: la variabile dipendente varia in un insieme continuo. Possono assumere con continuità tutti i valori reali all'interno di un intervallo (es: segnale acustico)

Segnali ad ampiezza discreta: la variabile dipendente varia in un insieme discreto. Possono assumere i valori all'interno di un insieme discreto (es: semaforo, segnali logici)

Un Segnale a tempo continuo e ampiezza continua si dice Analogico. Un Segnale a tempo discreto e ampiezza discreta si dice Numerico (o Digitale).

Per passare da un Segnale Analogico ad uno Digitale occorre la Conversione A/D

+ Caratterizzazione Sintetica dei Segnali

Un segnale può essere descritto completamente mediante una funzione.

In alcuni casi è sufficiente una descrizione sintetica del segnale.

I principali parametri che vengono utilizzati per descrivere sinteticamente un segnale sono:

- Durata Temporale
- Energia e Potenza

Tali parametri permettono una ulteriore classificazione dei segnali

Durata Temporale

La durata temporale DT di un segnale $x(t)$ (o $x(n)$) è l'intervallo di tempo in cui il segnale $x(t)$ (o $x(n)$) assume valori *non trascurabili*

La durata temporale di un segnale permette di classificare i segnali in tre famiglie:

Segnali di durata rigorosamente limitata

Segnali di durata praticamente limitata

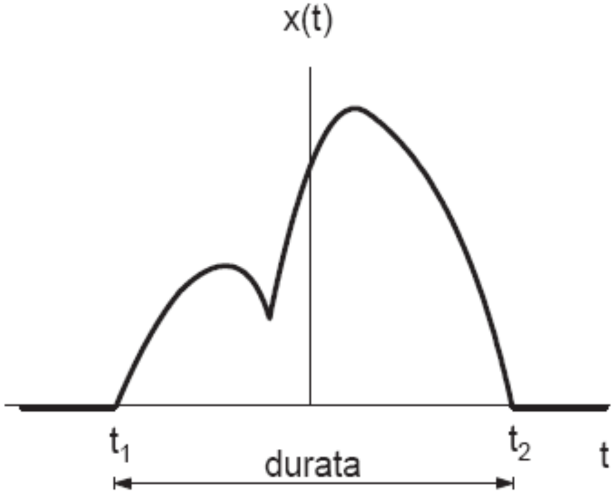
Segnali di durata non limitata

Durata Temporale

Un segnale $x(t)$ si dice di durata rigorosamente limitata se esistono due numeri t_1 e t_2 con $t_2>t_1$, tali che il segnale è identicamente nullo al di fuori dell'intervallo di tempo (t_1,t_2)

$$x(t)=0 \quad \forall t \notin (t_1,t_2)$$

Si considerano *trascurabili* solo i valori nulli del segnale



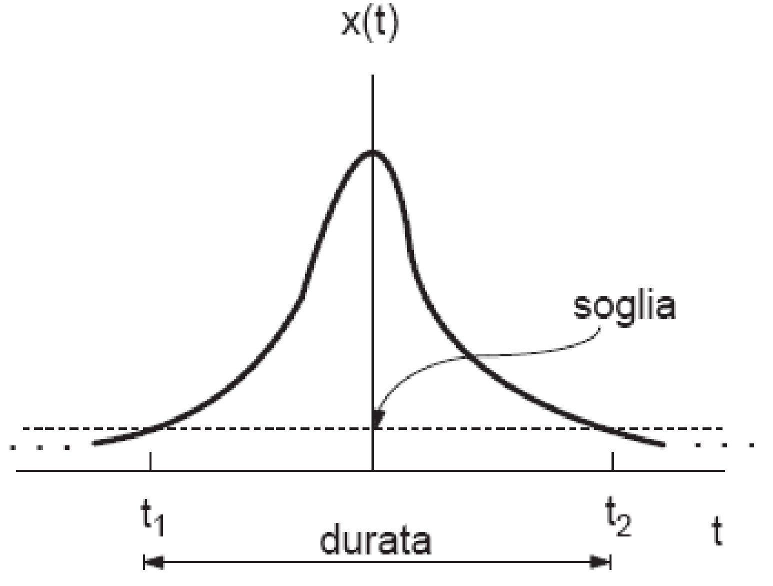
$$\Delta T = t_2 - t_1$$

Durata Temporale

Alcuni segnali non si annulla identicamente al di fuori di un intervallo, ma decadono asintoticamente a zero.

Tali segnali prendono il nome di segnali di durata praticamente limitata.

Si considerano *trascurabili* solo i valori al di sotto di una certa soglia



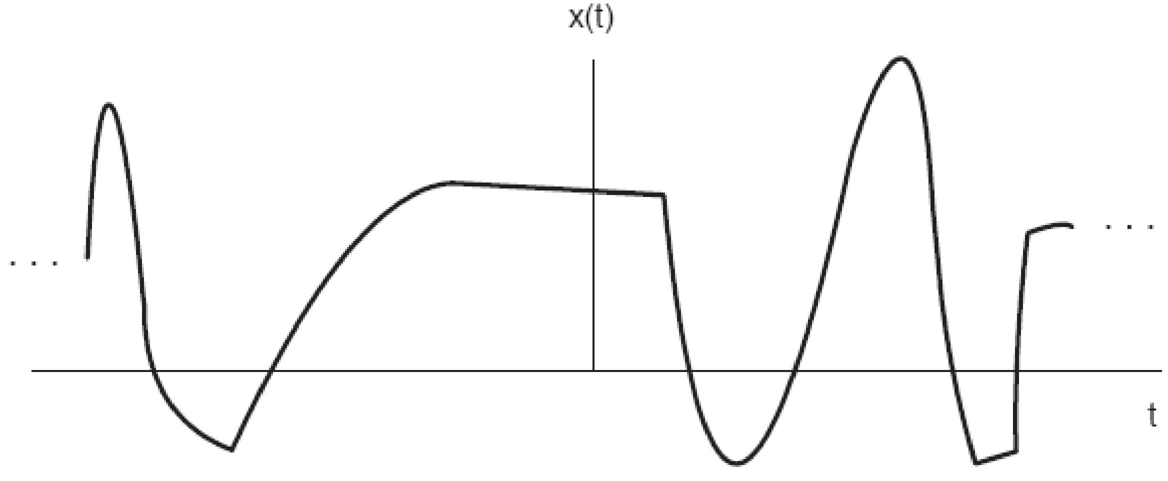
$$\Delta T = t_2 - t_1$$

Durata Temporale

Alcuni segnali non si annulla identicamente al di fuori di un intervallo e non decadono asintoticamente a zero.

Risulta, quindi, impossibile stabilire una soglia per considerare trascurabili alcuni valori rispetto ad altri. Tali segnali prendono il nome di segnali di durata non limitata.

Tutti i valori assunti dal segnale sono considerati non *trascurabili*



$\Delta T = +\infty$

Durata Temporale

Una famiglia particolarmente importante tra i segnali di durata non limitata è quella dei segnali periodici

Un segnale $x(t)$ si dice periodico se esiste un valore T_0 tale che:

$$x(t) = x(t + T_0) \qquad \forall t \in R$$

T_0 prende il nome di periodo fondamentale del segnale

Se tale valore non esiste, i segnali si dicono aperiodici

Esempi di Segnale

- Finestra Rettangolare
- Segnale cosinusoidale

Potenza di un Segnale

Spesso nella pratica viene utilizzata una misura logaritmica adimensionale della Potenza.

Tale misura prende il nome di Potenza in Decibel ed è definita come:

$$P_x\big|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_0}\right)$$

P_0 è una potenza di riferimento

Un rapporto Potenza/Potenza di riferimento pari ad 1 corrisponde a 0dB, pari a 2 corrisponde a 3dB, pari a 10 corrisponde a 10dB, pari a 100 corrisponde a 20dB,…

Trasformata di Fourier

La Trasformata di Fourier permette di stabilire un legame biunivoco tra il segnale e la sua Trasformata di Fourier (FT)

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

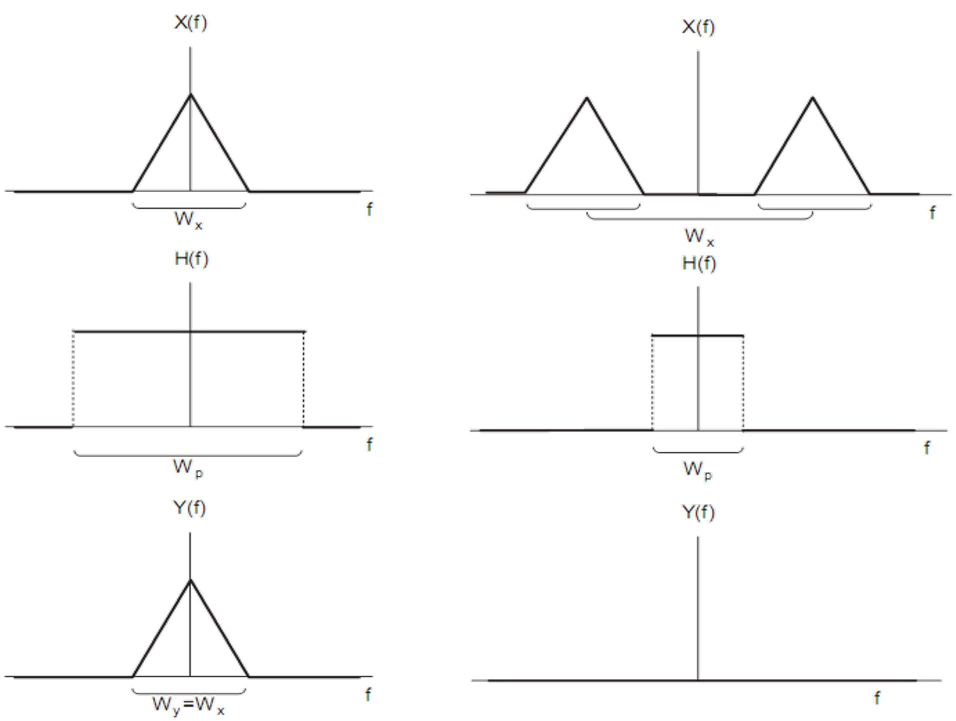
La conoscenza del segnale in ambito temporale è equivalente alla conoscenza del segnale in ambito frequenziale

La FT è generalmente complessa e si esprime in termini di modulo e fase. La rappresentazione del modulo della FT prende il nome di Spettro di Ampiezza. La rappresentazione della fase della FT prende il nome di Spettro di Fase

Le componenti frequenziali per le quali il modulo assume valori significativi contribuiscono maggiormente alla sintesi del segnale

Filtri in Frequenza

I filtri permettono di trattenere alcune componenti frequenziali e "lasciare passare" altre.



A seconda delle componenti che vengono fatte passare, i filtri si distinguono in: Filtri Passa-Basso, Passa-Alto e Passa-Banda

+ Modulazione Analogica

Sia $x(t)$ il segnale analogico da trasmettere.

Il messaggio viene trasmesso andando ad alterare le caratteristiche di un segnale portante (*carrier*) della forma

$$c(t) = \cos(2\pi f_c t)$$

La modulazione della portante $c(t)$ viene effettuata per raggiungere i seguenti obiettivi:

1. Traslazione in frequenza: il segnale passa-basso è traslato nella banda passante del canale
2. Trasmissione multipla di più segnali sullo stesso canale mediante FDM (Frequency Division Multiplexing)
3. Espansione della banda del segnale in modo da accrescere l'immunità al rumore

+ Modulazione Analogica

Nella modulazione d'ampiezza il messaggio $m(t)$ è impresso sull'ampiezza della portante $c(t)$. Esistono diversi tipi di modulazione di ampiezza, con diverse caratteristiche spettrali.

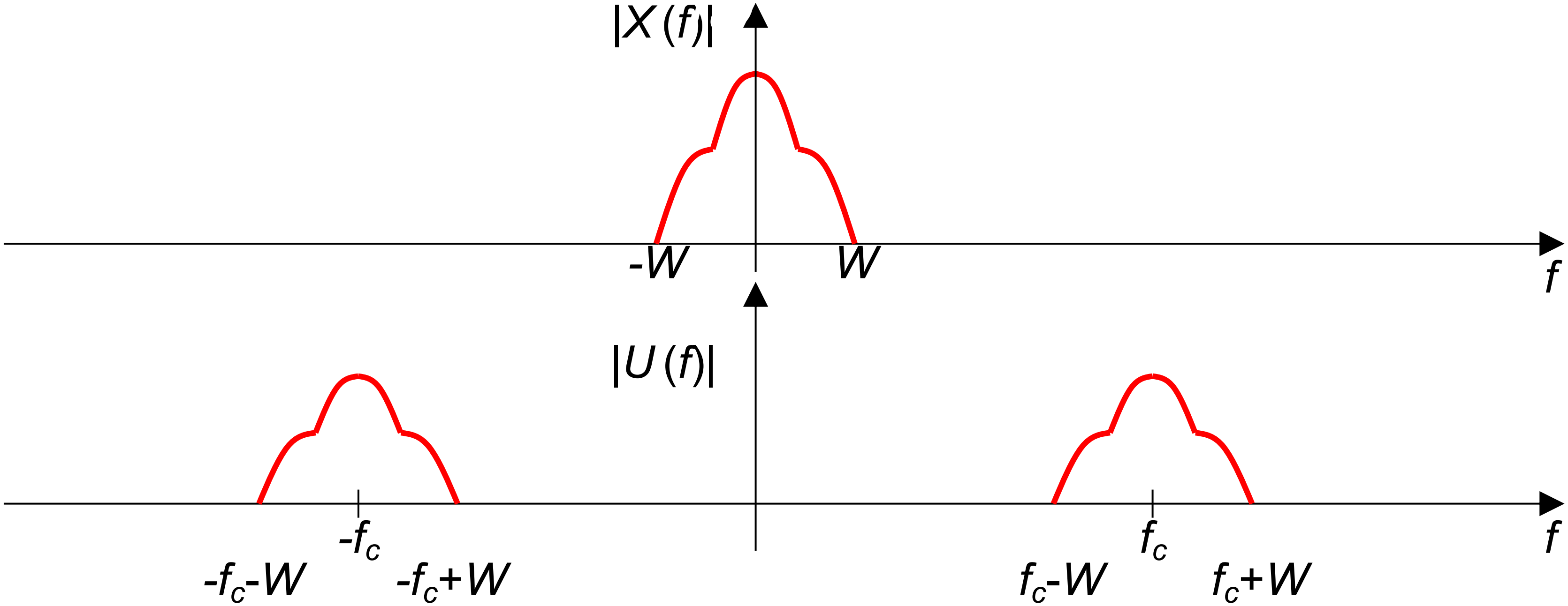
La modulazione DSB-SC (Double Side Band – Suppressed Carrier) consiste nel prendere:

$$u(t) = x(t) \cdot c(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t)$$

in cui è evidente il ruolo di $m(t)$ che va a cambiare l'ampiezza della portante $c(t)$.
$x(t)$ prende il nome di segnale modulante
$u(t)$ di segnale modulato.
f_c è la frequenza della portante

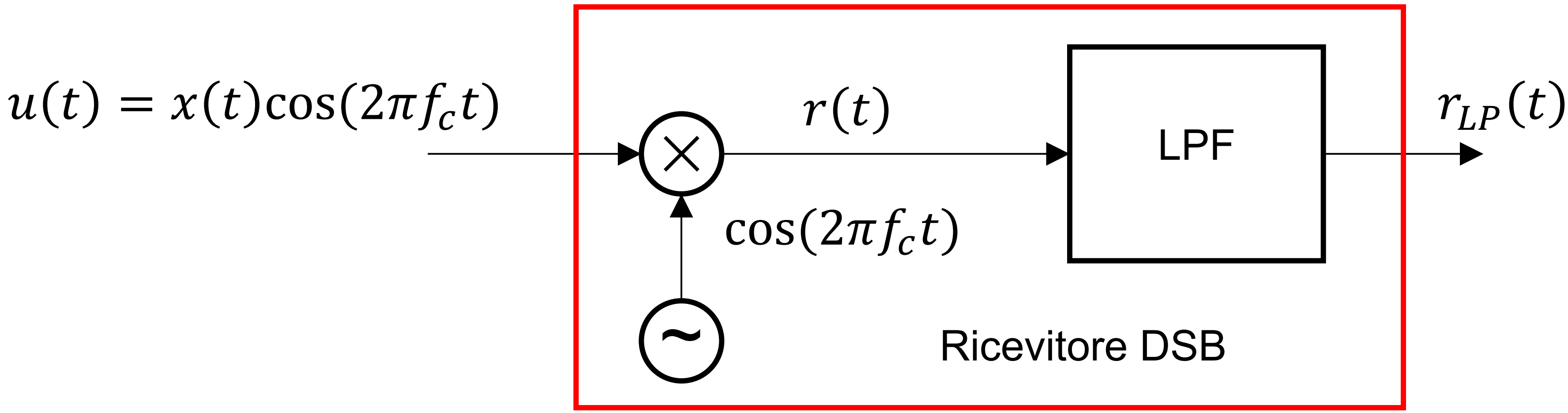
+ Modulazione Analogica

La sua trasformata di Fourier del segnale modulato sarà data da:



Demodulazione Analogica

Il segnale DSB viene demodulato prima moltiplicandolo per un segnale sinusoidale generato localmente

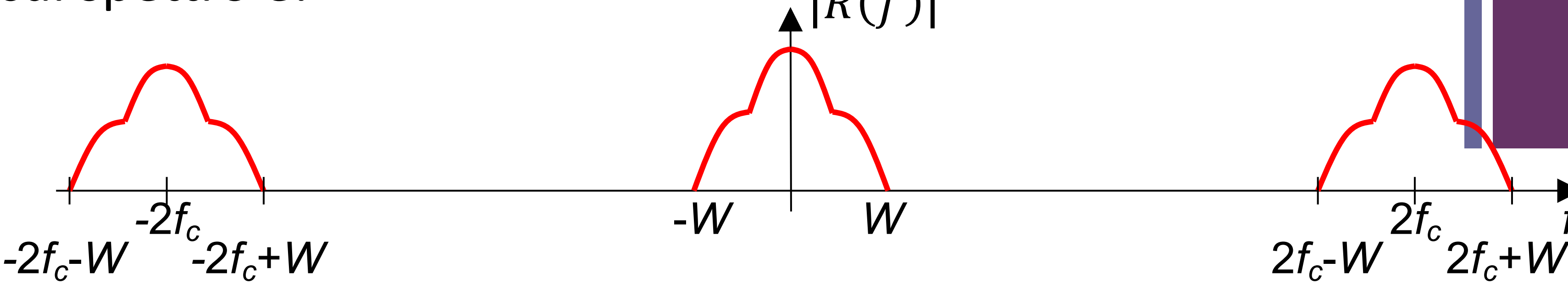


$$r(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t) =$$

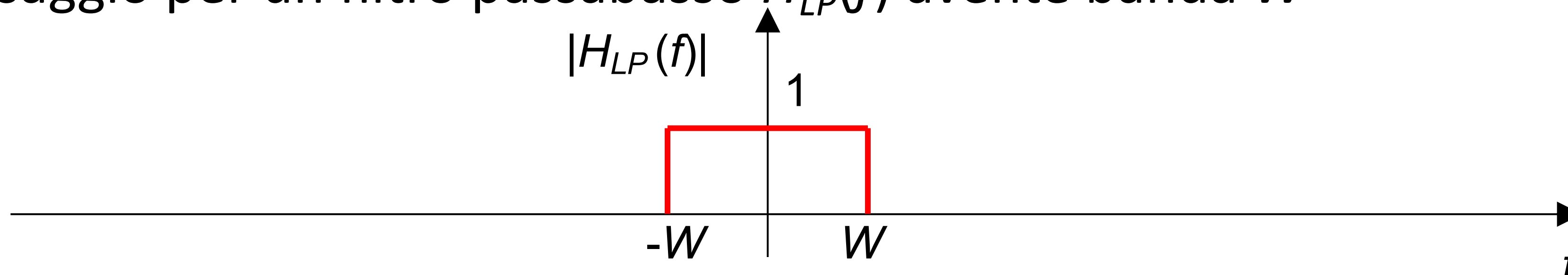
$$= \frac{1}{2} x(t)\cos(4\pi f_c t) + \frac{1}{2} x(t)$$

Demodulazione Analogica

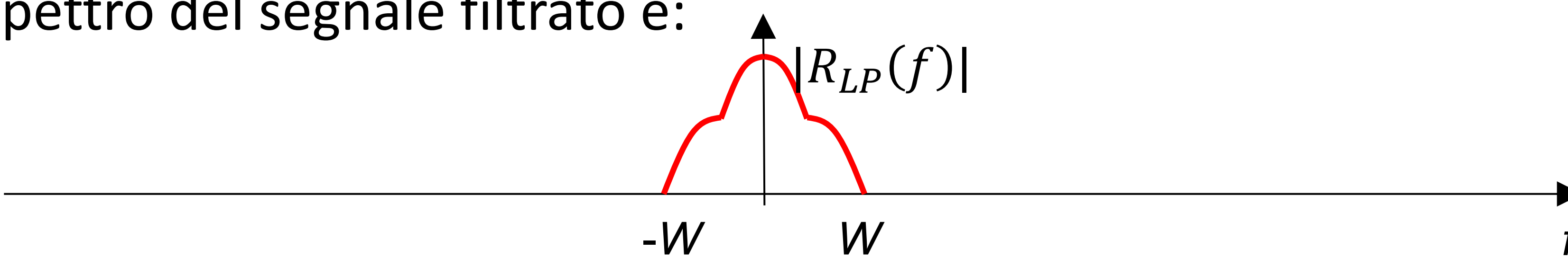
Il cui spettro è:



Passaggio per un filtro passabasso $H_{LP}(f)$ avente banda W



Lo spettro del segnale filtrato è:

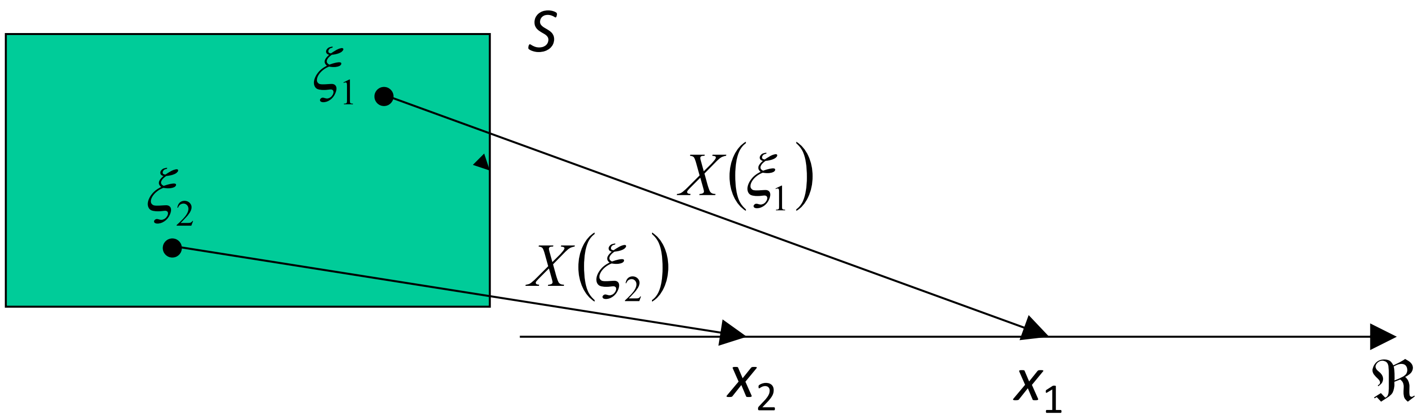


La cui espressione nel dominio del tempo è:

$$r_{LP}(t) = \frac{1}{2}x(t)$$

Variabile Aleatoria

Il discorso sulla probabilità può essere semplificato introducendo la nozione di variabile aleatoria (v.a.)



È una legge di corrispondenza tra lo spazio dei campioni S e un numero reale.

$$X : \xi \in S \to X(\xi) = x \in \Re$$

Funzione di Distribuzione Cumulativa

Introduciamo ora alcuni eventi particolari definiti utilizzando la variabile aleatoria. In particolare introduciamo l'evento:

$$\{\xi \in S : X(\xi) \leq x\} \subseteq S$$

che in maniera più sintetica indichiamo:

$$\{X \leq x\} \equiv \{\xi \in S : X(\xi) \leq x\}$$

Definiamo la funzione di distribuzione cumulativa, o più sinteticamente CDF, la funzione $F_X(x)$:

$$F_X : x \in \Re \to P(\{X \leq x\})$$

Funzione di Distribuzione Cumulativa

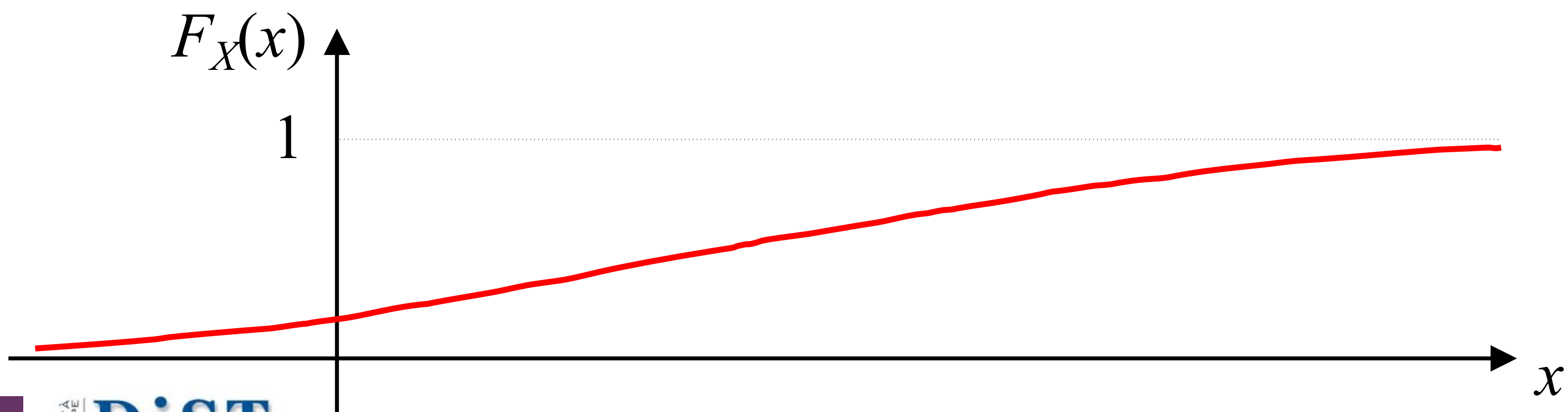
La CDF è una funzione reale di variabile reale. Il viceversa, ovviamente, non è sempre vero.

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0\,; \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

3) La $F_X(x)$ è una funzione non decrescente di x

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad se \quad x_1 \leq x_2$$



Classificazione di una variabile aleatoria

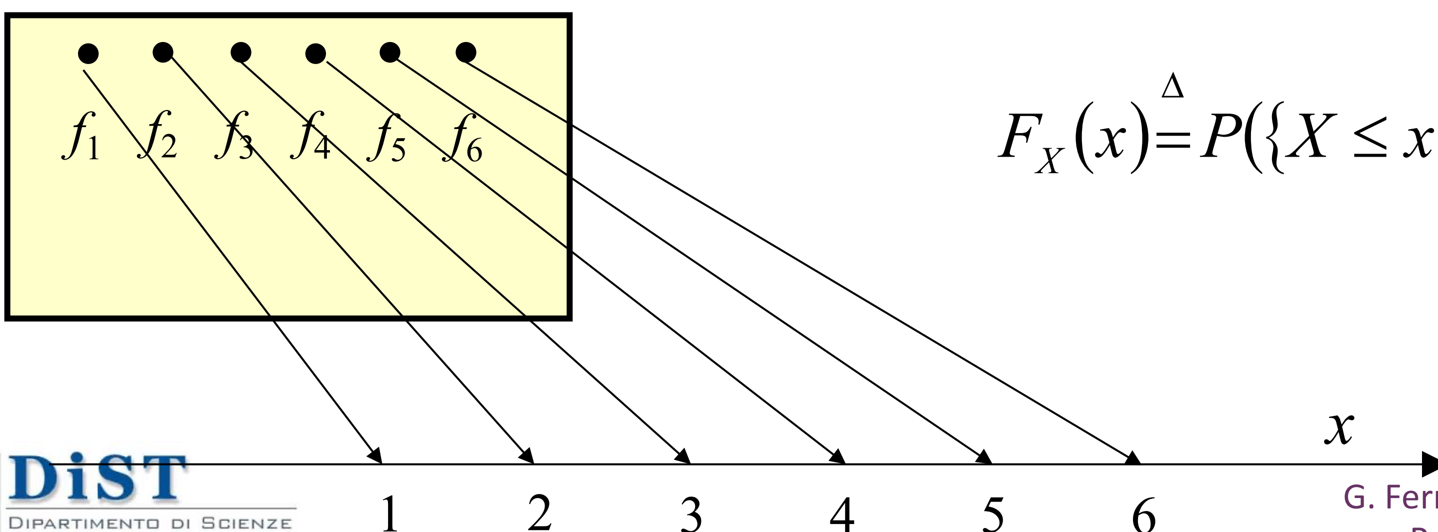
Le variabili aleatorie (v.a.) si classificano in base alle relative $F_X(x)$.

v.a. discreta se $F_X(x)$ è costante a tratti

v.a. continua se $F_X(x)$ è continua

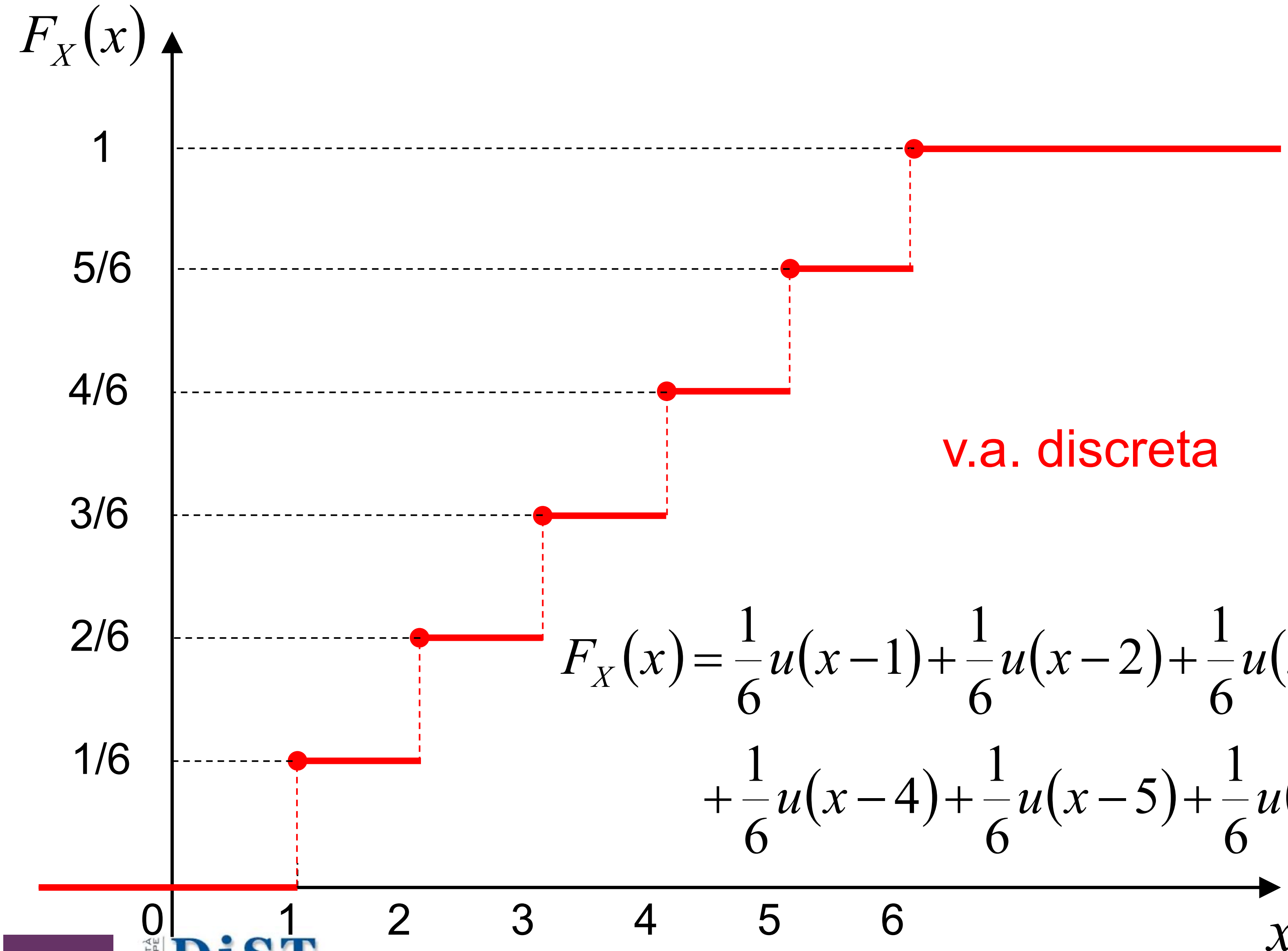
v.a. mista se $F_X(x)$ è in parte continua, in parte costante a tratti

Esempio: Calcolare la CDF per l'esperimento lancio di un dado, su cui è stata definita la seguente v.a.



$$F_X(x) \overset{\Delta}{=} P(\{X \le x\})$$

Funzione di Distribuzione Cumulativa



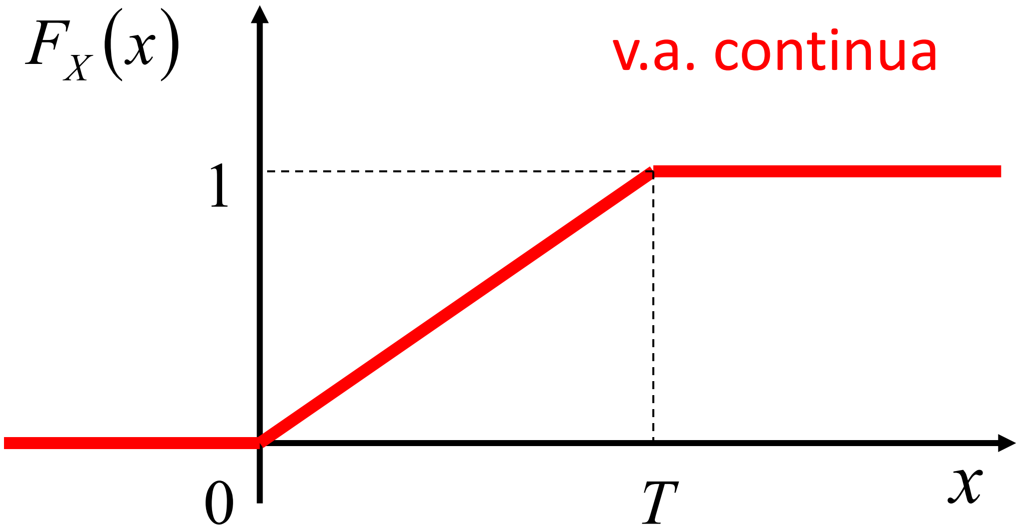
v.a. discreta

$$F_X(x) = \frac{1}{6}u(x-1) + \frac{1}{6}u(x-2) + \frac{1}{6}u(x-3) + \frac{1}{6}u(x-4) + \frac{1}{6}u(x-5) + \frac{1}{6}u(x-6)$$

Funzione di Distribuzione Cumulativa

Calcolare la CDF della variabile aleatoria associata all'istante in cui il treno arriva in stazione nell'intervallo temporale $(0,T)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{T} & 0 \le x \le T \\ 1 & x > T \end{cases}$$



$$X \sim U(0,T)$$

v.a. uniforme

Funzione Densità di Probabilità

Consideriamo $F_X(x)$, e supponiamo che sia generalmente derivabile in x. La sua derivata prima è la funzione densità di probabilità (pdf).

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Proprietà della pdf

$$f_X(x) \geq 0 \qquad\qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda) d\lambda$$

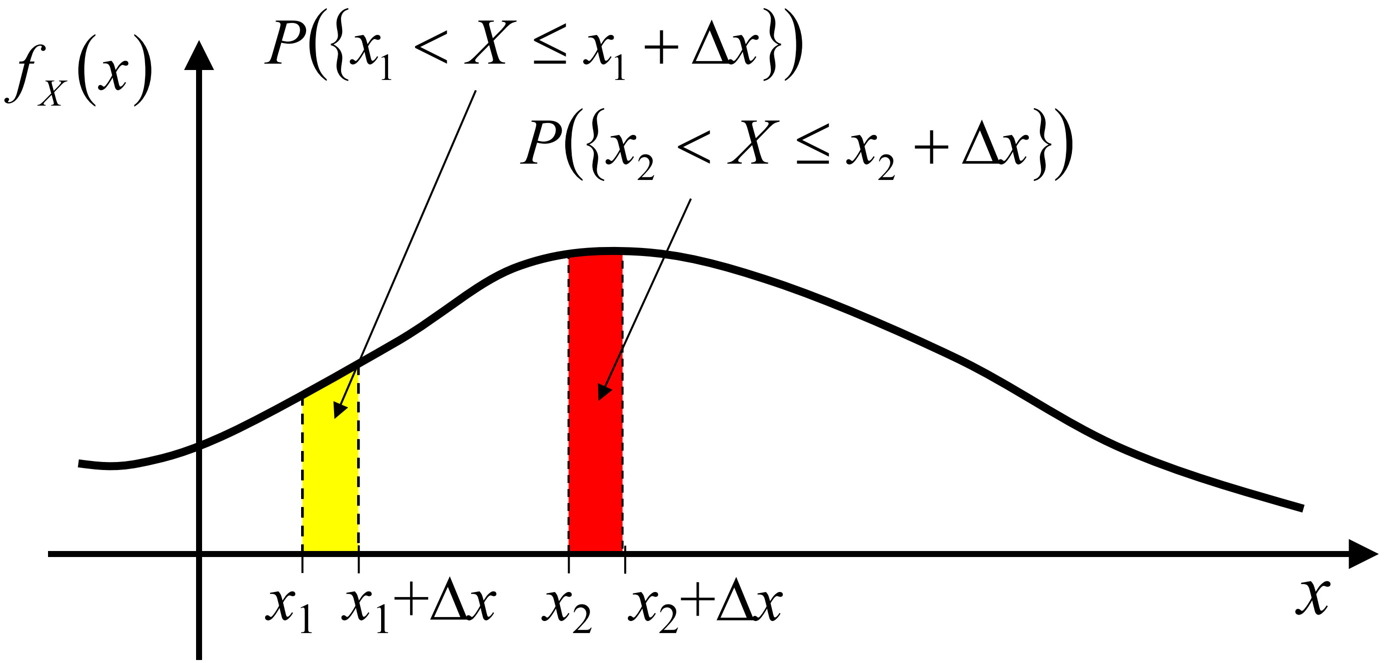
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = F(+\infty) = 1$$

DiST
Dipartimento di Scienze e Tecnologie
Università Parthenope

Funzione Densità di Probabilità

$$f_X(x)\Delta x \cong P(\{x < X \le x + \Delta x\})$$

purché Δx sia sufficientemente piccolo.



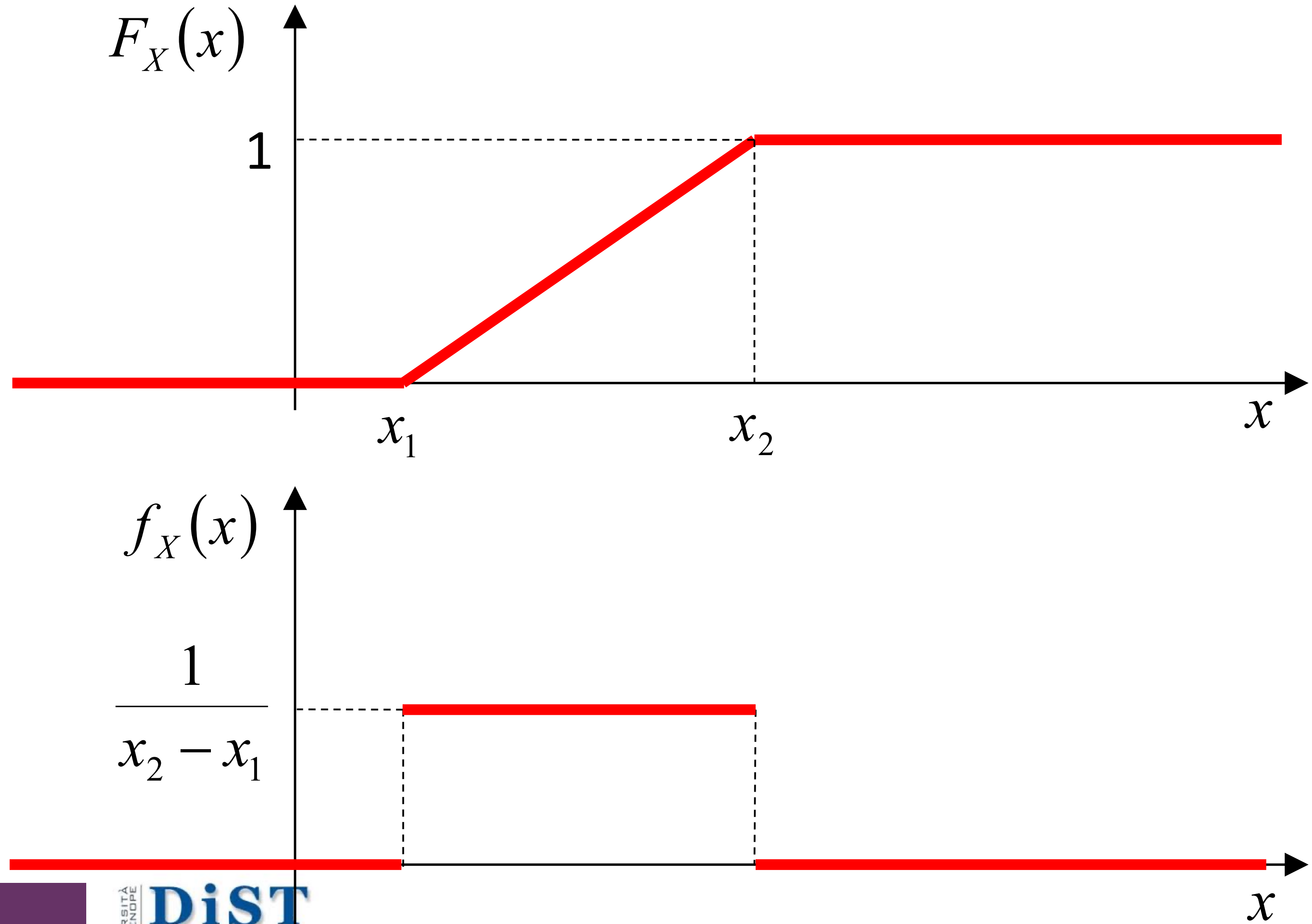
$$P(\{x_2 < X \le x_2 + \Delta x\}) > P(\{x_1 < X \le x_1 + \Delta x\})$$

La probabilità si "addensa" maggiormente in corrispondenza dei valori della variabile aleatoria che corrispondono ai valori più alti della pdf.

+ Funzione Densità di Probabilità

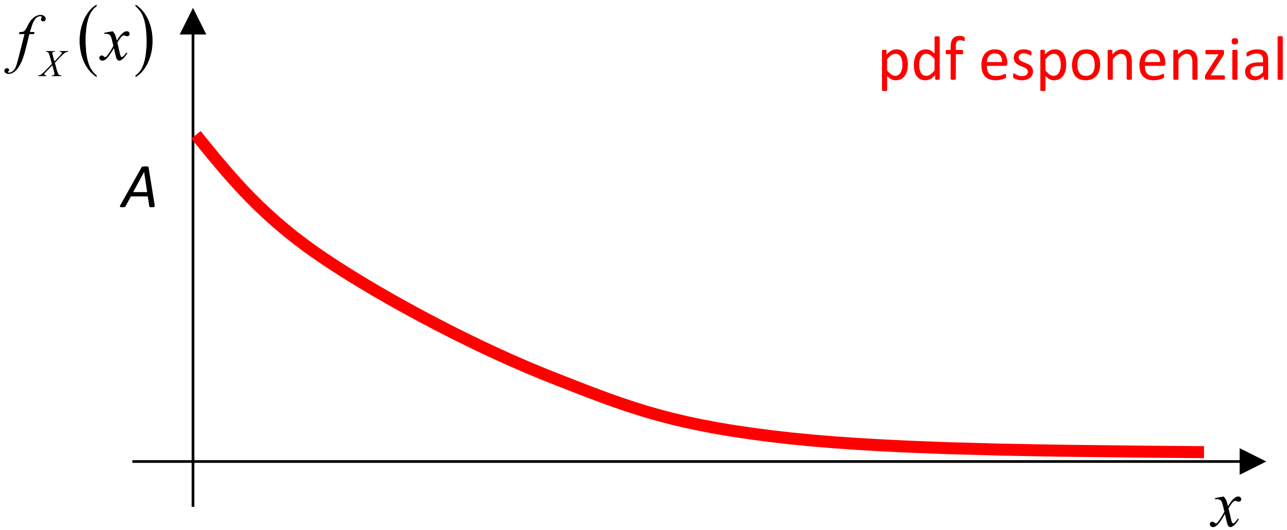
$X \sim U(x_1, x_2)$

Variabile aleatoria uniforme



Funzione Densità di Probabilità

$$X \sim \mathcal{E}_X(\lambda)$$



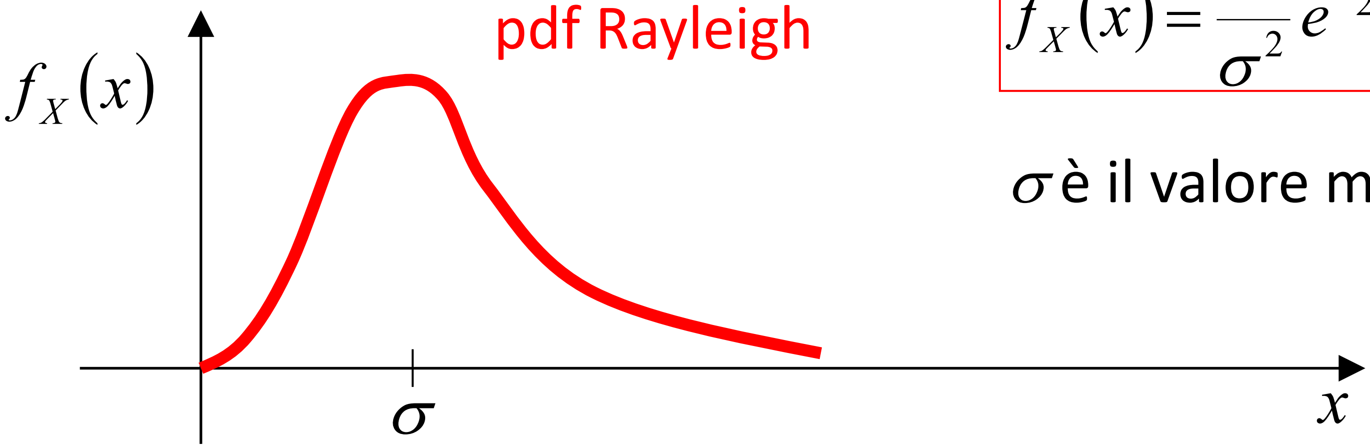
pdf esponenziale

Funzione Densità di Probabilità

$X \sim R(\sigma^2)$

pdf Rayleigh

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x)$$

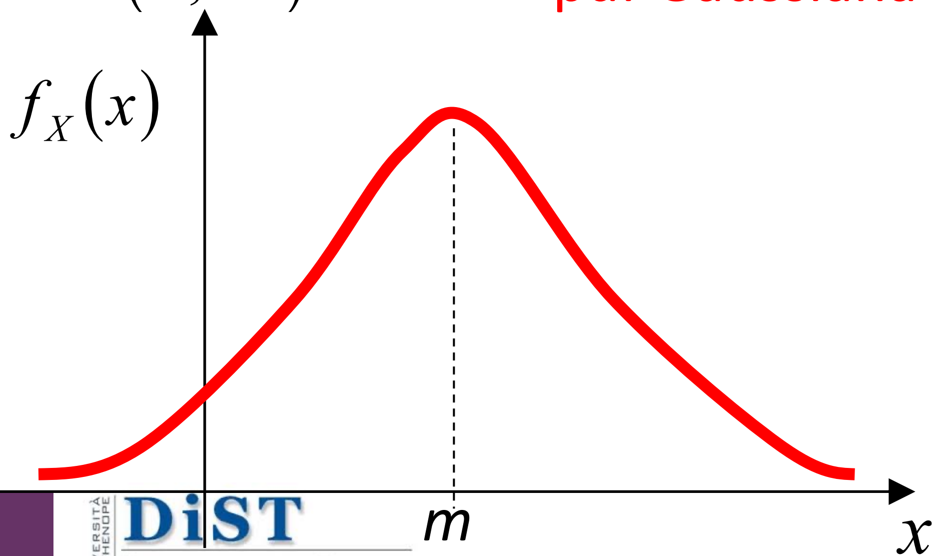


σ è il valore modale

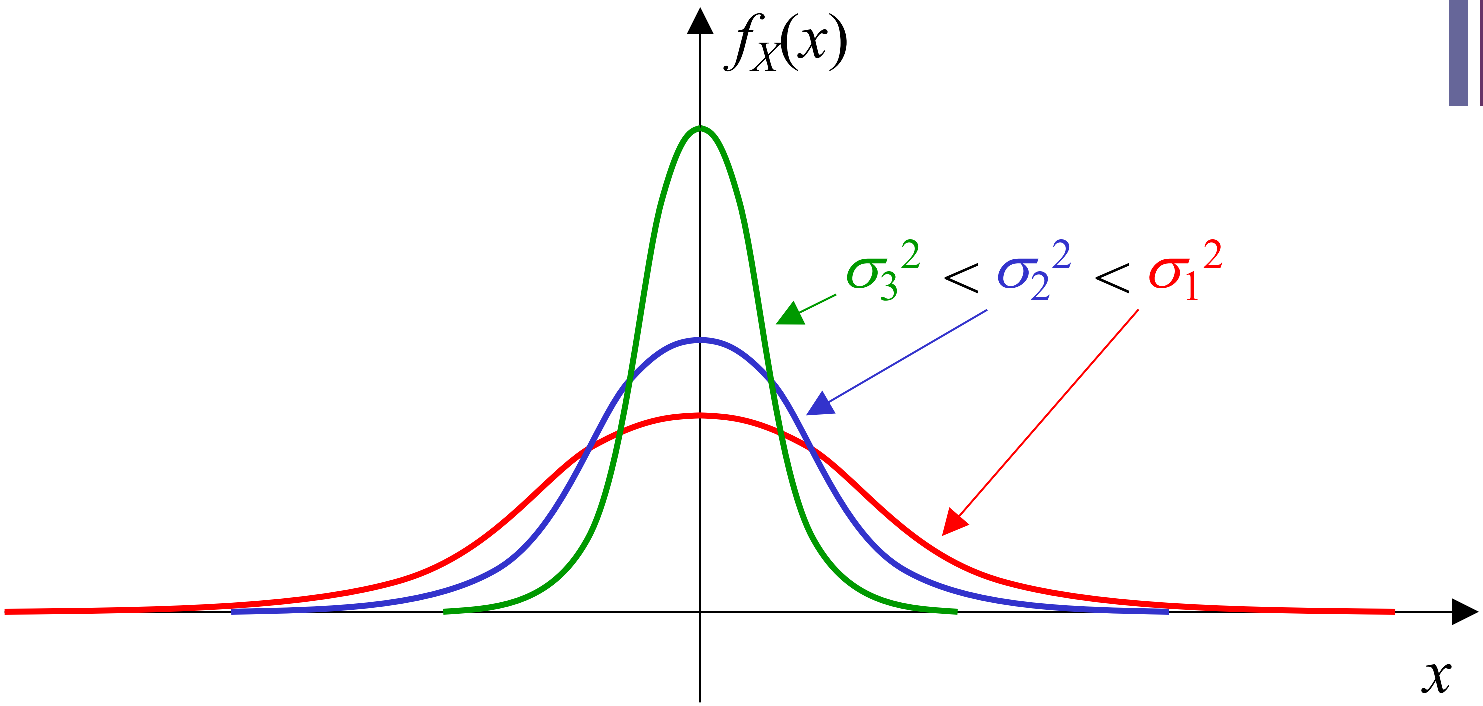
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

pdf Gaussiana o normale

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Media e Varianza



La media (o valore atteso) è il baricentro della distribuzione
La varianza è un indicatore della dispersione intorno al valore medio statistico

Segnali Aleatori

I segnali possono essere classificati in segnali deterministici e in segnali aleatori.

Un segnale si dice deterministico se è perfettamente descritto da una funzione (es: generatore di forme d'onda). Può essere descritto in forma grafica, forma analitica, forma tabellare

Un segnale si dice aleatorio se non è possibile conoscere a priori il valore assunto dal segnale in un certo istante. Non può essere descritto da una funzione precisa. Sono affetti da un certo grado di incertezza.

In molte situazioni l'assunzione deterministica dei segnali tempo-varianti non è valida (es: rumore termico, trasmissione di onde radio). L'utilizzo di funzioni aleatorie è più opportuna.

In particolare le funzioni aleatorie sono utili nella caratterizzazione delle sorgenti di informazione (voce, immagini)

+ Segnali Aleatori

Un segnale aleatorio è anche detto processo aleatorio o processo stocastico. Può essere visto ad ogni istante di tempo $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, per tutte le t appartenenti ad R, come una collezione di variabili aleatorie:

$$\{X(t_1), X(t_2), X(t_3), \ldots X(t_n)\}$$

Ad ogni istante t, il comportamento del segnale può essere descritto mediante una variabile aleatoria.

Il valore del cambio di domani non è noto. Non posso caratterizzarlo in maniera deterministica. È caratterizzato da un certo grado di incertezza (è aleatorio). È possibile descriverlo in termini statistici.

Segnali Aleatori

Es: rumore termico

Fissato un istante di tempo t_1, il segnale $X(t_1)$ è una v.a. Gaussiana a media nulla e varianza unitaria