Studio del grafico di una funzione

Per disegnare il grafico di una funzione $f(x)$, si procede nel modo seguente:

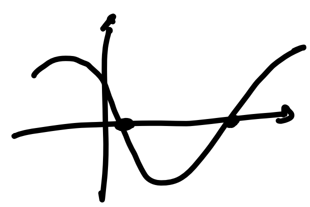
A.) Si determina il dominio di $f(x)$: si classificano <u>le eventuali discontinuità</u>

B.) Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria : pari , dispari , periodica

$$f(-x) = f(x) \qquad f(-x) = -f(x)$$

C.) Quando è <u>semplice</u> farlo si studia il segno di $f(x)$

$f(x) \geq 0$: intersezioni della funzione con l'asse delle x



D. Eventuali asintoti orizzontali o verticali (calcolo dei limiti alla frontiera del dominio di f)

Ricordiamo : $y = l$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$

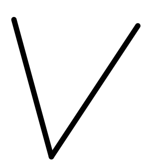
se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$

Gli asintoti verticali si trovano calcolando il limite per $x \to x_0$ (eventualmente $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$) quando il risultato del limite è infinito:

$$x = x_0 \text{ as. verticale} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Si determinano gli <u>eventuali</u> asintoti obliqui.

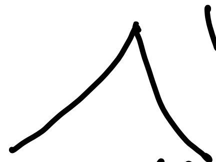
E.) Calcolare $f'(x)$ nei punti in cui esiste.



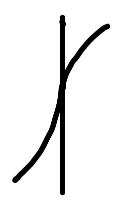
angolosi

($|x|$)

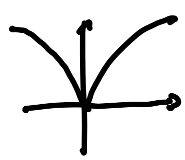
$\sqrt[3]{x^2}$

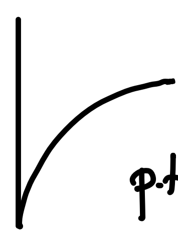


cuspidali



flesso a tangente verticale





p.ti a tangente verticale ($\sqrt{x}$)

Studiare i punti in cui f è continua ma <u>non</u> derivabile e stabilirne la natura

F. Studiare il segno di $f'(x)$ per ottenere le informazioni sulla monotonia di f e sui punti di massimo e minimo relativo per f

G. Studiare il segno di f'' per determinare gli intervalli di convessità e concavità e determinare se esistono, gli eventuali flessi.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$x - 1 \neq 0 \iff \underline{x \neq 1}$

$x_0 = 1$?

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = \qquad = -\infty$$

$$= 2 \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} \rightsquigarrow \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x < 1$

$$\parallel$$

$t = x - 1$

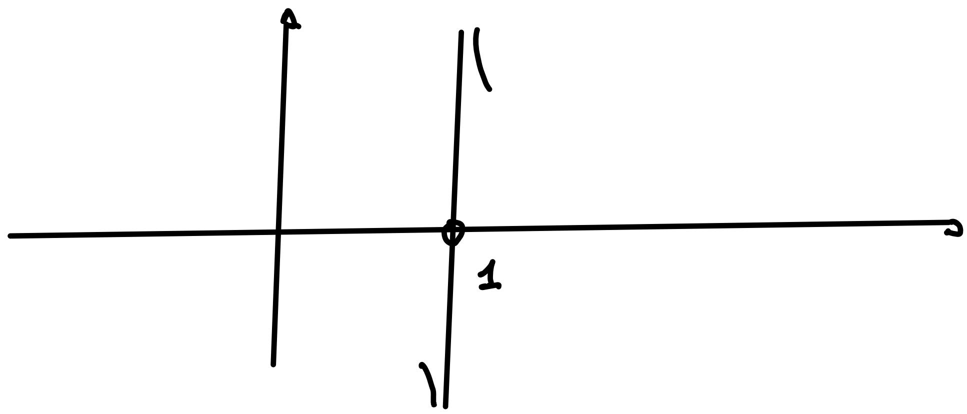
$t \to 0^-$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale

$y = 2x + 2$



Limite all'infinito : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$

Asintoto obliquo : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$:

$(a + \infty)$

$y = mx + n$ asintoto obliquo se

$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0$

$m = 0$
$\Downarrow$
$y = n$
asint.
orizzontale

(si dimostra)
$\Longleftrightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e

$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = n$

Nel nostro caso $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x}$

$= 2$

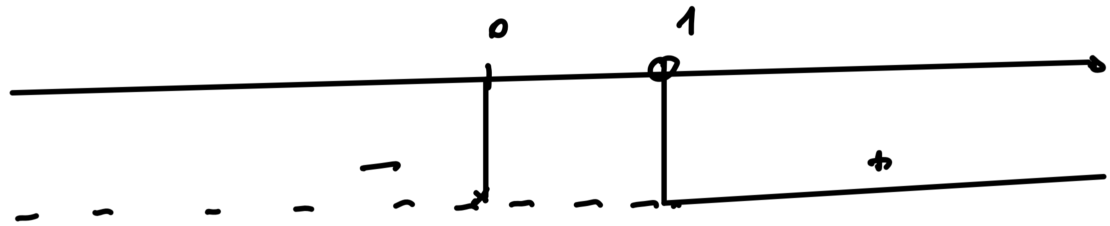
$\underline{m = 2}$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right]$

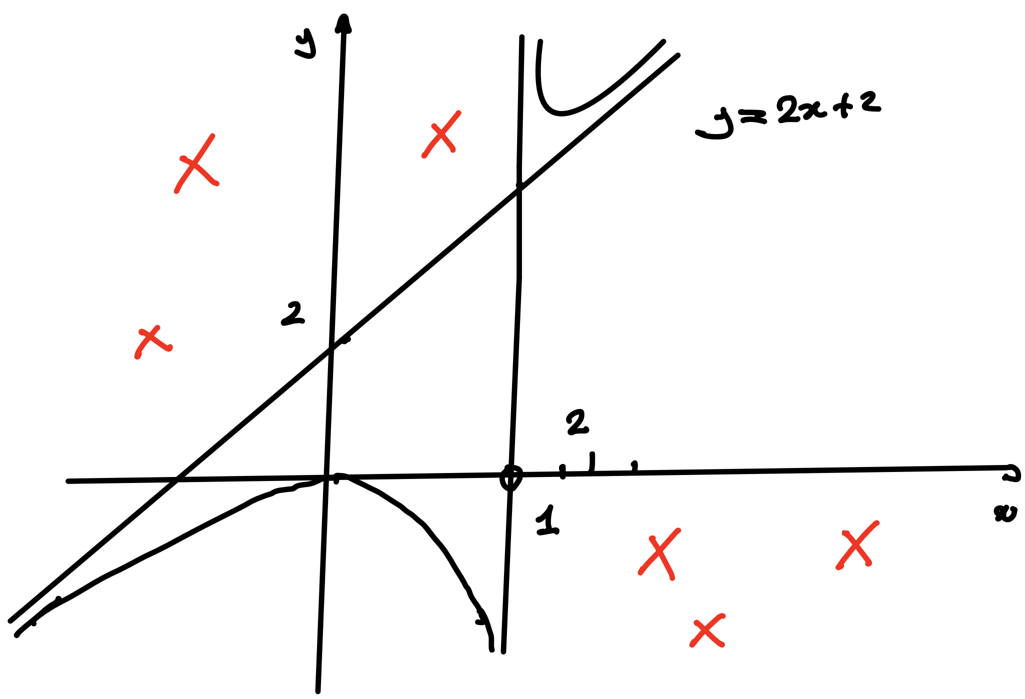
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2x}{x-1}\right] = 2$$

$y = 2x + 2$ asintoto obliquo completo $\left(\begin{matrix} a +\infty \\ e -\infty \end{matrix}\right)$

Segno di $f(x)$: $\quad f(x) \geq 0 \iff \frac{2x^2}{x-1} \geq 0$

$\iff x = 0$ oppure $x \neq 0$ e $x > 1$





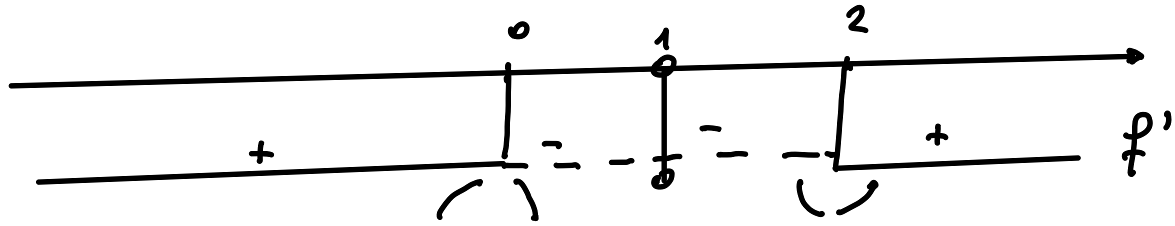
$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2} \geq 0 \iff 2x^2 - 4x \geq 0$$

$\iff x^2 - 2x \geq 0 \iff x \leq 0$ opp. $x \geq 2$

$0, 2$



$x_0 = 0$ p.to di max. relativo

$x_1 = 2$ p.to di min. relativo

$f(0) = 0 \qquad f(2) = 8$

2) $f(x) = x \log x$ $\qquad x > 0$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$: f è prolungabile per continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 0$

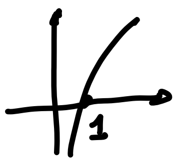
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \log x = +\infty$

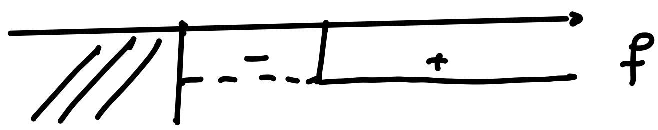
Asintoti obliqui: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$

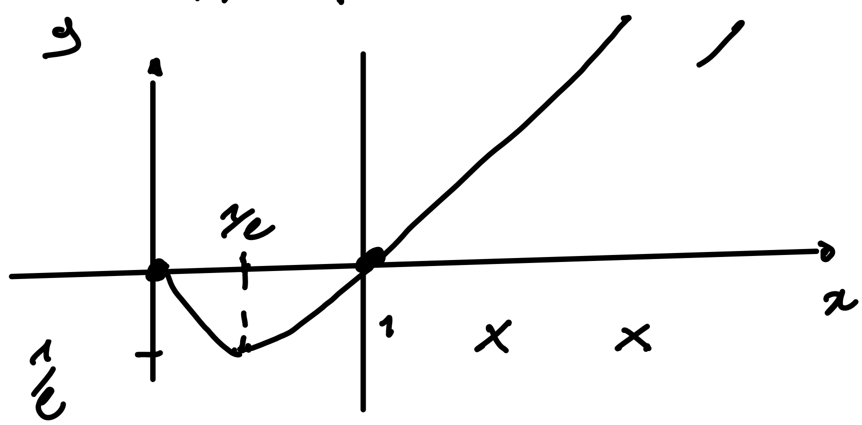
__NO__ ASINTOTI OBLIQUI!

__SEGNO__: $f(x)\geq 0 \;:\; \iff x\log x \geq 0 \iff \underbrace{\log x \geq 0}$

$\iff x \geq 1$







$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\log x] = \log x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \log x + 1$

$f'(x)\geq 0 \iff \log x + 1 \geq 0 \iff \log x \geq -1$

$= -\log e$

$= \log\frac{1}{e}$

$\iff x \geq \frac{1}{e}$

$x_0 = 1/e$ minimo relativo

" assoluto

$$f(1/e) = \frac{1}{e} \log \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$$

$$f'' = \frac{1}{x} > 0 : \quad f \text{ è convessa}$$

<u>DA FARE</u> $\quad f(x) = \sqrt{x} \log x$

$$f(x) = x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$$

$$D_f = \,]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\overbrace{x \log x}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

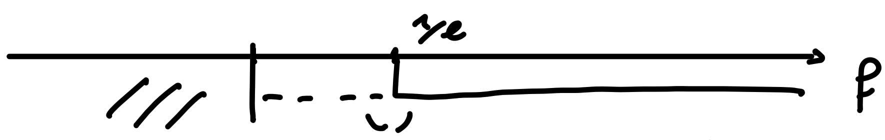
f prolungabile per continuità in $x = 0$

<u>SEGNO</u> $\quad f(x) \underset{\neq}{>} 0 \quad \forall x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\overbrace{x \log x}^{\to +\infty}} = e^{+\infty} = +\infty$$

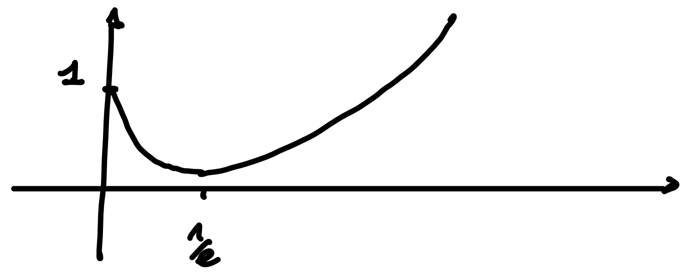
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x \log x}\right] = \underbrace{e^{x \log x}}_{>0}\left[\overbrace{\log x + 1}^{\to 0}\right] \geq 0$$

$$\iff \log x + 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{e}$$



$x_0 = 1/e$ minimo relativo

$f(1/e) = (1/e)^{1/e}$

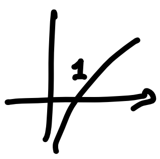


$f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ $\quad x>0 \quad \log x \neq 0 \iff x = 1$

$D_f = \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\underbrace{\log x}_{\to -\infty}} = 0 \qquad \dfrac{1}{-\infty} = 0$

f è prolungabile per continuità in $x_0 = 0$



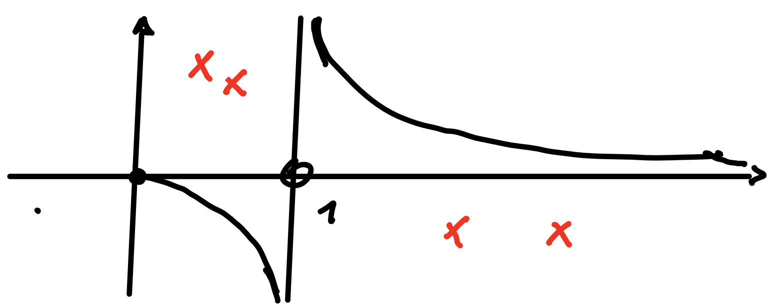
$\underline{f(0) = 0}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\log x} = -\infty$

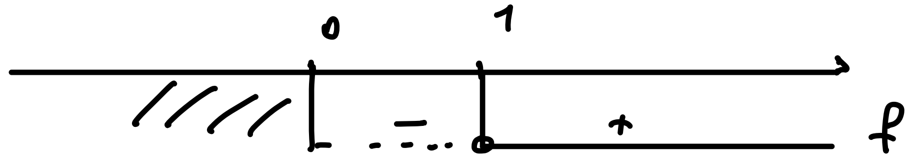
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$: $x = 1$ <u>asint. verticale</u>

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\log x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ <u>asintoto orizzontale</u>



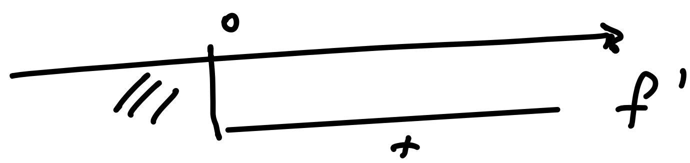
$f(x) \geq 0 \iff \dfrac{1}{\log x} \geq 0 \iff \log x > 0 \iff x > 1$



$$f' \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\log x}\right] = -\frac{1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} < 0$$

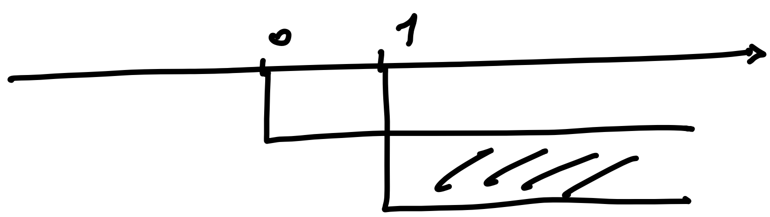
$$\frac{d}{dt}\frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}$$

f è decrescente !



DA FARE $\quad f(x) = \log(\log x) \quad : \quad \begin{cases} \log x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases}$$



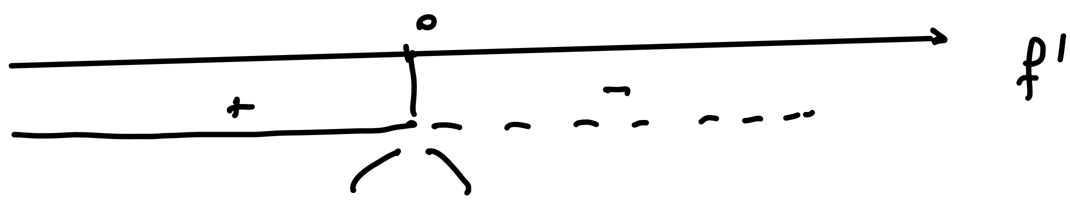
$D_f =]1, +\infty[$

$f(x) = e^{-x^2}$ funzione Gaussiana

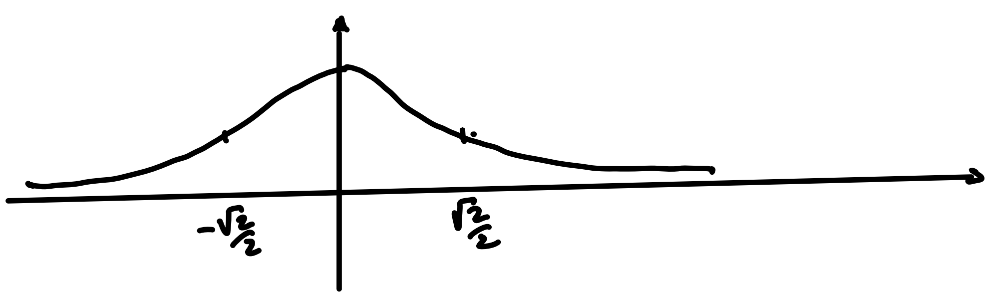
$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$

$y = 0$ asintoto orizzontale completo.

$$f' = e^{-x^2}\left[\underbrace{-2x}\right] \geq 0 \iff -2x \geq 0 \iff x \leq 0$$



$x_0 = 0$ max. relativo, assoluto $\quad e^{-x^2} \leq e^0 = 1$

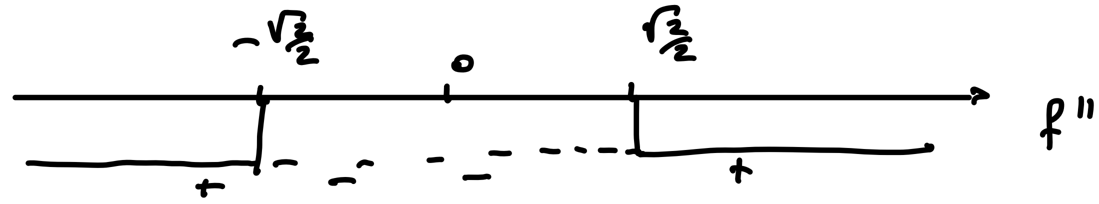


$$f'' = \frac{d}{dx}\left[-2x\, e^{-x^2}\right] = -2\left[e^{-x^2} + x(-2x)\, e^{-x^2}\right]$$

$$= -2e^{-x^2}\left[1 - 2x^2\right] \geq 0$$

$\iff \quad 1 - 2x^2 \leq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 0 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ flesso

$f(x) = x - \log(\underbrace{x^2-1})$ $\qquad x^2 - 1 > 0 \iff x < -1, x > 1$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left[-1 - \lim_{x \to -1^-} \underbrace{\log(x^2-1)}_{-\infty} \right] = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - \lim_{x \to 1^+} \log(x^2-1) = +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} [x - \log(x^2-1)] = \pm\infty$

$\infty - \infty$

$x\left(\underbrace{1 - \frac{\log(x^2-1)}{x}}_{1}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{\log(x^2-1)}{x}}\right) = 1 = m$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -\lim_{x\to+\infty}\lg(x^2-1) = -\infty$$

NO ASINTOTI OBLIQUI

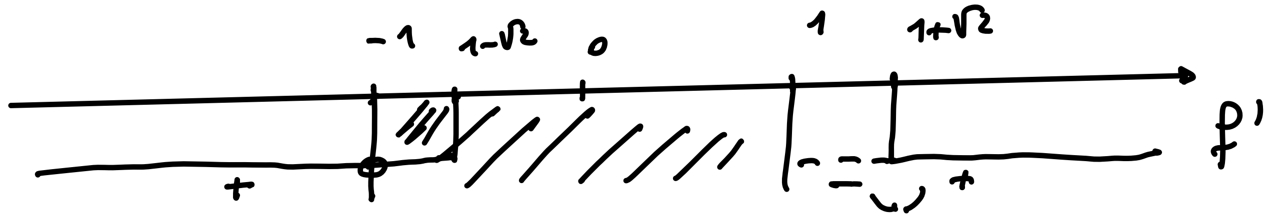
NO STUDIO SEGNO

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = 1 - \frac{2x}{x^2-1} =$$

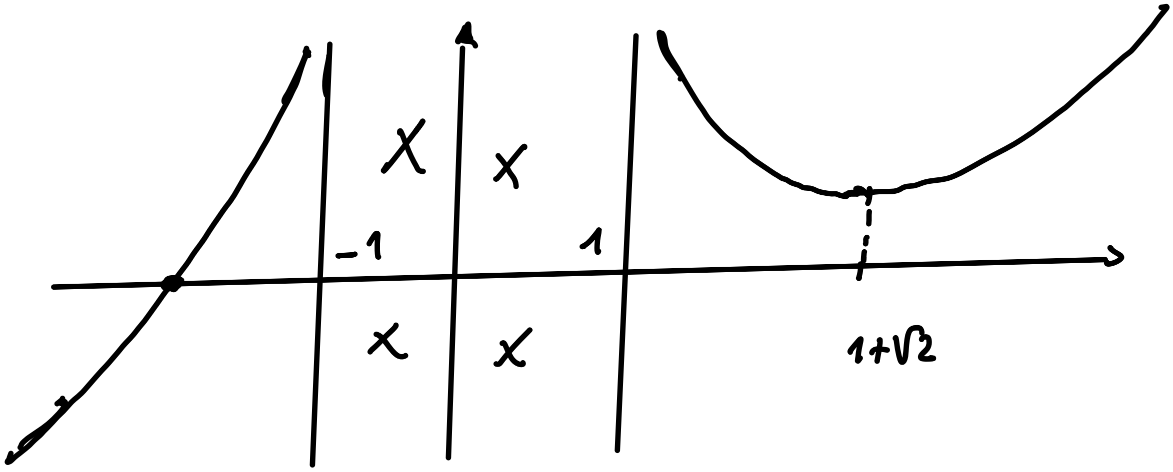
$$= \frac{x^2-2x-1}{x^2-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2x-1 \geq 0 \qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 1-\sqrt{2}, \quad x \geq 1+\sqrt{2}$$



$x_0 = 1+\sqrt{2}$ p.to di minimo relativo



DA STUDIARE : $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

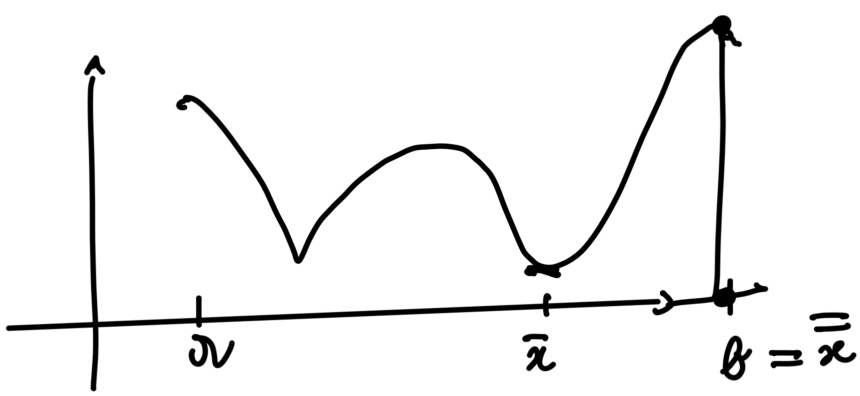
$f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$

$f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{e^x}{e^x-1}$

Massimi e minimi assoluti su $[a,b]$



teorema di Weierstrass : $\exists\ \bar{x}, \bar{\bar{x}}$

$$\underbrace{f(\bar{x})}_{\text{minimo}} \le f(x) \le \underbrace{f(\bar{\bar{x}})}_{\text{massimo}}, \quad \forall x \in [a,b]$$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile

Per cercare massimo e minimo di f in $[a,b]$

si segue lo schema:

1) Si calcolano $f(a)$, $f(b)$,

2) Si calcola $f'(x)$ e si risolve

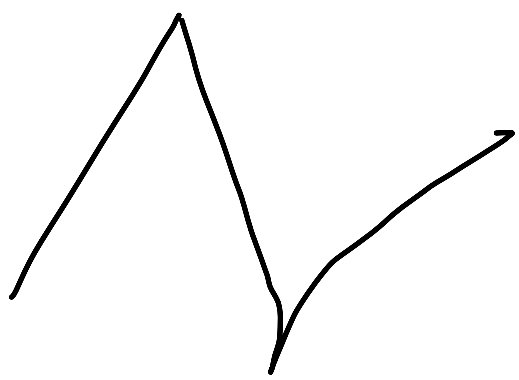
l'equazione $f'(x) = 0$ calcolando

i punti stazionari; tra questi vi saranno

gli eventuali estremi locali, interni ad $[a,b]$

3) Se <u>non</u> vi sono punti stazionari, $f(a)$, $f(b)$

sono corrispondenti al minimo e al massimo, o viceversa. Se vi sono punti stazionari si stabilisce la natura, mediante il segno di f'

4) 

Si determinano i punti in cui f è continua ma **non** derivabile

calcolandone i valori assunti da f.

5) Si RAFFRONTANO con $f(a), f(b)$ i valori assunti da f negli estremi locali (eventuali), nei punti di non derivabilità di f: il più grande di

questi valori è il max. assoluto,
il più piccolo è il min. assoluto.

ES. $f(x) = \log x - \dfrac{x}{2e}$ in $\underbrace{[1, e]}$

$$f(1) = -\frac{1}{2e}$$

$$f(e) = 1 - \frac{\cancel{e}}{2\cancel{e}} = \frac{1}{2}$$

$$f' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2e} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{2e - x}{2ex} = 0$$

$$\iff \underbrace{x = 2e}_{\text{da scartare!}} \notin [1, e]$$

$$\min_{[1,e]} f = -\frac{1}{2e}, \quad \max_{[1,e]} f = \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = 2\,\operatorname{arctg} x - x$ in $\underbrace{[0, \sqrt{3}]}$

$f(0) = 2\,\operatorname{arctg} 0 = 0$

$f(\sqrt{3}) = 2\,\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

$\boxed{D\,\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}}$ $= \frac{2}{3}\underbrace{\pi} - \sqrt{3}$

$f' = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{2 - 1 - x^2}{1+x^2}$

$= \frac{1 - x^2}{1+x^2}$

$f' = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff \cancel{x = -1},\ x = 1$

$x = 1$ unico punto critico:

$f(1) = 2\,\operatorname{arctg} 1 - 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$\min_{[0,\sqrt{3}]} f = 0, \quad \max_{[0,\sqrt{3}]} f = \frac{\pi}{2} - 1$

DA FARE $f(x) = x\,e^{-x^2}$ in $[0, 2]$

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ in $[0,1]$

$f(x) = e^{-x}\sin x$ in $[0,\pi]$