Lezione del 04/12/2022

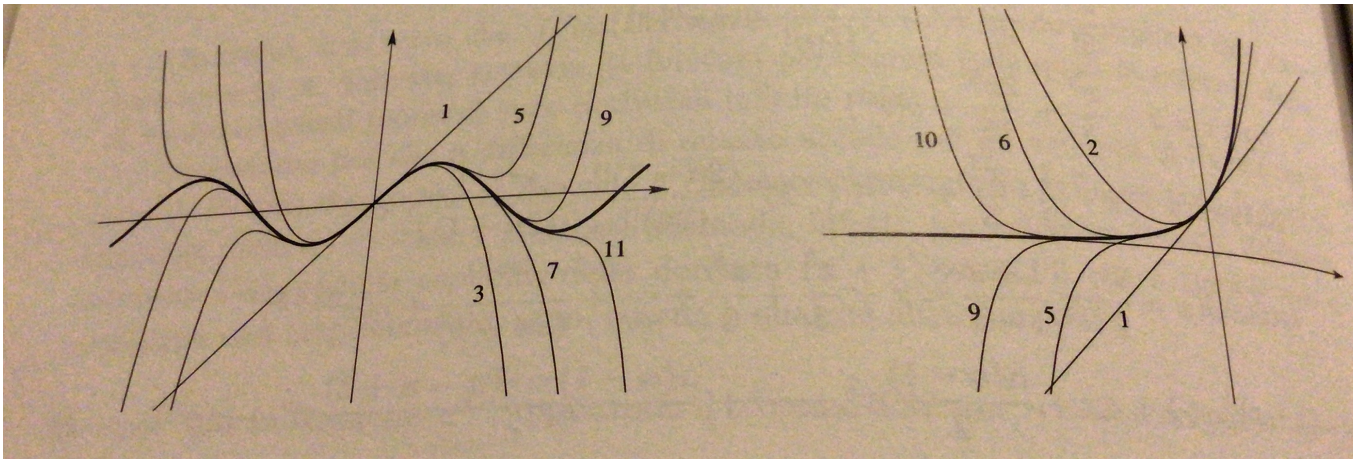
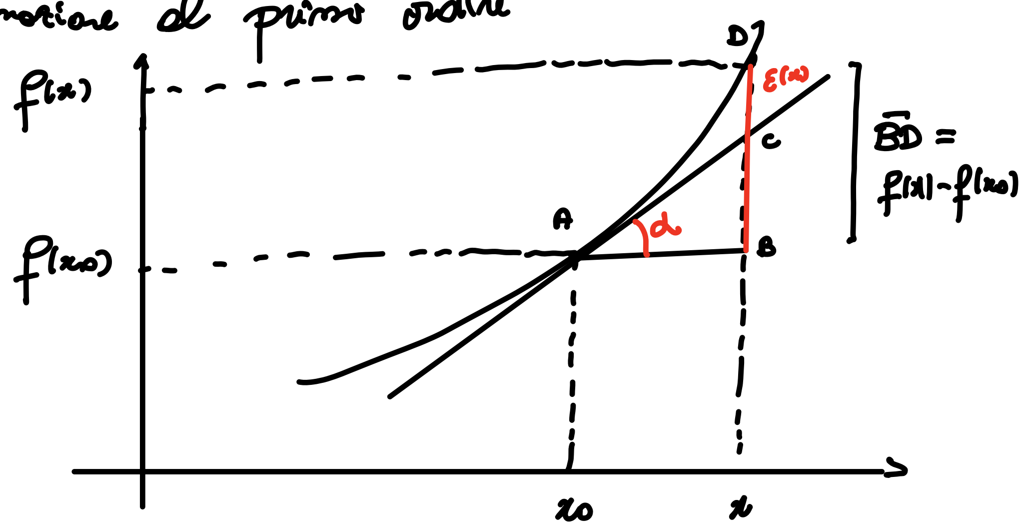


Fig. 4.22 : approssimanti di sen x

Fig. 4.23 : approssimanti di e^x

$f(x) \qquad x_0 \in I \qquad f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

"Approssimazione lineare di $f(x)$ in un intorno di x_0, o approssimazione al primo ordine"



f derivabile in x_0 : eq. retta tangente è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$\overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC}$ $\qquad\qquad$ $\overline{CD} = \varepsilon(x)$

$$\overline{BC} = \overline{AB}\,\mathrm{tg}\alpha$$
$$= f'(x_0)(x-x_0)$$

In conclusione: $\quad f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

<u>Inoltre</u> $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x-x_0} = 0$: infatti,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}^{\varepsilon(x)}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{?\ "f'(x_0)} - \lim_{x\to x_0} f'(x_0)\frac{(\cancel{x-x_0})}{\cancel{x-x_0}}$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi $\quad \varepsilon(x) = o(x-x_0)$

per $x \to x_0$

$\Downarrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

per $x \to x_0$

"approssimazione lineare o al primo ordine di $f(x)$"

$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$\to$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$\sqrt{1+x} - 1 \simeq \dfrac{x}{2} \qquad$ per $x \to 0$

$h = x - x_0$: $\qquad x = x_0 + h$

$\downarrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

per $x \to x_0$

$$\underbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)} = f'(x_0)\,h + o(h)$$

$h \to 0$

(1) $$\underbrace{\Delta f}_{\text{l'incremento di } f} = f'(x_0)\,h + o(h)$$

$h \to 0$

"Teorema del differenziale" $\qquad \sim$ "tilde" $\tilde{n}$

$f'(x_0)\,h$ = differenziale di f in x_0, corrispondente all'incremento h

[$df(x_0)(h) = f'(x_0)\,h$] ☺

(1) $\Delta f \approx df(x_0)(h)$

ES $dx(h) = 1 \cdot h = h$

Quindi $df(h) = f'(x_0)\, h = f'(x_0)\, dx(h)$

$$\Downarrow$$

$$\longrightarrow \quad df = f'(x_0)\, dx$$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

La formula di Taylor

$f = f(x)$ derivabile in $]a, b[$ e derivabile due volte in $x_0 \in]a, b[$.

$$\varepsilon_2(x) = f(x) - \Big[f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{\text{polinomio di II grado}} \Big]$$

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\varepsilon_2(x) = o\left((x-x_0)^2\right) \quad x \to x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varepsilon_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

f.i. $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} =$$

= (per l'approssimazione lineare di $f'(x)$ già spiegata) $= 0$

Allora:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \quad x \to x_0$$

Formula di Taylor di $f(x)$ in x_0, al secondo ordine.

$$o\left((x-x_0)^2\right) = \text{RESTO DI PEANO}$$

In generale se $f(x)$ è derivabile $(n-1)$ volte in $]a,b[$ e n volte in x_0, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^3$$

$$(3) \quad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o\left((x-x_0)^n\right)}$$

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad ..$$

La (3) la chiameremo formula di Taylor

di ordine n, di punto iniziale x_0.

Es. $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$f(0) = 1$

$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$

$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$

$x_0 = 0$: formula di MACLAURIN

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{Polinomio di Taylor di } e^x} + o(x^n)$$

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$f(0) = 0$; $f'(x) = \cos x$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$; $f'''(x) = -\cos x$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(iv)}(x) = \sin x$$

$$f^{(iv)}(0) = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$$

ES. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + o(x^m)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m})$$

$$f(x) = \log(1+x) \qquad x_0 = 0 \quad ?$$

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{m!}$$

<u>ERRORE?</u>

<u>Proposizione</u> (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)

$f(x)$ derivabile m volte in $]a,b[$ ed $(m+1)$-volte in $x_0 \in]a,b[$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^3$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \overbrace{o\left((x-x_0)^m\right)}^{R_m(x)}_{x \to x_0}$$

Allora $\quad R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

dove c è un punto, dipendente da x, interno all'intervallo di estremi x_0 ed x

Teorema di Lagrange: $\quad f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)(x-x_0)}_{\text{Resto di Lagrange di I° ordine}}$$

$c \in (x_0, x)$

ES. $\quad f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

?

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove c è in $(0,x)$ $(x\geq 0)$

Stime di $R_n(x)$? Se $\underbrace{x \in [-a,a]}_{|x|\leq a}$

$a>0$, allora

$$|R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

$$\leq \frac{e^a}{(n+1)!}a^{n+1}$$

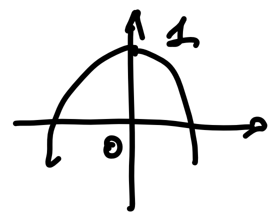
$\forall x \in [-a,a]$

APPLICAZIONE (Condizione sufficiente del II° ordine per gli estremi relativi)

x_0 estremo relativo $\xRightarrow[\cancel{\Leftarrow}]{}$ $\underbrace{f'(x_0)=0}_{?}$

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ pto di max. relativo}$$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 \text{ p.to di min. relativo}$$



$f(x) = 1 - x^2$

$f'(x) = -2x = 0 \iff x = 0$: unico punto critico!

$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ p.to di max.