Lezione del 21/10/2022

A matrice $m \times n$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice

Def (Minore)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A|$ è un minore di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Def. Il rango di A è il massimo ordine di un minore non nullo estratto da A. ||

ρ = "rho" $\rho(A)$ = rango di A $= k \in \mathbb{N}$

$\exists$ minore di ordine k, non nullo,

e i minori di ordine $> k$ sono nulli.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{minore di ordine 2}} = -1 \neq 0$$

$\rho(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$\rho(A) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2×4

Al massimo 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$\rho(A) = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×4

$\rho(A)$ $\underline{\underline{\max}}$ 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-6=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 15-18 = -3 \neq 0 \qquad \rho(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(6+9) - 5(3+3) =$$

$$= 2 \cdot 15 - 5 \cdot 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ma allora $\rho(A) = 2$.

N.B. Il rango <u>non è</u> il determinante di una matrice

A matr. quadrata, se $|A| \neq 0$, $\rho(A) = n$

di ordine n

Se $|A|=0$, $\rho(A)<n$

$M_{m \times n}$

<u>Prop.</u> A matrice $m \times n$

$A \in M_{m \times n}$ il rango di A è k $(\rho(A)=k)$

$\Leftrightarrow$ k è il massimo numero di righe e di colonne linearmente indipendenti di A.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \rho(A)=2$$

$(0,8,2,6)$, $(1,12,3,9)$

lin. indip.

$(0,1)$, $(8,12)$

OSS. Tre vettori di V^2 vettori del piano

$$\underline{u} = (x_1, x_2)$$
$$\underline{v} = (y_1, y_2)$$
$$\underline{w} = (z_1, z_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, poiché il rango è al massimo 2

<u>ES.</u>

$$(1, 0, -1)$$
$$(2, 1, 0)$$
$$(3, 0, 0)$$

sono lin. indip. o dip.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

-3

$\rho(A) = 3 \Rightarrow$ i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Sistemi lineari

$m \times n$

m equazioni $\qquad$ n incognite

$$
S \quad \begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\
\quad \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m
\end{cases}
$$

Sistema lineare $\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{incognite}}$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix} \qquad m \times n
$$

matrice dei coefficienti di S

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad m \times 1$$

matrice dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ES.

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

2 equazioni
2 incognite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

2 equazioni
3 incognite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 7y = 0 \\ 2x - 8y = 10 \end{cases}$$

3 equazioni
2 incognite

2 incognite, 2 equazioni

$$S \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ \underbrace{-y-y}_{} = 1 \end{cases}$$

$$-2y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{}$$

unica soluzione di S

$$\begin{cases} \underbrace{x + y}_{} = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

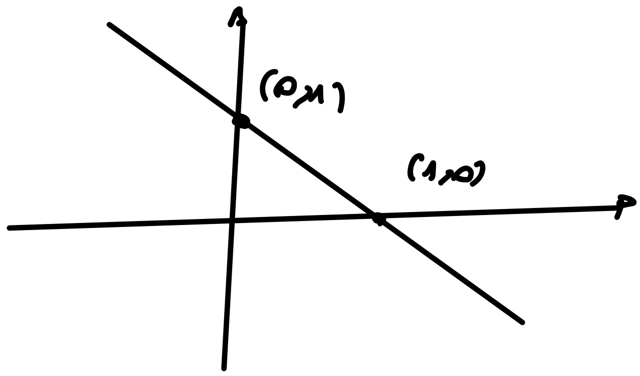
<u>Impossibile</u>!

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \quad (2) \end{cases} \iff \underline{\underline{x + y = 1}}$$

infinite soluzioni

$x = 1 - y$

∞^1 soluzioni



$y = 1 - x$

Sistemi di tipo $n \times n$ (teorema di CRAMER)

$$(S_1)\ \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$A\underline{X} = B$$

A matrice quadrata

$$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

__Teorema__ Se $\det A \neq 0$, allora (S_1) ammette un'unica soluzione, determinata in questo modo

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det B_n}{\det A}$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ sono le matrici che si ottengono sostituendo la 1^a colonna, la 2^a colonna .. la n^a colonna con la colonna dei termini noti:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \dots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ & & \vdots \\ & a_{n(n-1)} & b_n \end{pmatrix}$$

ES

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 2 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

SOSTITUZIONE

$$A = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 3\,(1+1) =$$

$$= 7 \neq 0$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \end{array}$$

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{1}{7}\,|B_1|$$

$$|B_1| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+1) - 2 = -4$$

$$x = \frac{1}{7}(-4) = -4/7$$

$$y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{1}{7}|B_2|$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2+1) - (-6)$$

$$= 3 + 6 = 9$$

$$y = \frac{9}{7}$$

$$z = \frac{|B_3|}{7} = \frac{5}{7}$$

$$|B_3| = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-3) - 1 =$$

$$= 6 - 1 = 5$$

$\left(-\frac{4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{5}{7}\right)$ unica soluzione

ES.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ 4y - z = -7 \\ 5x + 8z = 39 \end{cases}$$

Numero di equazioni $\neq$ Numero incognite

m equazioni in n incognite

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A = (a_{ij}) \quad m \times n$

mat. coef. mat. t.

$A\ \underline{X} = B$ $\underline{\text{mat.}}$

Teorema (Rouché - Capelli)

Condizione necessaria e sufficiente affinché (S) sia compatibile (ossia ammette soluzioni) è che

$$\rho(A) = \rho(A')$$

mat. coeff.

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}}_{\text{matrice completa}}$$

In tal caso, posto $K = \rho(A) = \rho(A')$

il sistema ammette ∞^{n-K} <u>soluzioni</u>.

<u>OSS.</u> Se $m = n$, abbiamo numero di equazioni = " di incognite

Se $|A| \neq 0$, poiché A è di ordine n,

$\rho(A) = n \Rightarrow$ da Rouché Capelli,

il sist. è compatibile

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \qquad \rho(A') = n = \rho(A)$$

$$\infty^{n-n} = \infty^0 = 1$$

Se il sistema è compatibile con una sola soluzione, allora il teorema di Rouché Capelli implica $\rho(A) = \rho(A')$

$\Rightarrow \det A \neq 0$

<u>ES.</u>

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$|A| = 0$, quindi $\rho(A) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +4 \neq 0$$

$\rho(A') = 2$

$\rho(A) \neq \rho(A')$

$\Downarrow$

il sistema non è compatibile

Numero di incognite > Numero di equazioni

$n=3$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x \quad +2z=0 \end{cases}$$

$\rho(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A')=2$

$\rho(A)=\rho(A')=2$ il sistema è compatibile

ha $\infty^{n-2}=\infty^1$ soluzioni

$$\begin{cases} x+y=1+z \\ -x=-2z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1+z \\ x=2z \end{cases}$$

$z=t$

parametro

$$\begin{cases} 2z + y = 1 + t \\ x = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + t - 2t \\ \quad = 1 - t \\ x = 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (2t, 1-t, t)$$

∞^1 $\qquad$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$A\underline{X} = B \qquad \rho(A) = \rho(A') = k$

Schema risolutivo

1) Si isola un minore di ordine k, estratto dalla matrice A, diverso da 0;

2) Del sistema si considerano solo le k equazioni corrispondenti alle k righe del minore; le altre $m-k$ equazioni vengono eliminate;

3) A primo membro si mantengono le k incognite i cui coefficienti costituiscono le k colonne del minore; i termini

contenenti le altre $n-k$ incognite si portano al secondo membro;

4) Si ottiene un sistema di Cramer di k equazioni in k incognite, al quale si può applicare il metodo di Cramer

5) Le soluzioni trovate dipendono dalle $n-k$ incognite portate al secondo membro che possono assumere valori arbitrari.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$$

3 eq.
3 incogn.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - (-4+4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \rho|A| = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A') = \rho(A) = 2$$

Sistema $\iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}z - y = 1 \\ x = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 - \frac{1}{2} z \\ x = -\frac{1}{2} z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} t \\ y = -1 - \frac{1}{2} t \\ z = t \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2} t, -\frac{1}{2} t - 1, t \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluz.