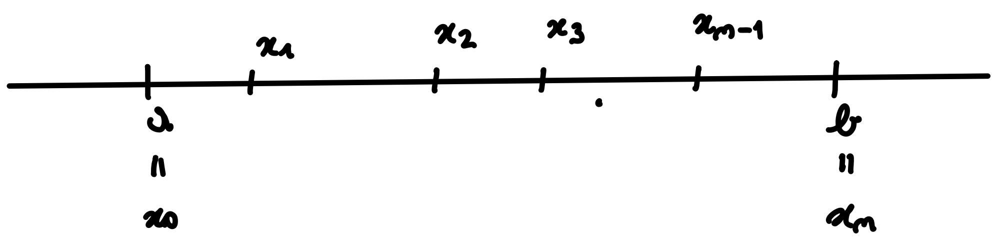
Integrale secondo Riemann

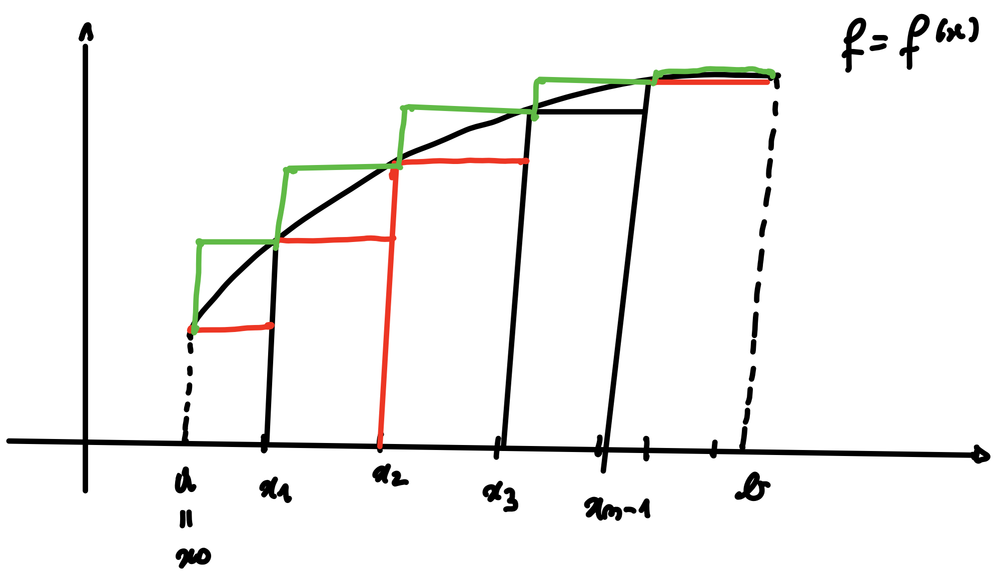
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f = f(x)$ limitata in $[a,b]$

Decomposizione di $[a,b]$

$$\mathcal{D} = \{ x_0, x_1, \dots, x_n \} \quad \text{tali che}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$





$$s(f,D) = \inf_{[x_0,x_1]} f(x) \cdot (x_1 - x_0) + \inf_{[x_1,x_2]} f(x) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \inf_{[x_{m-1},x_m]} f(x) \cdot (x_m - x_{m-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

"somma integrale inferiore di f, corrispondente a D"

$$S(f,D) = \sup_{[x_0,x_1]} f(x) \cdot (x_1 - x_0) + \sup_{[x_1,x_2]} f(x) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \sup_{[x_{m-1},x_m]} f(x) \cdot (x_m - x_{m-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

"somma integrale superiore di f, corrispondente a D"

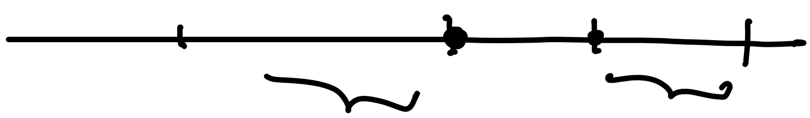
1 $\{ s(f,D) : D \text{ dec. di } [a,b] \}$

$\{ S(f,D) : D \text{ dec. di } [a,b] \}$

sono separati: ossia, se D_1, D_2 decomposizioni di $[a,b]$, si ha che

$$s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sup_{D} s(f,D) \leq \inf_{D} S(f,D)$$



Def Se $\{ s(f,D) : D \}$ e $\{ S(f,D) : D \}$ sono contigui, ossia

$$\sup_{D} s(f,D) = \inf_{D} S(f,D)$$

si dice che $f(x)$ è integrabile secondo Riemann:

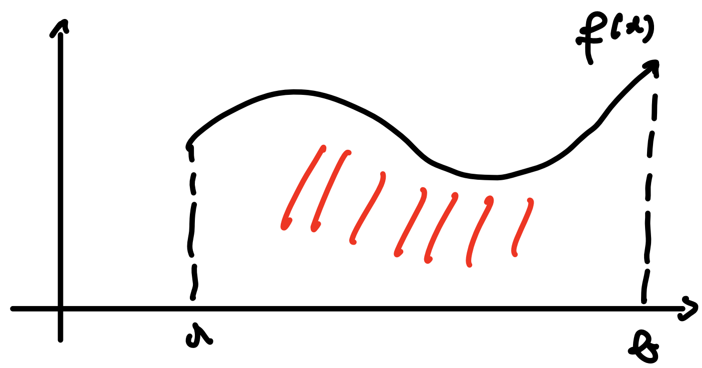
in tal caso, l'unico elemento di separazione si dice integrale di Riemann di f, e si scrive

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{integrale definito di } f(x) \text{ su } [a,b]} = \sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D).$$

<u>OSS.</u> Quando $f \geq 0$ (VEDI DISEGNO)

si dice rettangoloide di f, l'insieme

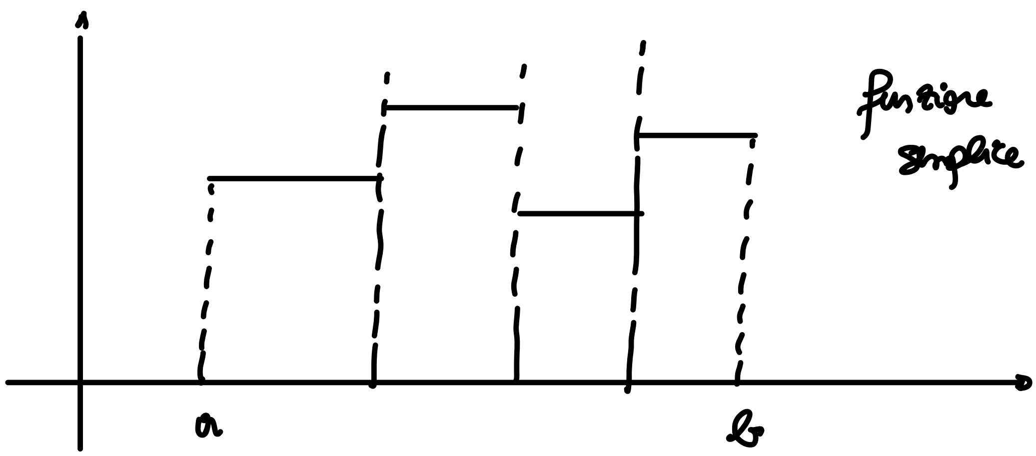
$$R_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x) \}$$



<u>Se</u> $f(x)$ è integrabile secondo Riemann,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area}(R_f).$$

Prop. Se f è continua in $[a,b]$, f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

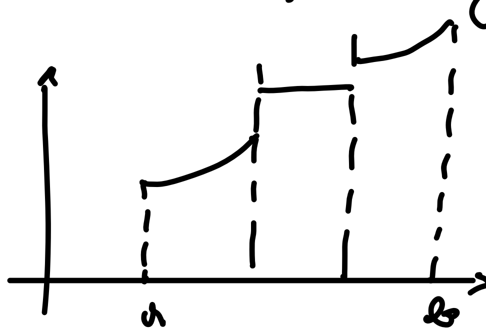


Def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua, se f è continua, tranne che in un numero finito di punti.

Prop Se f è generalmente continua, f è integrabile.

Prop.

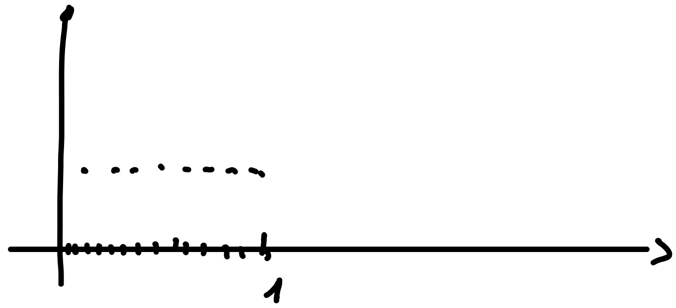
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona, f è



integrabile (secondo Riemann)

ES.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$s(f,D) = 0 \qquad S(f,D) = 1$

$$\sup_D s(f,D) = 0 < 1 = \inf_D S(f,D)$$

Proprietà dell'integrale di Riemann

1) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

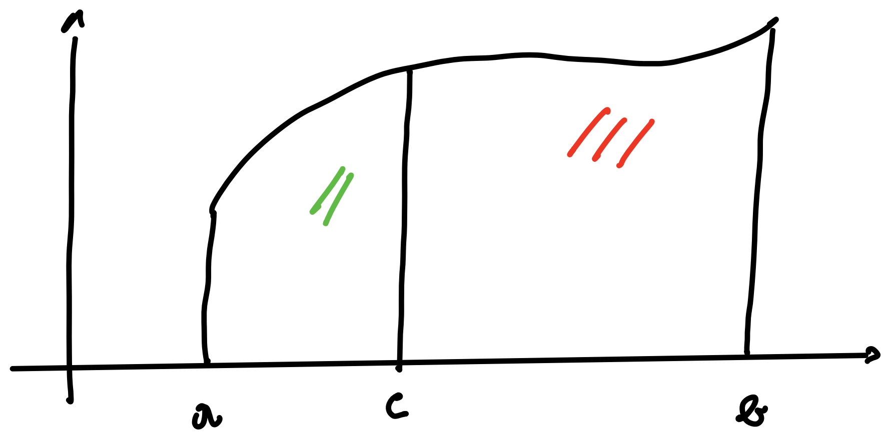
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(PROP. DISTRIBUTIVA)

$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

2)

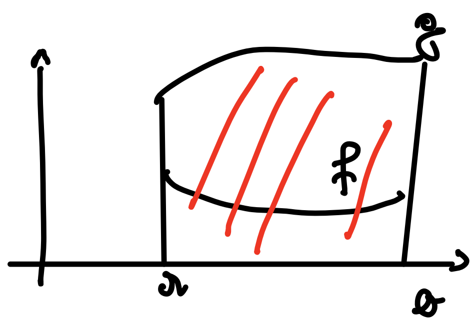


Se $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

PROPRIETÀ ADDITIVA

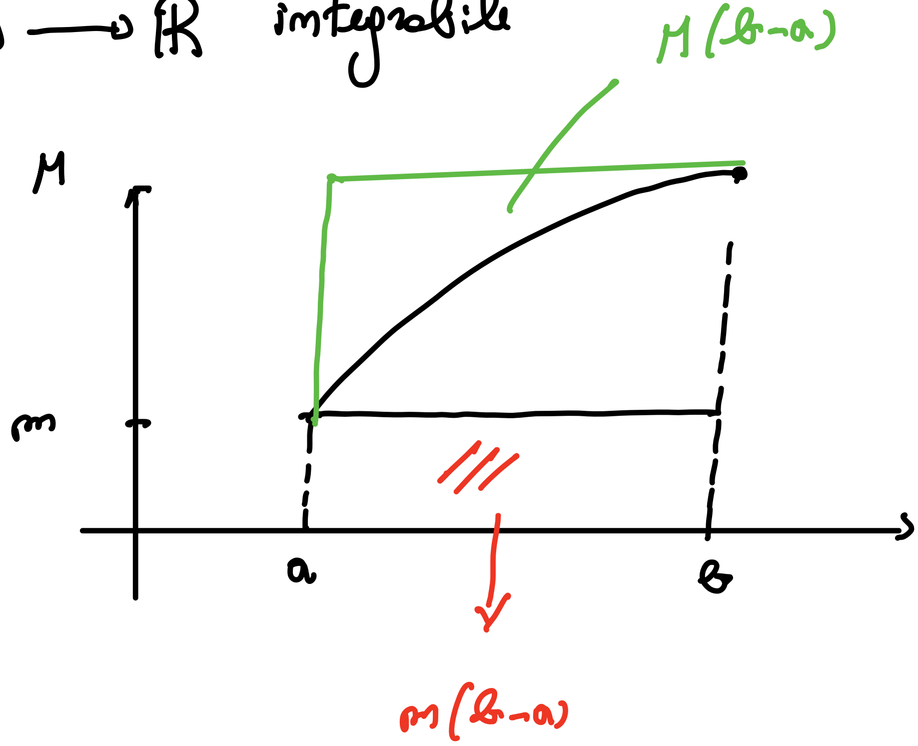
3) $f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

PROPRIETÀ DI MONOTONIA



4) Proprietà di media

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile



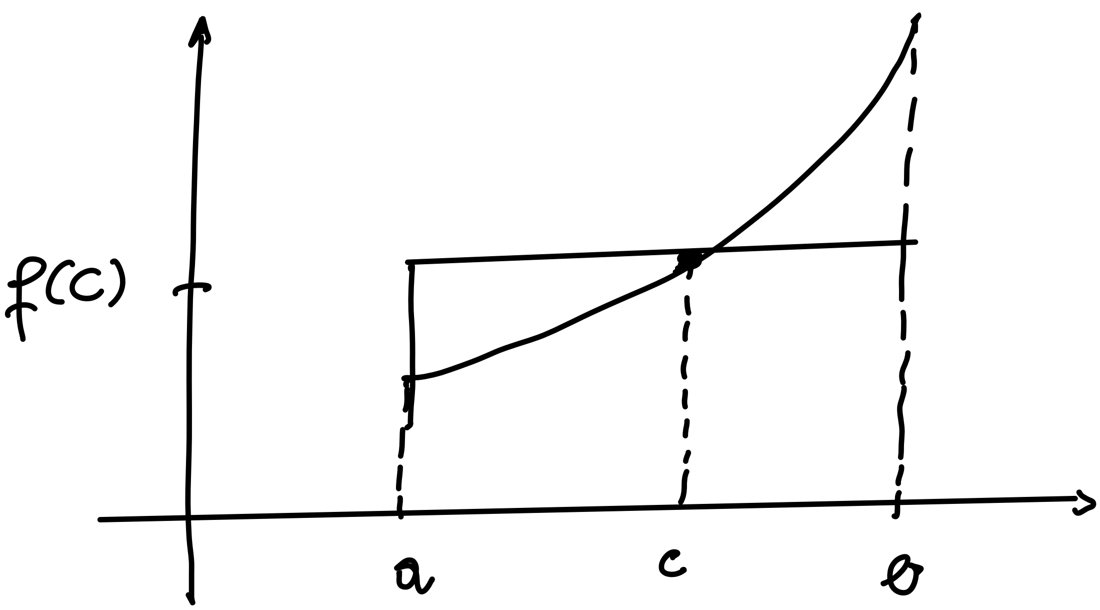
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) \quad , \quad M = \sup_{[a,b]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{media integrale di } f} \leq M$$

2^a Prop. di media: f continua su $[a,b]$. Allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)}$$



$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx = f(c)$$

5) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Integrazione indefinita

$f = f(x)$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$x, y \in I$

$$\int_x^y f(t)\,dt = \begin{cases} \int_x^y f(t)\,dt & \text{se } x \leq y \\ -\int_y^x f(t)\,dt & \text{se } x > y \end{cases}$$

$x, y, z \in I$:

$$\int_x^y f(t)dt = \int_x^z f(t)dt + \int_z^y f(t)dt$$

Def. (Primitiva di una funzione)

Si dice che $F(x)$, $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se F è derivabile in I e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Oss. Se $F(x)$ è una primitiva di f

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

una primitiva di f:

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

<u>Problema</u> Se $\exists$ $F(x)$ primitiva di $f(x)$, allora se $G(x)$ è un'altra primitiva, possiamo scrivere

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{per qualche}$$

costante $c \in \mathbb{R}$?

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } H(x) = c$$

$$\Rightarrow G(x) - F(x) = c.$$

<u>Conclusione</u> Se F è una primitiva di f <u>tutte</u> le primitive si scrivono nella forma

$$F(x) + c, \quad \underbrace{c \in \mathbb{R}}_{\text{costante arbitraria}}$$

<u>Teorema fondamentale del calcolo integrale</u>

$f : I \to \mathbb{R}$ continua. Sia $x_0 \in I$ e definiamo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x \in I.$$

funzione integrale di $f(x)$.

Allora, $F(x)$ è derivabile in I e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Teorema $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funzione continua

Se G è una primitiva di f,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dim. Sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Poiché G, F sono primitive di f,

$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad G(x) = F(x) + c$

$$G(a) = \underbrace{F(a)}_{=0} + c = c \Rightarrow$$

$$G(x) = F(x) + G(a) \quad \forall x$$

allora

$$G(b) = F(b) + G(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + G(a)$$

<u>Def.</u> L'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ si chiama integrale indefinito di $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

OSS. L'integrazione e la derivazione sono operatori uno inverso dell'altro:

$$\int f' = f$$

$$\left(\int f\right)' = F' = f$$

Integrali indefiniti di funzioni elementari

1) $\int x^\alpha \, dx$

$\alpha \neq -1$

$\int 1 \, dx = x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$\int x \, dx$

$D(x^2) = 2x$

$D\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$

$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$

$D \, x^{\alpha+1} = (\alpha+1) \, x^\alpha$

$$D\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \neq -1$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + c$$

$$\int x^{\pi}\,dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$\alpha = -2$

$$= -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\forall c \in \mathbb{R}$$

$$D \log|x| = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$\int x^{-1}\,dx = \log|x| + c \qquad (\alpha \neq -1)$$

3) $\int a^x\,dx = a^x \log_a e + c$

$$D\,a^x = a^x \log a$$

$$D\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

4) $$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$D(-\cos x) = \operatorname{sen} x$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

5) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

6) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

7) $$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

ES.

$$\int tg x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx$$

$t = \cos x$

$$= - \int \frac{dt}{t} = - \log|t|$$

$$= - \log|\cos x| + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \frac{1}{2} \log|1+t| + c$$

$$= \frac{1}{2} \log |1+x^2| + c$$