

Alcuni esercizi di Matematica I - 11/01/2023

Prof. Bruno Volzone

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{\sqrt[8]{(1-x^3)^4}}{\sqrt{|1-x|}}; f(x) = \arcsen x^2 - 1x + 5; f(x) = \frac{\arcsen \frac{x}{10}}{\sqrt{x-4}} + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2 - 11x + 18} \right).$$

$$f(x) = \log \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right); f(x) = e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}; f(x) = \log(\log(x^2 - 3)); f(x) = 3\sqrt{\sen x} + \sqrt{\frac{4x}{2-x}}.$$

2) Calcolare i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x - 3}; (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}}; (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sen 3x}{1 - \cos x + \operatorname{tg} 2x}; (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 3x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} 3x}}{x}; (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 5x - \cos x}{\sen^2 3x};$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x} + \sen^2 x + x + \sen x^3}{\operatorname{tg}^3 x + x^2 + \sen 5x}; (h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^3} + \sqrt{1 - \cos x}}{x \sen^2 x - \operatorname{tg} x + x^2 \cos x}; (i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt[5]{2x + 3} + \sen x}{\sqrt[6]{2x^4 - x} - \sqrt[4]{-x + 4} + \frac{1}{x}};$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\arcsen x - x} [2]; (k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 x} [1/2]; (l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{arctg} x^2}{(1 - \cos x)^3} [8/3]; (m) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$$

[Risultati in sequenza: [13; -5/2; 1/4; 3/2; 3; 17/6; 1/5; $-\sqrt{2}/2$; $\sqrt[6]{9/2}$; 2; 1/2; 8/3; 2]

(Suggerimento: per i limiti (g), (h), (i) utilizzare il metodo di sostituzione degli infinitesimi/infiniti).

3) Determinare il minimo ed il massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^2}$$

nell'intervallo $[0, 5/2]$.

4) Studiare le funzioni

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x}; f(x) = e^{-\frac{1}{x^2-1}}; f(x) = \arcsen(\log x); f(x) = \frac{1}{2x^2} + \log|x|; f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2+1}.$$

5) Provare che la funzione

$$f(x) = \arcsen \frac{2x}{1+x^2}$$

ha due punti angolosi, simmetrici rispetto all'origine, e presenta nell'origine un flesso discendente.

Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di flesso.

6) Calcolare gli integrali:

$$\int x \log x \, dx; \int \frac{\log x}{x^5} \, dx; \int \frac{1}{(1+x)(x^2+1)} \, dx; \int \frac{2x-3}{x^2-x-2} \, dx; \int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} \, dx; \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \, dx$$

$$\int \frac{\sen^2 x}{1 + \sen^2 x} \, dx; \int \sqrt{4-x^2} \, dx; \int \arcsen \frac{1}{x-1} \, dx; \int e^x \sen(3x) \, dx; \int_1^2 u \sqrt{u^2-1} \, du;$$

$$\int_1^e \log x \, dx; \int_0^{\pi^2} \sen \sqrt{x} \, dx.$$

7) Calcolare i determinanti delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ 2 & -4 & 18 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

8) Dire se i seguenti sistemi lineari sono compatibili e determinarne le soluzioni

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -2y + z = 0 \\ 2x + 2z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 0 \\ y + z + 3t = 0 \\ 2x - y + 2z + t = 9 \\ 3x + y + 2z + 5t = 10 \end{cases}$$

9) Calcolare le inverse delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assegnate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

ed il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare AB , $A\mathbf{v}$, $B\mathbf{v}$.

10) Verificare se le seguenti applicazioni sono lineari o no:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f : (x, y, z) \rightarrow (x + 2y, x - y + z, 2x + z).$$

In caso affermativo, determinare la matrice associata ad f , ossia la matrice A tale che $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

11) Calcolare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

12) Determinare le equazioni parametriche delle rette: a) passante per i punti $A = (4, 2, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$; b) ortogonale al piano di equazione $3x - 2y + z = 9$ e passante per il punto $P = (1, -7, 2)$.

13) Scrivere l'equazione del piano ortogonale alla retta a) dell'esercizio precedente e contenente il punto $(1, -3, 2)$.

14) Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 1, -1)$ e $C = (-1, 0, 1)$.

15) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A = (1, 3, 4)$ e parallelo al piano di equazione $x - y + z = 3$.