Zeri di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Si vuole risolvere l'equazione

$$f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Se $k \in f(X)$ il problema ammette soluzione.
$\Leftrightarrow \exists\, c \in \; X : \; f(c) = k$ ma essa non può sempre essere calcolata per via analitica

$$\Downarrow$$

Necessità di ricorrere ad un **metodo numerico**

L'equazione

$$f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

definendo

$$g(x) = f(x) - k,$$

si può porre nella forma

$$g(x) = 0.$$

Pertanto, nel seguito considereremo solo problemi di ricerca di zeri di una funzione.

TEOREMA

Teorema degli zeri

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se la funzione assume valori di segno opposto agli estremi (ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$),

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$$

Esempio

Determinare un intervallo contenente una soluzione dell'equazione

$$f(x) = e^{-x} - 3x = 0.$$

$$f_1(x) = e^{-x} \text{ continua in } \mathbb{R} \quad f_2(x) = -3x \text{ continua in } \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ continua in } \mathbb{R}$$

f è continua in $\mathbb{R} \Rightarrow f$ è continua in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ si può usare il Teorema degli zeri $\Rightarrow$ si deve trovare, se esiste, un intervallo $[a, b]$ per il quale si abbia $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Esempio

Si ha che:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} - 3x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 3x = -\infty$$

La funzione è continua, pertanto esiste un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione soddisfa il teorema degli zeri $\Leftrightarrow$ esiste $c: \ f(c) = 0$. Inoltre:

$$f_1(x) = e^{-x} \text{ strettamente decrescente in } \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = -3x \text{ strettamente decrescente in } \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ strettamente decrescente in } \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists! c: \ f(c) = 0$$

Esempio

$$f(x) = e^{-x} - 3x$$

Si osservi che

$$f(0) = 1 > 0$$

$$\Downarrow$$

detta c la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è necessariamente $c > 0$

$$f(1) \cong -2,6321 < 0, \quad f(0) > 0$$

$$\Downarrow$$

per il Teorema degli zeri, $c \in]0, 1[$.

Metodo di bisezione

Dato l'intervallo $[a_0, b_0]$, consideriamone il punto medio

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Detta c una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, si verifica una ed una sola delle seguenti eventualità:

1. $f(x_0) \cdot f(a_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) \cdot f(b_0) < 0 \Rightarrow c \in]x_0, b_0[$; si pone $]a_1, b_1[:=]x_0, b_0[$
2. $f(x_0) = 0 \Rightarrow c = x_0$
3. $f(x_0) \cdot f(b_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) \cdot f(a_0) < 0 \Rightarrow c \in]a_0, x_0[$; si pone $]a_1, b_1[:=]a_0, x_0[$

NOTA: l'ampiezza dell'intervallo $[a_1, b_1]$ è

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0).$$

Metodo di bisezione

Quindi, applicando il procedimento descritto:

1. si trova **una soluzione** oppure
2. si determina **un intervallo che la contiene** di ampiezza **la metà dell'intervallo di partenza** $\Leftrightarrow$ si migliora l'accuratezza.

Metodo di bisezione

Applichiamo lo stesso procedimento nell'intervallo $[a_1, b_1]$. Indicato con

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

il suo punto medio, si verifica una ed una sola delle seguenti eventualità:

1. $f(x_1) \cdot f(a_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) \cdot f(b_1) < 0 \Rightarrow c \in]x_1, b_1[$; si pone $]a_2, b_2[:=]x_1, b_1[$
2. $f(x_1) = 0 \Rightarrow c = x_1$
3. $f(x_1) \cdot f(b_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) \cdot f(a_1) < 0 \Rightarrow c \in]a_1, x_1[$; si pone $]a_2, b_2[:=]a_1, x_1[$

NOTA: l'ampiezza dell'intervallo $[a_2, b_2]$ è

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b_0 - a_0).$$

Metodo di bisezione

Quindi:

1. si trova **una soluzione** oppure
2. si determina **un intervallo che la contiene** di ampiezza **un quarto dell'intervallo di partenza** $\Leftrightarrow$ si migliora l'accuratezza.

Problema: quando arrestare il procedimento?

$$\Downarrow$$

Necessità di definire un criterio di arresto in dipendenza dall'accuratezza desiderata.

Osservazione

Supponiamo di aver eseguito n passi del metodo di bisezione, e di aver generato un intervallo $[a_n, b_n]$ contenente una soluzione c dell'equazione data. Se a_n e b_n hanno **le prime** m **cifre uguali**, siccome

$$c \in \; [a_n, b_n]$$

$$\Downarrow$$

abbiamo ottenuto m **cifre corrette.**

Esempio

Determiniamo 1 cifra decimale esatta della soluzione dell'equazione

$$e^{-x} - 3x = 0$$

nell'intervallo $]0, 1[$.

Per comodità, riportiamo i valori in una tabella.

Esempio

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$
0	0	1	1	-2.6321	0.5	-0.8935
1	0	1	0.5	-0.8935	0.25	0.0288
2	0, 25	0.0288	0.5	-0.8935	0.3750	-0.4377
3	0.25	0.0288	0.375	-0.4377	0.3125	-0.2059
4	0.25	0.0288	0.3125	-0.2059	0.2813	-0.0889
5	0.25	0.0288	0.2813	-0.0889	0.2656	-0.0301

a_5 e b_5 hanno **la stessa parte intera e la stessa prima cifra decimale.** Quindi $c \simeq 0.2$