Integrali

Primitiva

Primitiva di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, intervallo di $\mathbb{R}$. Si chiama *primitiva* di f, ogni funzione $F(x)$, derivabile in X, per cui si ha:

$$D[F(x)] = f(x),\ \forall x \in X.$$

Conoscendo la funzione $f(x)$ è possibile ottenere una sua funzione primitiva $F(x)$?

Controllare se la funzione

$$F(x) = \mathrm{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x$$

Calcoliamo la derivata di F:

$$D[F(x)] = D[\mathrm{sen} x + 5] = \cos x = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Downarrow$

La funzione

$$F(x) = \mathrm{sen} x + 5$$

è una primitiva di

$$f(x) = \cos x.$$

QUESTIONI DA RISOLVERE

- Esistenza di soluzioni;
- eventuale unicità;
- metodi per ottenere tali soluzioni.

Esistenza di primitive

TEOREMA (Esistenza di primitive di una funzione.)

Sia $f(x)$ una funzione definita in X.
Se f è continua in X, allora essa ammette primitive.

TEOREMA (Caratterizzazione delle primitive di una funzione.)

Sia $f(x)$ una funzione definita in X. Se f è dotata di primitive, allora esse sono in numero infinito e sono tra loro uguali a meno di una costante , ossia se

- $F(x)$ è una primitiva per f, anche la funzione $G(x) = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$ è ancora una primitiva di f;
- se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di f, allora la loro differenza è costante , cioè

$$F(x) - G(x) = c$$

Integrale indefinito.

definizione

Sia $f(x)$ una funzione dotata di primitive.
L'insieme di tali primitive si chiama *integrale indefinito* di f e si indica con

$$\int f(x)dx$$

Questo insieme è formato da funzioni che differiscono per una costante; pertanto si usa scrivere:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R},$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di f, ossia

$$D[F(x)] = f(x)$$

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito di $f(x) = 2x$.
La funzione

$$F(x) = x^2$$

ha come derivata

$$f(x) = 2x$$

$F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Si ha

$$\int 2x dx = x^2 + c.$$

Metodi per ottenere tali soluzioni

Il calcolo di un integrale è un'operazione che presenta, in generale, notevoli difficoltà.
Anche se la funzione da integrare è continua e, quindi, dotata di primitive, non esiste una strategia certa che permetta di risolverlo.

Proprietà

- decomposizione in somma:

$$\int af(x) + bg(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

Alcune tecniche di integrazione:

- integrazione per parti;
- integrazione per sostituzione;
- integrazione delle funzioni razionali;
- ecc.

Integrali immediati

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari e ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte è, immediato, ottenere i seguenti integrali indefiniti

Integrali immediati

$\int 1 \, dx = x + c$	$\int f'(x) \, dx = f(x) + c$
$\int x^{\alpha} \, dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c, \ \alpha \neq -1$	$\int f(x)^{\alpha} \, f'(x) dx = \frac{f(x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} + c, \alpha \neq -$
$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \log \lvert x \rvert + c$	$\int f(x)^{-1} \, f'(x) \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx =$
	$= \log \lvert f(x) \rvert + c$
$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$	$\int \sqrt{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{2}{3}\sqrt{f(x)^3} + c$
$\int a^{x} \, dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c$	$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$
$\int e^{x} \, dx = e^{x} + c$	$\int e^{f(x)} \, f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$

$\int \mathrm{sen} x \; dx = -\cos x + c$	$\int \mathrm{sen}\,(f(x)) \;\; f'(x) \; dx =$
	$= -\cos\,(f(x)) + c$
$\int \cos x \; dx = \mathrm{sen} x + c$	$\int \cos\,(f(x)) \;\; f'(x) \; dx =$
	$= \mathrm{sen}\,(f(x)) + c$
$\int \left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right) \; dx =$	$\int \left(1 + \mathrm{tg}^2\,(f(x))\right) f'(x) \; dx =$
$= \int \frac{1}{\cos^2 x}$	$= \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \; dx =$
$= \mathrm{tg} x + c$	$= \mathrm{tg}\,(f(x)) + c$

$\int \left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)\, dx =$	$\int \left(1+\operatorname{cotg}^2\left(f(x)\right)\right) f'(x)\, dx =$
$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx =$	$= \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\, dx =$
$= -\operatorname{cotg} x + c$	$= -\operatorname{cotg}\left(f(x)\right) + c$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x + c \\ -\mathrm{arcctg}\,x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,(f(x)) + c \\ -\mathrm{arcctg}\,(f(x)) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \mathrm{arcsen}\, x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$|x| < 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\, dx = \begin{cases} \mathrm{arcsen}(f(x)) + c \\ -\arccos(f(x)) + c \end{cases}$$

$$|f(x)| < 1$$

Integrazione per parti

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Chiameremo $f(x)$ il fattore finito, mentre $g'(x)$ è detto fattore differenziale.

Esempi

- $$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \int D[\frac{x^2}{2}]\log x\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2} D[\log x]\;dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\;dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\;dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

Esempi

- $\displaystyle\int xe^x\,dx \quad = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + c$

- $$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int D[x] \log x dx = \\ &= x \log x - \int x D[\log x] dx = \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c \end{aligned}$$

Il metodo di integrazione per sostituzione si basa sulla seguente uguaglianza:

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(y)) \cdot g'(y)\,dy\right]_{y=g^{-1}(x)},$$

mediante la quale l'integrale di partenza:

$$\int f(x)\,dx$$

viene ricondotto all'integrale:

$$\int f(g(y)) \cdot g'(y)\,dy,$$

attraverso la sostituzione

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y),$$

$$dx = g'(y)dy,$$

con $g(y)$ funzione derivabile ed invertibile.

Esempio

Calcoliamo

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}\right)\,dx$$

Poniamo:

$$y=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=y^2,\quad dx=D[y^2]dy=2ydy,$$

da cui

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}\right)\,dx=\int 2y\operatorname{arctg} y\,dy$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int 2y\operatorname{arctg} y\,dy &= y^2\operatorname{arctg} y-\int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy\\ &= y^2\operatorname{arctg} y-\int \frac{y^2+1-1}{1+y^2}\,dy\\ &= y^2\operatorname{arctg} y-y+\operatorname{arctg} y+c\end{aligned}$$

Dunque

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c.$$

Integrale definito

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$, si definisce **integrale definito** la differenza tra il valore assunto da una qualunque primitiva $F(x)$ di $f(x)$ in b e il valore assunto dalla stessa primitiva in a, e si scrive

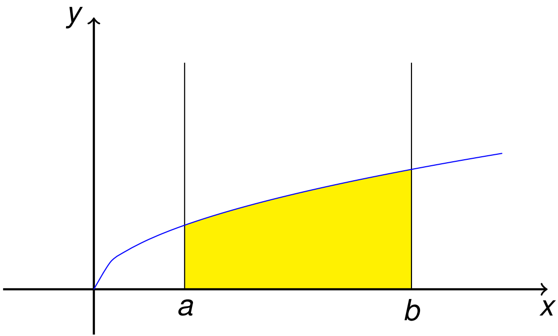
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Interpretazione geometrica

Se $f(x) > 0$

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

rappresenta l'**area** della porzione di piano racchiusa tra l'asse x, il grafico di $f(x)$ e le rette verticali di equazioni $x = a$ e $x = b$.



Funzione integrale

Sia $f(x)$ una funzione limitata e integrabile in un intervallo $[a, b]$.
Risulta integrabile in ogni intervallo $[a, x]$ con $x \leqslant b$.

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione limitata e integrabile in un intervallo $[a, b]$.
Si definisce **funzione integrale di f in $[a, b]$** la funzione
$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ che ad ogni x di $[a, b]$ associa

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema di additivià

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$.
Considerato un punto c in $]a, b[$ risulta

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema della media

Sia $f(x)$ una funzione limitata e integrabile in un intervallo $[a, b]$. Siano m e M rispettivamente l'estremo interiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$. Allora

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Teorema della media per funzioni continue

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto c in $]a, b[$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

INTEGRALI IMPROPRI

Estensione del concetto di integrale definito a:

- funzioni non limitate
- intervalli non limitati

Integrazione di funzioni non limitate.

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $]a, b]$.
$f(x)$ sia regolare in a e risulti:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad (\text{oppure} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty).$$

($f(x)$ non limitata in a). Allora **esiste**

$$\int_t^b f(x)\, dx = F(b) - F(t), \ \ \forall t \in]a, b[$$

Si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx = F(b) - \lim_{t \to a^+} F(t) -$$

Se tale limite esiste finito si dice che $f(x)$ è **integrabile** in $[a, b]$.

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, b[$.
$f(x)$ sia regolare in b e risulti:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty \quad (\text{oppure} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty).$$

($f(x)$ non limitata in b). Allora **esiste**

$$\int_a^t f(x)\, dx = F(t) - F(a), \ \ \forall t \in]a, b[$$

Si pone:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} F(t) - F(a).$$

Se tale limite esiste finito si dice che $f(x)$ è **integrabile** in $[a, b]$.

$f(x)$ sia regolare in a e b dove ammette limite infinito ($f(x)$ non limitata in a e in b).
Allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in]a,b[\,.$$

Se i due integrali impropri al secondo membro esistono e sono finiti si dice che $f(x)$ è **integrabile** in $[a,b]$.

Si dimostra che il valore così ottenuto non dipende dalla scelta di c.

Integrazione di funzioni su intervalli illimitati.

Sia $f(x)$ definita nell'intervallo $]-\infty, b]$ e ivi continua.

Allora $f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo chiuso $[t, b], \ \ \forall t \in (-\infty, b[$.

$$\int_t^b f(x)\ dx = F(b) - F(t).$$

Si pone

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\ dx = F(b) - \lim_{t \to -\infty} F(t).$$

Se tale limite esiste finito si dice che $f(x)$ è **integrabile** in $]-\infty, b]$

Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, +\infty[$.

Allora $f(x)$ è continua e limitata in ogni intervallo chiuso $[a, t], \ \ \forall t \in]a, +\infty[$.
Si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} F(t) - F(a).$$

Se tale limite esiste finito si dice che $f(x)$ è **integrabile** in $[a, +\infty[$

Sia $f(x)$ definita e continua in tutto $\mathbb{R}$. $\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Se i due integrali impropri al secondo membro esistono e sono finiti la funzione si dice integrabile in $]-\infty, +\infty[$.

Si dimostra che il valore così ottenuto non dipende dalla scelta di c.