/ **Determinazione di Punti min / max relativi**

1° Metodo (canonico): applicazione delle condizioni necessarie e sufficiente.

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- condizione necessaria: $f'(x) = 0$. $\exists\, x_0 : f'(x_0) = 0$, $\underline{x_0 \in X}$

- condizione sufficiente: $f''(x_0) > 0 \to x_0$ è un punto min. relativo

  $f''(x_0) < 0 \to x_0$ " " max relativo

  $f''(x_0) = 0 \to$ nulla si può dire

2° Metodo: applicazione del criterio di monotonia (Studio del segno della derivata prima)

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Studiare:

$f'(X) \geq 0$, cioè dove $f(X)$ è strett. crescente.

- Se $\exists\, x_0 : f'(x_0) = 0$, $x_0 \in X$ allora x_0 è punto di min. o max relativo.

- Se $\exists\, x_0 : f'(x_0) = 0$, $x_0 \notin X$ allora x_0 non è punto di min / max relativo.

Esempio

$f(x) = e^x - x$ $\qquad\qquad$ $E[f(x)] = \mathbb{R}$

$\boxed{f'(x) = e^x - 1}$

$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = \underset{= e^0}{1} \iff e^x = e^0$

$\iff x = 0$ (p. critico per f)

$f''(x) = e^x$

$f''(0) = e^0 = 1 > 0 \to x = 0$ è un punto di min rel.

$f(x) = e^x - x$

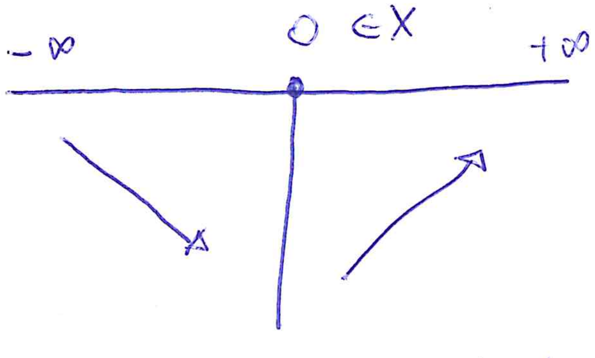
$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0$

$\iff x \geq 0$

$f(x)$ è strett. crescente $\forall x \in]0, +\infty[$

$f(x)$ è strett. decrescente $\forall x \;]-\infty, 0[$

$x = 0$ è punto critico, $x = 0 \in X = E[f(x)]$



$f(0) = e^0 = 1$ (minimo relativo)

$x = 0$ punto di min relativo

Esempio – Ricerca di p.ti min/max relativi

$f(x) = \log(x^2 + 3x - 4)$

$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 > 0\} =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$

$x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3 \mp 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x^2 + 3x - 4 > 0 \iff x < -4 \cup x > 1$

$\boxed{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 4}(2x + 3) = \frac{2x+3}{\underbrace{x^2 + 3x - 4}_{\neq 0}} = 0 \iff 2x + 3 = 0$$

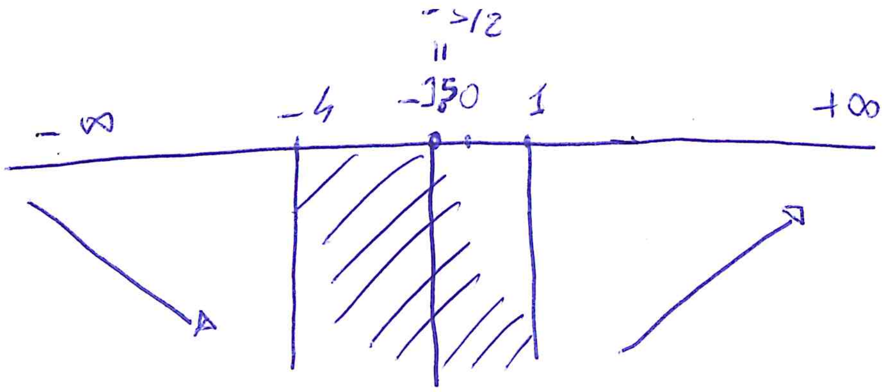
$\iff x = -\frac{3}{2} = -1.5 \notin E[f(x)]$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{2x+3}{\underbrace{x^2+3x-4}_{\forall 0}} \geq 0 \iff \cancel{\begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}}$$

vera in $E[f(x)]$

$\iff 2x + 3 \geq 0 \quad \forall x \in E[f(x)]$

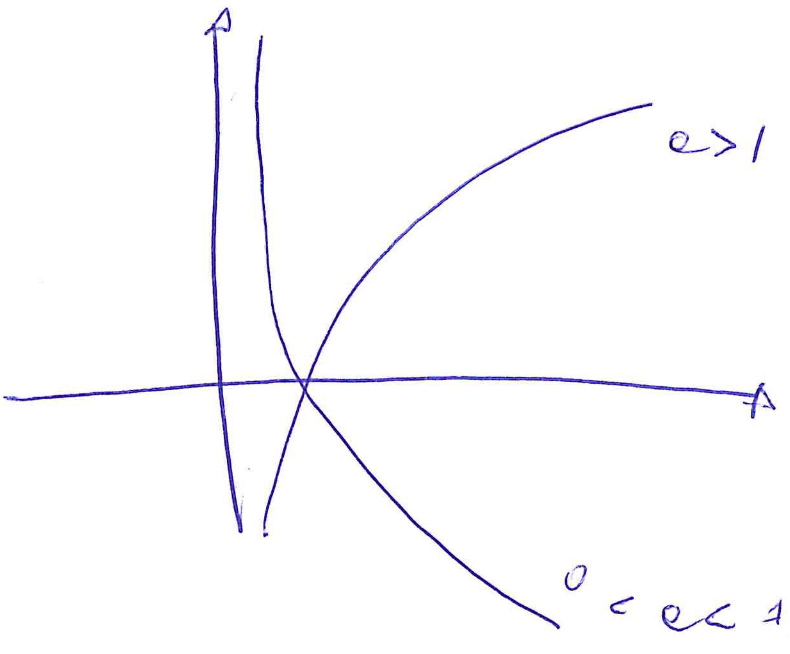
$x \geq -\frac{3}{2} \notin E[f(x)]$



$f'(x) \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2} = -1,5 \quad \forall x \in E[f(x)]$

$f(x)$ è strett. crescente $\forall x \in]1, +\infty[$

$f(x)$ " " decrescente $\forall x \in]-\infty, -5[$



$$f(x) = \sqrt{1 - \log^2 x}$$

$$E[f(x)] = \{ x \in \mathbb{R} : 1 - \log^2 x \geq 0 \}$$

$$\log^2 x - 1 \leq 0 \quad \to \quad \log^2 x = 1 \quad \to \quad \log x = \pm 1$$

$$(\log x + 1)(\log x - 1) \leq 0$$

$\log x = -1$

$e^{-1} = x$

$x = e^{-1}$

$\log x = 1$

$\boxed{x = e}$

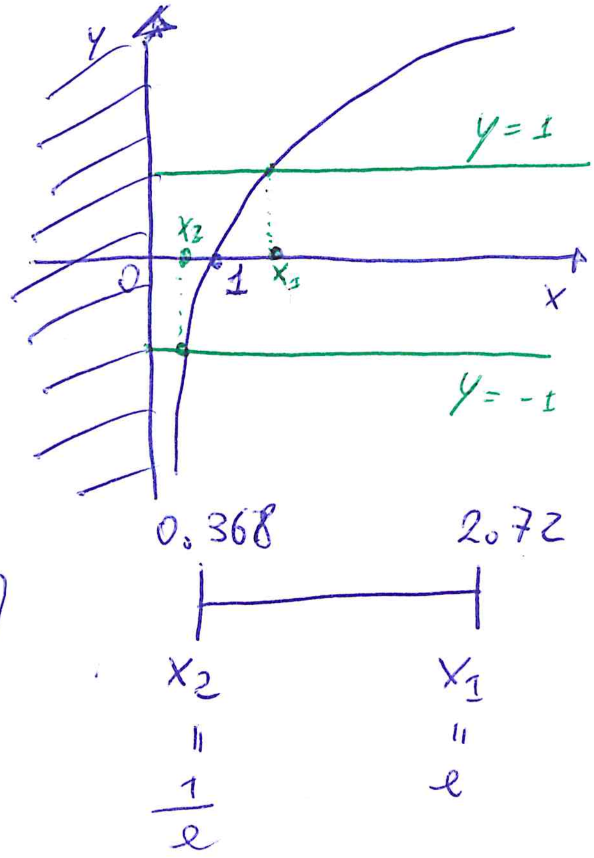
$\log e = 1$

$x_1 : \log x = 1$

$\boxed{e^1 = x = e}$

$x_2 : \log x = -1$

$\boxed{x = e^{-1}} = \frac{1}{e} =$



$$S : \{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e} \leq x \leq e \}$$

$$E[f(x)] = \left[\frac{1}{e}, e \right]$$

1. Estremi del dominio : $x = \frac{1}{e}$; $x = e$
2. Punti di non derivabilità : $x = \frac{1}{e}$; $x = e$
3. Punti di min/max relativi : $x = 1$

② Punti di non derivabilità

$$f(x) = \sqrt{1-\log^2 x} \qquad E[f(x)] = [\underset{0.37}{\tfrac{1}{e}}, \underset{2.7}{e}]$$

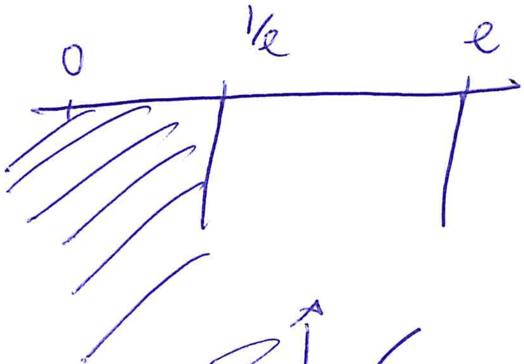
$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-\log^2 x}} \cdot (-\cancel{2}\log x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$$

$$E[f'(x)] = E[f(x)] - \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1-\log^2 x} = 0\}$$
$$= E[f(x)] - \{\tfrac{1}{e}, e\}$$
$$= [\tfrac{1}{e}, e] - \{\tfrac{1}{e}, e\}$$
$$=]\tfrac{1}{e}, e[$$

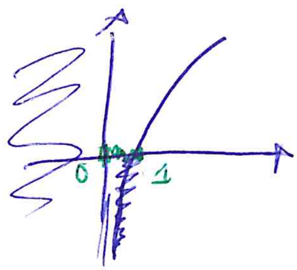
$x = \frac{1}{e}$; $x = e$ sono punti di non derivabilità

③ $$f'(x) \geq 0 \iff \frac{-\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \geq 0 \iff -\frac{\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \geq 0$$

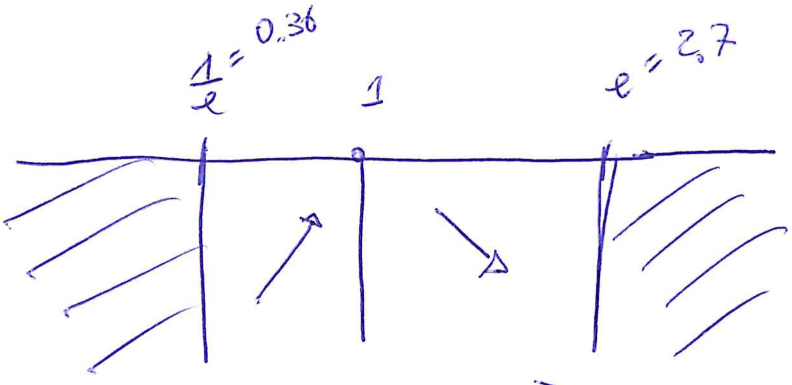
$$\iff \frac{\log x}{\underset{>0}{x}\underbrace{\sqrt{1-\log^2 x}}_{>0}} \leq 0 \iff$$



$$\iff \log x \leq 0 \quad \forall x \in E[f'(x)]$$
$$\forall x \in]\tfrac{1}{e}, e[$$
$$0 < x \leq 1 \quad \forall x \in]\tfrac{1}{e}, e[$$



$f'(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq 1 \quad \forall x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[$



$x \in E[f(x)]$

$x = 1$ è un punto di max. relativo

$x=1$; $f(1) = \sqrt{1-\cancel{\log 1}} = \sqrt{1} = 1 = \max f(x)$

$x=\frac{1}{e}$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{1-\log^2\left(\frac{1}{e}\right)} = \sqrt{1-(-1)^2} = \sqrt{1-1} = 0 = \min f(x)$

$x=e$; $f(e) = \sqrt{1-\log^2(e)} = \sqrt{1-(1)^2} = \sqrt{1-1} = 0 = \min f(x)$

$\min f(x) = 0$; $x = e^{\pm 1}$ è punto di minimo assoluto

$\max f(x) = 1$; $x = 1$ è punto di massimo assoluto