Teoremi di De L'Hôpital

24 settembre 2007

Siano f e g due funzioni definite in un intorno sinistro I^- di x_0 tali che:

- f e g derivabili in I^-;
- $g'(x)$ di segno costante in I^-.

Se le funzioni f e g sono dotate di limite sinistro in x_0 e vale una delle seguenti eventualità:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^-} f(x) &= \lim_{x\to x_0^-} g(x) = 0 \quad \text{(I Teorema)}\\ \lim_{x\to x_0^-} |f(x)| &= \lim_{x\to x_0^-} |g(x)| = +\infty \quad \text{(II Teorema)}\end{aligned}$$

allora se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$\Downarrow$$

1. $\exists \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Risultati analoghi valgono per funzioni definite in un intorno destro I^+ di x_0.
Se le funzioni sono definite in un intorno completo I di x_0, i Teoremi di De L'Hôpitalsi possono applicare per il calcolo del

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempio

Calcoliamo il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x+\sqrt{x}}$$

1. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$;
2. $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]0,+\infty)$;
3. $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ in $]0,+\infty)$

$$\Downarrow$$

possiamo applicare la regola di De L'Hôpital.

$$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)} = 0$$

Quindi

1. esiste $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x + \sqrt{x}} = 0.$$

Applicando i teoremi di De L'Hôpital, si possono calcolare anche limiti che si presentano come forme indeterminate diverse da quelle mostrate. Ad esempio , se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\Downarrow$$

il $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \pm\infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Si osservi che

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} & g(x) \neq 0 \text{ per } x \in \ \mathrm{I}(x_0) \\[2ex] \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} & f(x) \neq 0 \text{ per } x \in \ \mathrm{I}(x_0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} & \text{f. indet. } \frac{0}{0} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} & \text{f. indet. } \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

si possono usare i teoremi di De L'Hôpital.

Esempio

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

Il limite così riscritto si presenta nella forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$.
Applichiamo la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = 0$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

$$\Downarrow$$

il $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x)$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Si osservi che

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \quad \text{f. indet. } \frac{0}{0}$$

$$\Downarrow$$

si possono usare i teoremi di De L'Hôpital.

Siano ancora $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Si può anche riscrivere

$$f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

$$\Downarrow$$

si possono usare i teoremi di De L'Hôpital per calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ e successivamente discutere il limite di partenza.

Infatti, se:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty\cdot(1-l) =$$

$$= \begin{cases} +\infty & l<1 \\ +\infty\cdot 0 & l=1 \\ -\infty & l>1 \end{cases}$$

Se $l = 1$ occorre risolvere

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{f. indet. } \frac{0}{0}$$

Esempio

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x - \log x$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \log x = \lim_{x\to+\infty} x\Big(1 - \frac{\log x}{x}\Big)$$

Sappiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(1 - \frac{\log x}{x}\Big) = +\infty$$