Concavità e convessità

Combinazione convessa

Combinazione convessa

Dati due punti x_1 e x_2 si definisce combinazione convessa di x_1 e x_2 la combinazione $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Funzione concava

Funzione concava

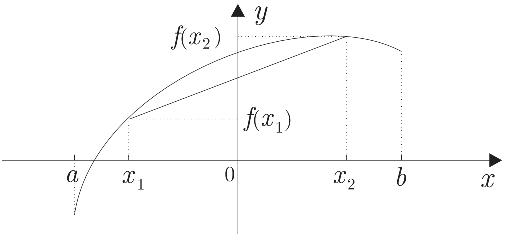
Una funzione f definite in $[a, b]$, si definisce concava se per ogni coppia x_1 e x_2 in $[a, b]$ si ha
$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$.
L'immagine di una combinazione convessa è maggiore della combinazione convessa delle immagini.

Funzione concava

Sia f una funzione definita in $X = [a, b]$. Se, comunque presi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ risulta

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1),\ \forall x \in]x_1, x_2[$$

si dice che la funzione è ***concava in*** X.

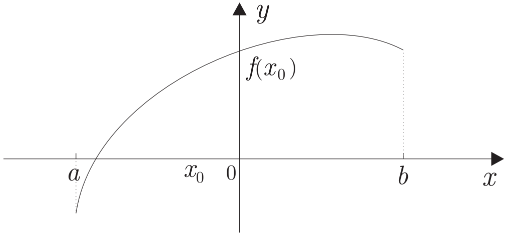


Funzione concava in un punto

Sia f una funzione definita in X. Preso $x_0 \in X$, si dice che la funzione è ***concava in*** x_0 se esiste un intorno I di x_0, $\mathrm{I} \subseteq X$, nel quale la funzione è concava.

Nota: se f è derivabile in x_0,
f è concava in x_0 $\Leftrightarrow$ la retta tangente alla curva $y = f(x)$ in x_0 si trova al di sopra del grafico di f in un opportuno intorno di x_0:

$$\exists I \in \mathrm{I}(x_0) : f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \ \forall x \in I - \{x_0\}$$



Funzione convessa

Funzione convessa

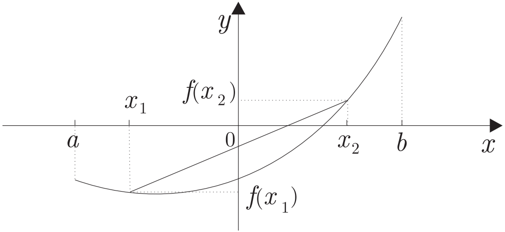
Una funzione f definite in $[a, b]$, si definisce convessa se per ogni coppia x_1 e x_2 in $[a, b]$ si ha
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.
L'immagine di una combinazione convessa è minore della combinazione convessa delle immagini.

Funzione convessa

Sia f una funzione definita in $X = [a, b]$. Se, comunque presi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ risulta

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1),\ \forall x \in]x_1, x_2[$$

si dice che la funzione è ***convessa in*** X.

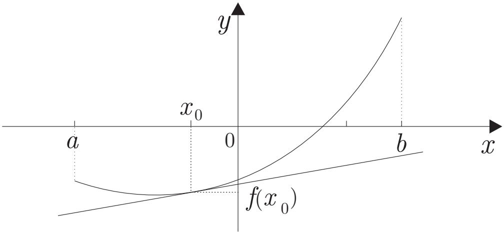


Funzione convessa in un punto

Sia f una funzione definita in X. Preso $x_0 \in X$, si dice che la funzione è ***convessa in*** x_0 se esiste un intorno I di x_0, $\mathrm{I} \subseteq X$, nel quale la funzione è convessa.

Nota: se f è derivabile in x_0,
f è convessa in $x_0 \Leftrightarrow$ la retta tangente alla curva $y = f(x)$ in x_0 si trova al di sotto del grafico di f in un opportuno intorno di x_0:

$$\exists I \in \mathrm{I}(x_0) : f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \ \forall x \in \mathrm{I} - \{x_0\}$$



Punto di flesso

Sia f una funzione definita in X. Si dice che f presenta un **flesso** in $x_0 \in X$ se esistono

- un intorno sinistro di x_0 nel quale f è concava (convessa)
- un intorno destro di x_0 nel quale f è convessa (concava)

Sia f una funzione definita in X. Si ha

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ convessa in x_0;
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ concava in x_0;
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ nulla si può dire sul comportamento della funzione in x_0.

Teorema: sia f una funzione definita in X. Se f è dotata di derivata seconda in un punto di flesso x_0 , allora $f''(x_0) = 0$.

In generale, se $f^{(k)}(x_0) = 0 \ k = 2, \dots, n-1$ allora:

n	$f^{(n)}$		
pari	positiva	$\Rightarrow$	f convessa in x_0,
pari	negativa	$\Rightarrow$	f concava in x_0,
dispari	positiva	$\Rightarrow$	x_0 punto di flesso,
			concava per $x < x_0$,
			convessa per $x > x_0$,
dispari	negativa	$\Rightarrow$	x_0 punto di flesso,
			convessa per $x < x_0$,
			concava per $x > x_0$

Teorema (**criterio di convessità e concavità**)
Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ e dotata di derivata seconda in $]a, b[$. Allora

- f convessa in $[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in\,]a, b[$
- f concava in $[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in\,]a, b[$

Teorema
Una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$, è affine in tutto $[a, b] \Leftrightarrow f''(x) = 0 \; \forall\, x \in\,]a, b[$.