

# Applicazioni derivate

# Segno della derivata in un punto

Siano  $f$  una funzione definita in  $X$  e  $x_0 \in X$ .

Se  $f$  è dotata di derivata in  $x_0$  allora

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$  strettamente crescente in  $x_0$ ;
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$  strettamente decrescente in  $x_0$ ;
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$  nulla si può dire sul comportamento della funzione.

## Teorema di Fermat

Siano  $f$  una funzione definita in  $X$ ,  $x_0 \in X$ . Se la funzione presenta un minimo (massimo) relativo in  $x_0$  allora vale una delle due alternative seguenti:

- esiste la derivata in  $x_0$  e  $f'(x_0) = 0$ ;
- non esiste la derivata in  $x_0$ .

## Teorema di Rolle

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . **Se**

- $f$  è continua in  $[a, b]$
- $f$  è derivabile in  $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$ ,

**allora**

$$\exists x_0 \in ]a, b[ : f'(x_0) = 0$$

# Teorema di Lagrange

## Teorema di Lagrange

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . **Se**  $f$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ ,  
**allora**

$$\exists x_0 \in ]a, b[ : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

# Corollari del Teorema di Lagrange

## Teorema 1 (caratterizzazione delle funzioni costanti)

Una funzione è costante in un intervallo  $[a, b]$  **se e solo se** è derivabile in  $]a, b[$  e  $f'(x) = 0 \forall x \in ]a, b[$ .

## Teorema 2 (criterio di monotonia)

Sia  $f$  una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . **Allora**

- $f$  è crescente in  $[a, b]$   $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in ]a, b[$ .
- $f$  è decrescente in  $[a, b]$   $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in ]a, b[$ .

## Teorema 3 (criterio di stretta monotonia)

Una funzione derivabile in un intervallo  $[a, b]$  è strettamente crescente (decrescente) in tutto  $[a, b]$  **se e solo se**  $f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ )  $\forall x \in ]a, b[$  ed inoltre, non esiste un intervallo  $I \subset ]a, b[$  nel quale la derivata sia identicamente nulla.

# Derivate di ordine superiore

## Derivata seconda

Sia  $f$  una funzione definita, continua e derivabile in  $X$ . Se la derivata  $f'(x)$  ammette derivata, essa si definisce **derivata seconda** di  $f$  e si indica con il simbolo  $f''$ .

## Derivate di ordine superiore

Con considerazioni analoghe, è possibile definire le derivate di ordine superiore; in generale, con il simbolo  $f^{(n)}$  si indica la derivata di ordine  $n$ .

Se  $f^{(k)}(x_0) = 0$   $k = 1, \dots, n - 1$  allora:

$n$	$f^{(n)}$		
pari	positiva	$\Rightarrow$	$x_0$ punto di minimo relativo,
pari	negativa	$\Rightarrow$	$x_0$ punto di massimo relativo,
dispari	positiva	$\Rightarrow$	$f$ strettamente crescente in $x_0$ ,
dispari	negativa	$\Rightarrow$	$f$ strettamente decrescente in $x_0$ .



# Teorema di Weierstrass

Se

$f$  è continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  allora  $f$  è dotata di minimo e massimo:

$$\exists m = \min f, \exists M = \max f \Rightarrow$$

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Di conseguenza esistono

- 1 almeno un punto di minimo  $x_m \in [a, b]$ ,  $f(x_m) = m$ ;
- 2 almeno un punto di massimo  $x_M \in [a, b]$ ,  $f(x_M) = M$ .

Consideriamo una funzione definita in un intervallo, o, più in generale, in un insieme formato dall'unione di intervalli; supponiamo che essa derivabile in tutto il suo dominio, ad eccezione al più di un insieme finito di punti. I punti di minimo e massimo devono essere localizzati:

- agli estremi degli intervalli che compongono il dominio di  $f$ ;
- nei punti di minimo e massimo relativo in cui
  - la funzione è derivabile e la derivata è nulla;
  - la funzione non è derivabile.

- 1 valutazione della funzione negli estremi del campo di esistenza;
- 2 **calcolo della derivata**
  - ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti;
  - individuazione dei punti in cui non esiste la derivata e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti.

Il massimo ed il minimo della funzione, se esistono, sono dati, rispettivamente, dal **massimo** e dal **minimo dei valori calcolati**.

Calcoliamo il massimo ed il minimo della funzione  $e^x - x$  per  $x \in [-2, 3]$ .

- 1 valutazione della funzione agli estremi:

$$f(-2) = e^{-2} + 2 \simeq 2.13, \quad f(3) = e^3 - 3 \simeq 17.08;$$

- 2 calcolo della derivata:

$$f'(x) = D[e^x - x] = e^x - 1$$

- ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti:

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad f(0) = 1;$$

La funzione ammette derivata in tutto il suo campo di esistenza.  
Posto

$$y_1 = f(-2) \simeq 2.13, \quad y_2 = f(3) \simeq 17.08$$

si ha

$$\min f = \min\{y_1, y_2, 1\} \Rightarrow$$

$$\min f = 1, \quad x = 0 \text{ punto di minimo}$$

$$\max f = \max\{y_1, y_2, 1\} \Rightarrow$$

$$\max f = y_2, \quad x = 3 \text{ punto di massimo}$$