

# Continuità

## Definizione di continuità in un punto

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in X$ . Si dice che la funzione  $f$  è **continua** in  $x_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0)), \exists J \in J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che  $f$  è continua in  $x_0$ , se e soltanto se è valida una delle seguenti alternative:

- 1  $x_0$  punto di accumulazione per  $X$ .  $f$  è regolare in  $x_0$  e

$$\lim_{x_0} f(x) = f(x_0);$$

- 2  $x_0$  punto isolato di  $X$ .

## Definizione di continuità

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice che  $f$  è continua in  $X$  se essa è continua in tutti i punti di  $X$ .

## Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

## Teorema

Somma algebrica, prodotto, rapporto e composta di funzioni continue è continua.

# Punti di discontinuità

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ .

Se  $f$  non è continua in  $x_0$ , si dice che  $x_0$  è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ;
- **non eliminabile altrimenti**. In particolare la discontinuità è

- **di I specie** se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$$
$$l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \quad l_1 \neq l_2;$$

- **di II specie** negli altri casi.