Calcolo dei limiti

Forma indeterminata $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$

Sia

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = a \neq 0, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0$$

allora il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ si presenta nella forma

$$\frac{a}{0}, \quad a \neq 0$$

Forma indeterminata $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$

Primo caso

Se $\exists I(x_0) : \forall x \in I, \ x \neq x_0, f(x) > 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Osserviamo che $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ quindi, in particolare,

$$\exists I(0) : f(x) > 0 \ \forall \ x \in I, \ x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Forma indeterminata $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$

Secondo caso

Se $\exists I(x_0) : \forall x \in I, \; x \neq x_0, \; f(x) < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{-x^4}$

Osserviamo che $f(x) < 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R} - \{0\}$ quindi, in particolare,

$$\exists I(0) : f(x) < 0 \; \forall \; x \in I, \; x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^4} = -\infty$$

Forma indeterminata $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$

Terzo caso

Se $\forall I(x_0)$: $f(x)$ assume valori di segno alternato in $I \Rightarrow$ non esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$

esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Osserviamo che $f(x) < 0 \ \forall \ x < 0$ e $f(x) > 0 \ \forall \ x > 0$ quindi
$\forall \ I^-(0), \ x \in I^- \Rightarrow f(x) < 0,$
$\forall I^+(0), \ x \in I^+ \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$
ovvero $\forall \ I(0) \ f$ assume valori di segno alternato in $I \Rightarrow$ quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \textit{non} \quad \textit{esiste}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Il numeratore **non ammette limite** per $x \to +\infty$. Osserviamo però che

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall\, x \neq 0$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

per il criterio del confronto segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \simeq 2.71828...$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Osserviamo che $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[- \{0\}$

$$|\text{sen}x| < |x| < |\text{tg}x| \Leftrightarrow$$

$$|\text{sen}x| < |x| < \frac{|\text{sen}x|}{\cos x}$$

Nella relazione

$$|\mathrm{sen} x| < |x| < \frac{|\mathrm{sen} x|}{\cos x}$$

si divida per $|\mathrm{sen} x|$. I valori di x e $\mathrm{sen} x$ sono concordi in segno per $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, pertanto

$$\frac{|x|}{|\mathrm{sen} x|} = \frac{x}{\mathrm{sen} x}.$$

Quindi si ottiene

$$1 < \frac{x}{\mathrm{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \frac{\mathrm{sen} x}{x} > \cos x$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

per il criterio del confronto, segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsen} x}{x} = 1$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^\alpha}{a^x} = 0, \quad 0 < a < 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Principio di sostituzione dei polinomi

Dato un polinomio di grado n

$$\mathrm{P}_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}_n(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, a_n > 0 \\ -\infty, a_n < 0 \end{cases}$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}_n(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, a_n > 0, n \text{ pari} \\ -\infty, a_n < 0, n \text{ pari} \\ -\infty, a_n > 0, n \text{ dispari} \\ +\infty, a_n < 0, n \text{ dispari} \end{cases}$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x-2x^3}{x^4-2x^3+3}$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x-2x^3) = \lim_{x\to+\infty}(-2x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x^4-2x^3+3) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

quindi il limite si presenta nella forma indeterminata

$$\frac{-\infty}{+\infty}$$

Esempio

Applicando il principio di sostituzione dei polinomi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x-2x^3}{x^4-2x^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+4x^4-2x^3}{x^2-2x^4+3}$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(1+4x^4-2x^3) = \lim_{x\to+\infty}(4x^4) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x^4+3) = \lim_{x\to+\infty}(-2x^4) = -\infty$$

quindi il limite si presenta nella forma indeterminata

$$\frac{+\infty}{-\infty}$$

Esempi

Applicando il principio di sostituzione dei polinomi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+4x^4-2x^3}{x^2-2x^4+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} (-2) = -2$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x - 2x^5}{2x^4 - 2x^3 + 3}$$

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x - 2x^5) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^5) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} (2x^4 - 2x^3 + 3) = \lim_{x \to +\infty} (2x^4) = +\infty$$

quindi il limite si presenta nella forma indeterminata

$$\frac{-\infty}{+\infty}$$

Esempio

Applicando il principio di sostituzione dei polinomi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x-2x^5}{2x^4-2x^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^5}{2x^4} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

Dati due polinomi $\mathrm{P}_n(x),\ \mathrm{P}_m(x)$

$$\mathrm{P}_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$\mathrm{P}_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

di grado rispettivamente $n,\ m$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} \cdot (+\infty), & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

Limiti di funzioni razionali

Analogamente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} \cdot (-\infty)^{n-m}, & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$