

# Limiti

# Definizione generale di limite

## Definizione

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  tali che

- $x_0$  punto di accumulazione per  $X$  se  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;
- $X$  illimitato superiormente se  $x_0 = +\infty$ ;
- $X$  illimitato inferiormente se  $x_0 = -\infty$ .

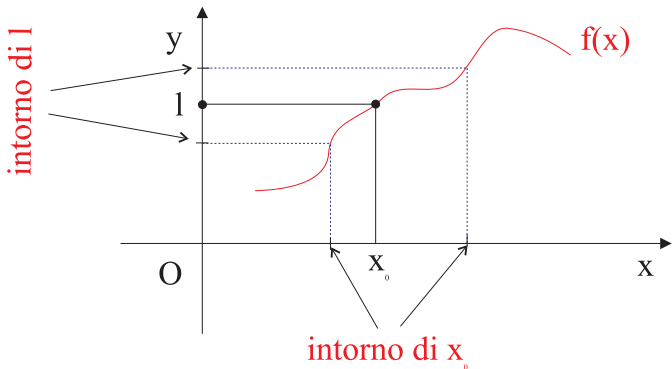
Si dice che **la funzione è regolare in  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  e ammette limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$**  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$



La funzione  $f(x)$  assume valori sempre più vicini ad  $l$  man mano che  $x$  si avvicina a  $x_0$ .

# Funzione convergente in $x_0$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $X$ .

Si dice che  $f$  converge ad  $\ell \in \mathbb{R}$  per  $x$  che tende a  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

# Funzione divergente positivamente in $x_0$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $X$ .

Si dice che  $f$  diverge positivamente per  $x$  che tende a  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) > K$$

# Funzione divergente negativamente in $x_0$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $X$ .

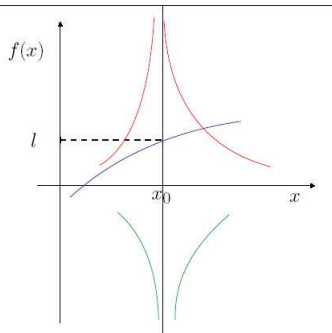
Si dice che  $f$  diverge negativamente per  $x$  che tende a  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -K$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

# Funzione convergente in $+\infty$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato superiormente.

Si dice che  $f$  converge a  $\ell \in \mathbb{R}$  per  $x$  che tende a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap ]H, +\infty) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



# Funzione divergente positivamente in $+\infty$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato superiormente.

Si dice che  $f$  diverge positivamente per  $x$  che tende a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap ]H, +\infty) \Rightarrow f(x) > K$$

# Funzione divergente negativamente in $+\infty$

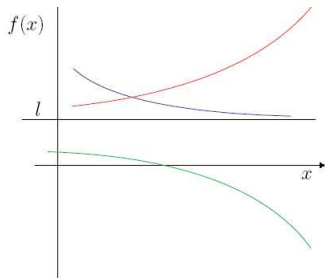
Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato superiormente.

Si dice che  $f$  diverge negativamente per  $x$  che tende a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap ]H, +\infty) \Rightarrow f(x) < -K$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

# Funzione convergente in $-\infty$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato inferiormente.

Si dice che  $f$  converge ad  $\ell \in \mathbb{R}$  per  $x$  che tende a  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

# Funzione divergente positivamente in $-\infty$

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato inferiormente.

Si dice che  $f$  diverge positivamente per  $x$  che tende a  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[ \Rightarrow f(x) > K$$

# Funzione divergente negativamente in $-\infty$

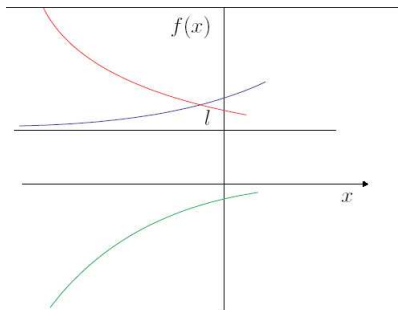
Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $X$ , con  $X$  illimitato inferiormente.

Si dice che  $f$  diverge negativamente per  $x$  che tende a  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

se

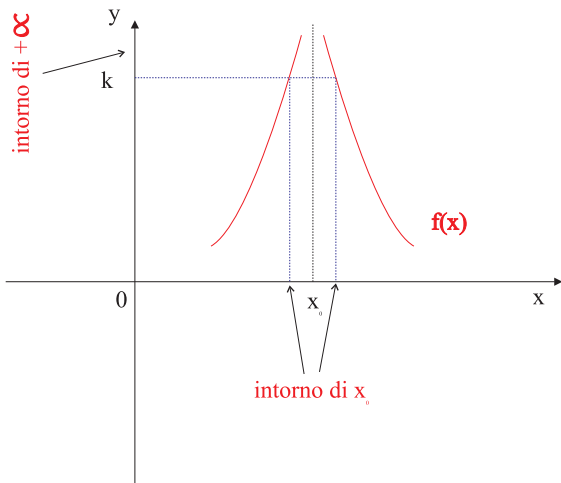
$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[ \Rightarrow f(x) < -K$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



La funzione  $f(x)$  assume valori sempre più grandi man mano che  $x$  si avvicina a  $x_0$ .



# Teorema di unicità del limite

## Teorema di unicità del limite

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

e  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Se la funzione ammette limite in  $x_0$ , esso è unico.**

# Teorema del confronto

## Teorema del confronto

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f$  e  $g$  due funzioni di  $X$  in  $\mathbb{R}$ , regolari in  $x_0$ .  
Valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

## Criterio del confronto

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f, g$  e  $h$  tre funzioni di  $X$  in  $\mathbb{R}$ .

Se

- 1  $f$  e  $h$  sono regolari in  $x_0$ ;
- 2  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ ;
- 3  $\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

# Criterio del confronto

Inoltre

se

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty;$

②  $\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty.$$

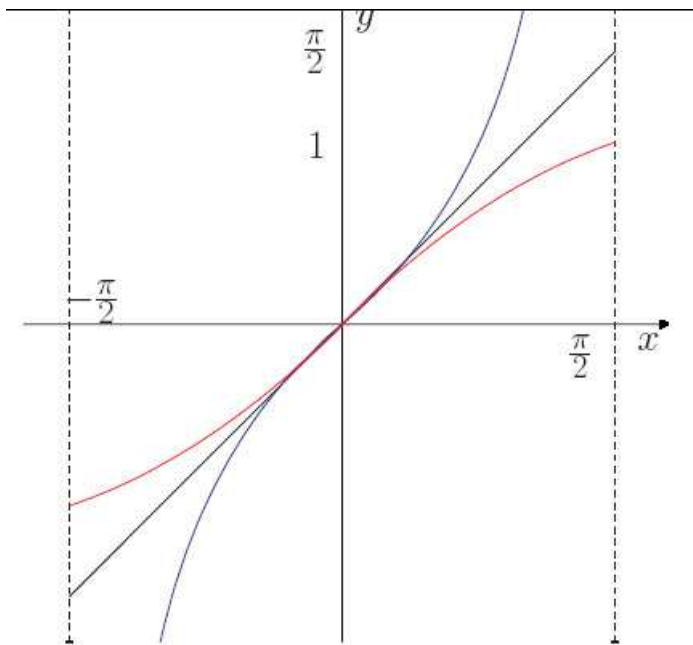
Se

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty;$

②  $\exists I \in I(x_0) : g(x) \leq h(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty.$$



# Teorema della permanenza del segno

## Teorema della permanenza del segno

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è regolare in  $x_0$  valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

# Teorema della permanenza del segno

Inoltre

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$$

e

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \geq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

## Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \left\{ \begin{array}{l} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ \mathbf{a} + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{array} \right.$$



## Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \left\{ \begin{array}{l} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ \mathbf{a} - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - \mathbf{a} = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{array} \right.$$

## Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \left\{ \begin{array}{l} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{array} \right.$$

## Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita}; \\ \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

# Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

## Proposizione

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se  $f$  e  $g$  sono regolari in  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora la somma, il prodotto, il rapporto e la potenza tra le funzioni sono regolari.

# Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

## Inoltre

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ , se  $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$  se  $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché  $l \pm m$ ,  $l \cdot m$ ,  $\frac{l}{m}$ ,  $l^m$  abbiano senso in  $\overline{\mathbb{R}}$ .

# Forme indeterminate

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty), \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)}, (+\infty)^0, 0^0$$

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$  e

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se la restrizione di  $f$  all'insieme  $X_r = X \cap ]x_0, +\infty)$  è regolare in  $x_0$ , si definisce **limite destro** di  $f$  al tendere di  $x$  a  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di  $f$  all'insieme  $X_r$ .

Se la restrizione di  $f$  all'insieme  $X_I = X \cap (-\infty, x_0[$  è regolare in  $x_0$ , si definisce **limite sinistro** di  $f$  al tendere di  $x$  a  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

il limite della restrizione di  $f$  all'insieme  $X_I$ .



Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, **ma ammette limite destro e sinistro.**

Siano  $I = ]a, b[$  e

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se  $f$  è monotona in  $I$  allora

1  $f$  è regolare in  $a$  e  $b$ ;

2  $f$  crescente  $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x);$$

3  $f$  decrescente  $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x).$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{10} x$$

Per la monotonia della funzione logaritmo si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a X = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a X = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$