

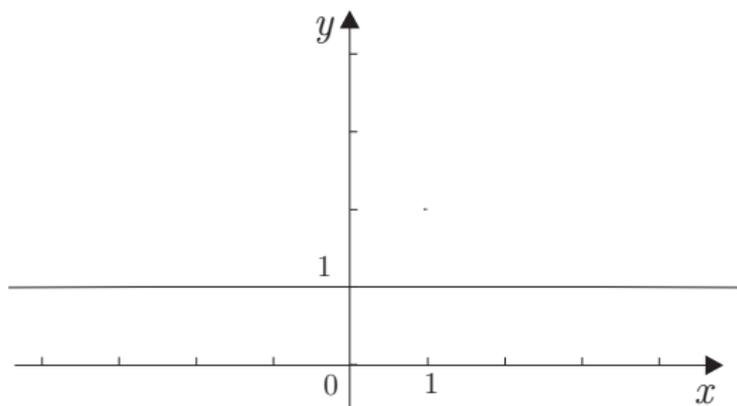
Funzioni elementari

Fissato $n \in \mathbb{N}_0$ la funzione

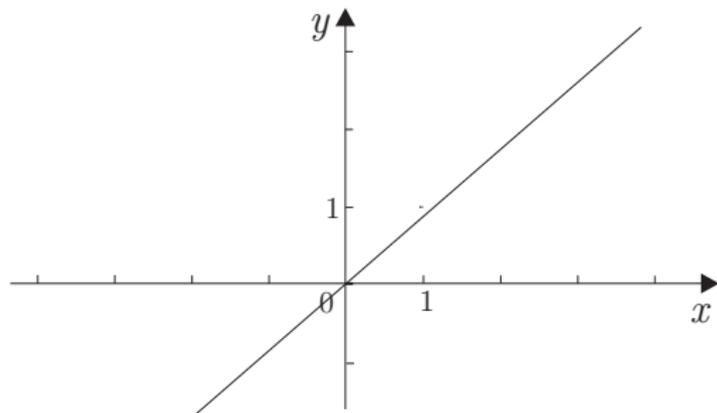
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

si chiama funzione **potenza n -ma**.

$$n = 0 \Rightarrow f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^0 = 1 \in \mathbb{R}$$



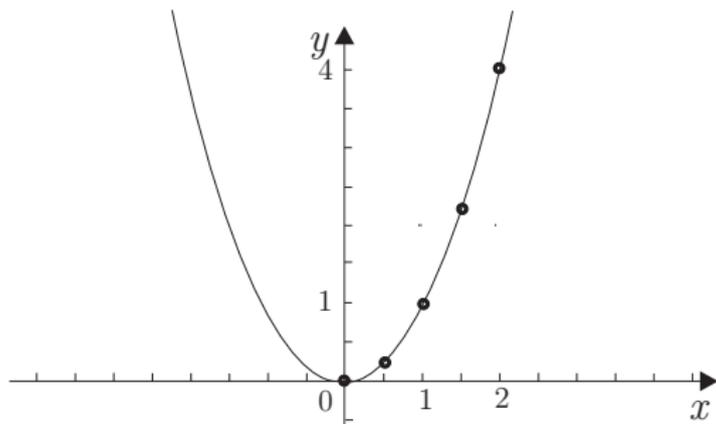
$$n = 1 \Rightarrow f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^1 = x \in \mathbb{R}$$



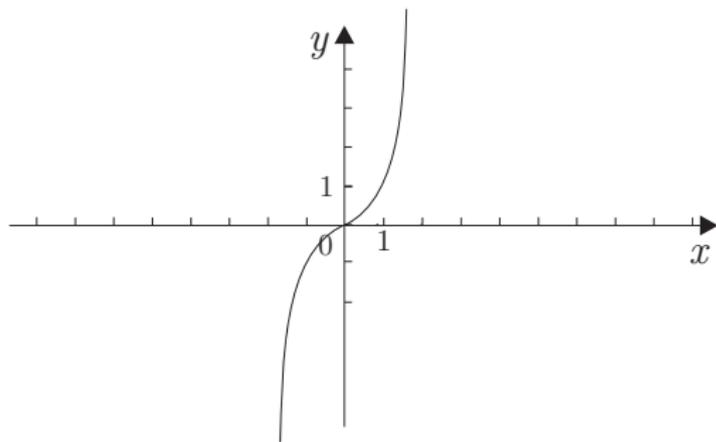
Funzione identica

Casi particolari

$$n = 2 \Rightarrow f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$$



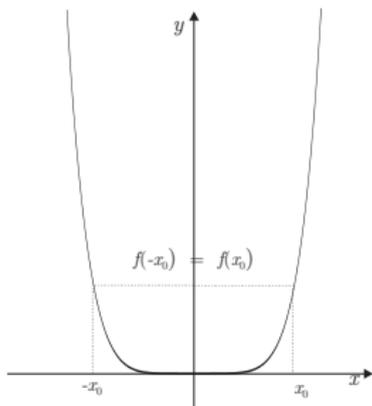
$$n = 3 \Rightarrow f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$$



Proprietà della funzione potenza n -ma

Osserviamo che, se n è pari

- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la restrizione della funzione a $[0, +\infty)$ è **strettamente crescente** su $[0, +\infty)$.
- $(-x)^n = x^n \Rightarrow$ la funzione potenza n -ma è una **funzione pari**.



Proprietà della funzione potenza n -ma

Osserviamo che, se n è dispari

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la funzione è **strettamente crescente**;
- $(-x)^n = -x^n \Rightarrow$ la funzione potenza n -ma è una **funzione dispari**.

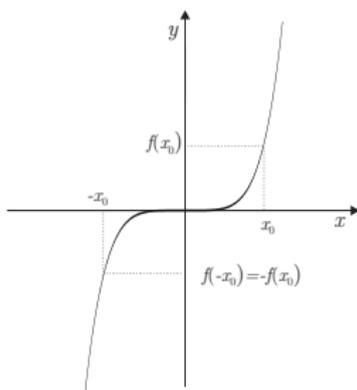
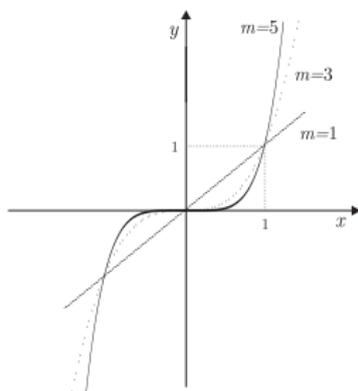
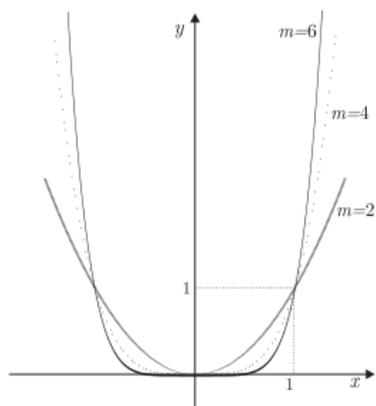


Grafico Potenza



Proprietà della funzione potenza n -ma

La funzione potenza n -ma è

- per ogni n dispari
 - illimitata inferiormente, illimitata superiormente:
 $\sup x^n = +\infty, \inf x^n = -\infty$
- per ogni n pari
 - limitata inferiormente, illimitata superiormente:
 $\sup x^n = +\infty, \inf x^n = \min f(x) = 0$

La restrizione della funzione potenza nell'intervallo $[0, +\infty)$

$$f : x \in [0, +\infty) \rightarrow f(x) = x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

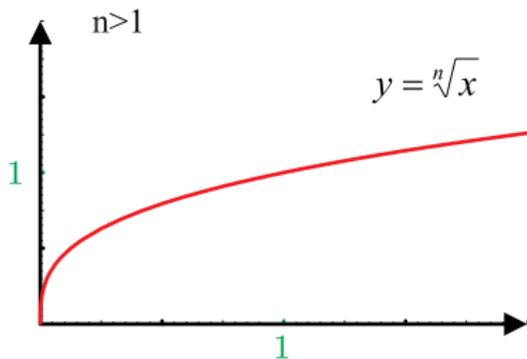
L'inversa di tale restrizione si dice **Radice n-ma**

Funzione radice n-ma

$$f : x \in [0, +\infty) \rightarrow y = f(x) = \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione radice n-ma è una funzione **strettamente crescente**.

$$\min f(x) = 0 ; \quad \sup f(x) = +\infty$$



Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$$

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$$

$$x^{-n} \cdot x^n = x^{n-n} = x^0 = 1$$

$$\frac{1}{x^n} \cdot x^n = 1$$

Funzione esponenziale

Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, la funzione:

$$\exp_a : x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp_a(x) = a^x \in \mathbb{R}^+$$

si chiama funzione esponenziale.

Osserviamo che:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & a > 1 \\ a^{x_1} = a^{x_2} = 1 & a = 1 \\ a^{x_1} > a^{x_2} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

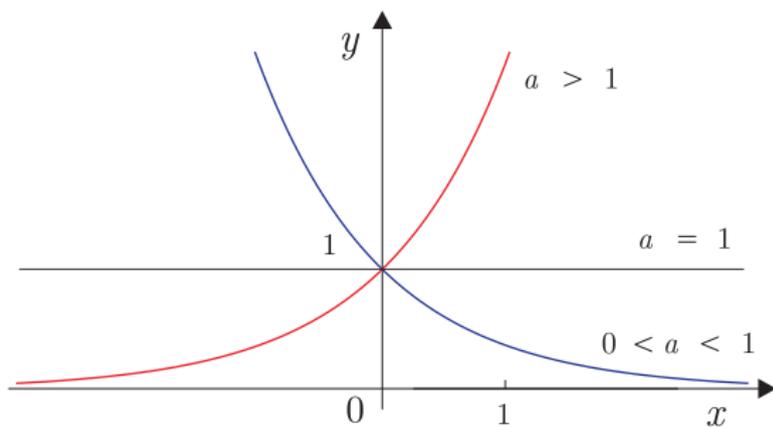
- strettamente crescente per $a > 1$
- costante per $a = 1$
- strettamente decrescente per $0 < a < 1$

La funzione esponenziale è:
tranne che per $a = 1$,

- limitata inferiormente
- **illimitata** superiormente

$$\sup \exp_a(x) = +\infty ; \quad \inf \exp_a(x) = 0$$

Grafico della funzione esponenziale



La funzione esponenziale è **invertibile** se $a \neq 1$
 $\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \exists ! x \in \mathbb{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$

L'inversa della funzione esponenziale si dice **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow x = \log_a y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+.$$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(c \cdot b)$;

- $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$;

- $b \log_a c = \log_a(c^b)$;

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a$;

- $a = b^{\log_b a}$;

- $a^c = b^{c \log_b a}$.

Funzione logaritmica

Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica

$$\log_a : x \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$

è:

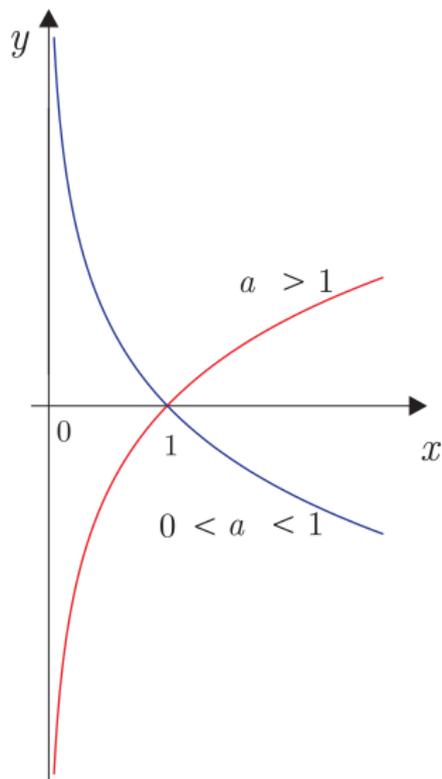
- **strettamente crescente** per $a > 1$
- **strettamente decrescente** per $0 < a < 1$

La funzione logaritmica è:

- **illimitata** inferiormente
- **illimitata** superiormente

$$\sup \log_a(x) = +\infty ; \inf \log_a(x) = -\infty$$

Funzione logaritmo



Funzione potenza con esponente reale

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f : x \in [0, +\infty) \rightarrow f(x) = x^\alpha \in [0, +\infty), \quad \alpha > 0$$

$$f : x \in]0, +\infty) \rightarrow f(x) = x^\alpha \in]0, +\infty), \quad \alpha < 0$$

si chiama **funzione potenza con esponente reale**.

La funzione potenza con esponente reale è:

- strettamente crescente per $\alpha > 0$
- strettamente decrescente per $\alpha < 0$

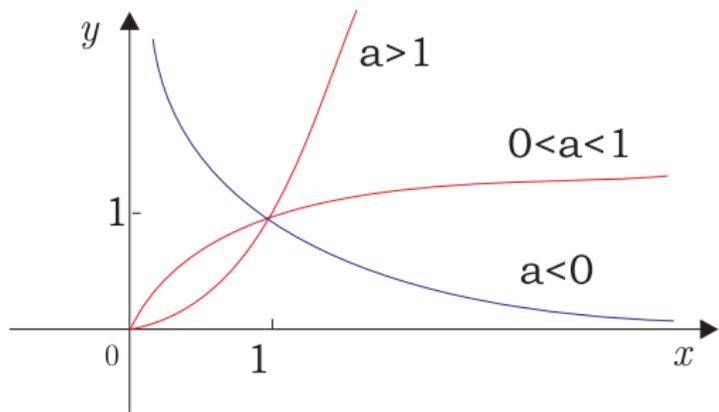
La funzione risulta:

- limitata inferiormente,
- **illimitata superiormente**

$$\sup x^\alpha = +\infty$$

$$\text{per } \alpha > 0, \min x^\alpha = 0$$

$$\text{per } \alpha < 0, \inf x^\alpha = 0$$



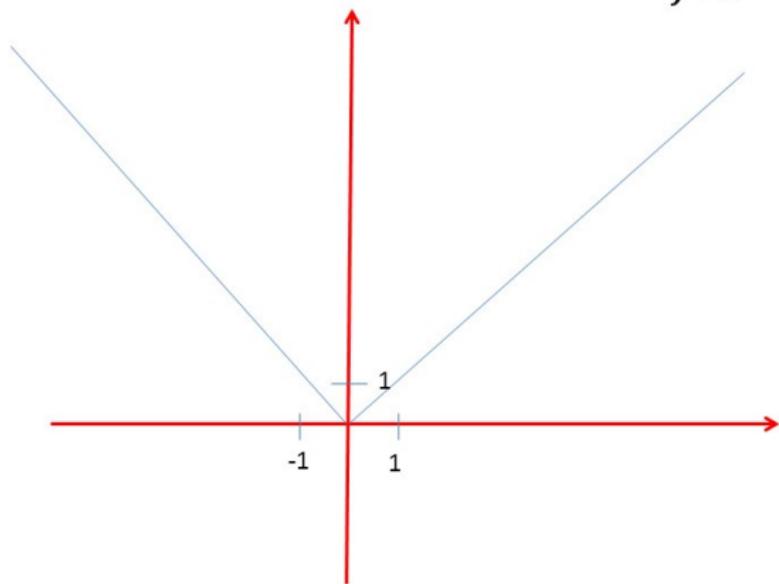
Funzione Valore assoluto

La funzione

$$\text{abs} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

si chiama **funzione valore assoluto**.

$$f: x \rightarrow |x|$$



Proprietà del Valore Assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \leq a$$

- Se $a < 0$, la disequazione non ammette soluzioni.
- Se $a = 0$ la disequazione è soddisfatta per $x = 0$.
- Se $a > 0$, la disequazione è soddisfatta per
 $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$;

infatti se $a > 0$ la disequazione equivale

$$\begin{cases} -x \leq a \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ossia

$$[-a, 0[\cup]0, a].$$

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$

Proprietà del Valore Assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \geq a.$$

- Se $a \leq 0$ la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $a > 0$, la disequazione è soddisfatta per $x \leq -a \vee x \geq a$.

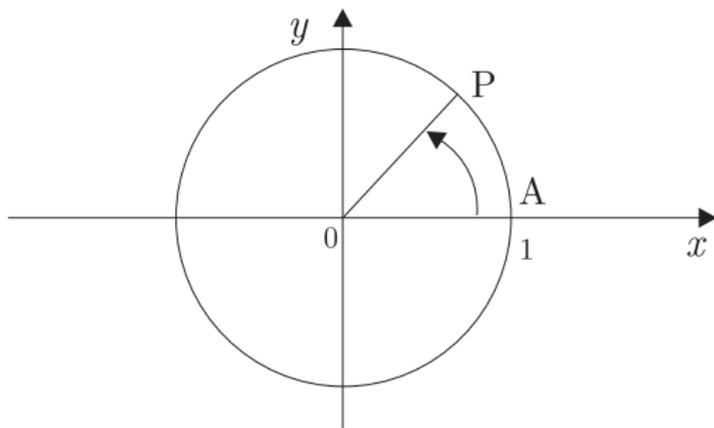
Infatti se $a > 0$, la disequazione equivale a

$$\begin{cases} -x \geq a \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ossia

$$x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[.$$

Misura degli angoli



Un angolo può essere misurato:

- **mediante il confronto rispetto ad un angolo unitario** (misura in gradi);
- **attraverso la lunghezza dell'arco AP** (misura in radianti).

Relazione tra gradi e radianti

Angolo giro = $360^\circ = 2\pi$ radianti

Angolo piatto = $180^\circ = \pi$ radianti

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

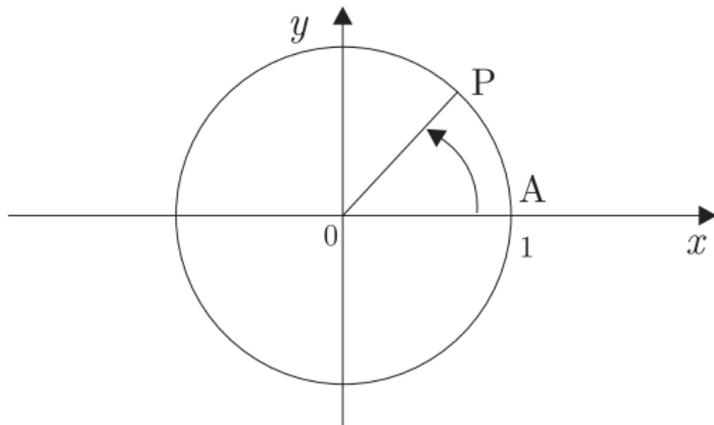
$$\frac{\pi}{4} \text{ radianti} \Leftrightarrow 45^\circ$$

$$1 \text{ radiante} \Leftrightarrow \simeq (57.297469)^\circ$$

$$1^\circ \Leftrightarrow \simeq 0.0174528 \text{ radianti}$$

Nel seguito gli angoli verranno misurati, **esclusivamente**, in radianti.

Consideriamo un circonferenza con raggio unitario e con centro nell'origine degli assi.



Un angolo, posizionato sulla circonferenza in modo che un lato coincida con la semiretta positiva dell'asse delle x , l'altro posto in senso levogiro, identifica un punto P . Viceversa, fissato un punto P sulla circonferenza resta individuato l'angolo \widehat{AOP} che il segmento OP forma con l'asse delle x .

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo \widehat{AOP} ,

- il numero $-\alpha$ è la misura dell'angolo \widehat{AOP}' di ampiezza uguale al precedente con P' simmetrico di P rispetto all'asse delle x ;
- al variare di k in \mathbb{Z} , i numeri $\alpha + k \cdot 2\pi$ denotano lo stesso angolo; la misura che ricade nell'intervallo $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

misura angolo

misura principale

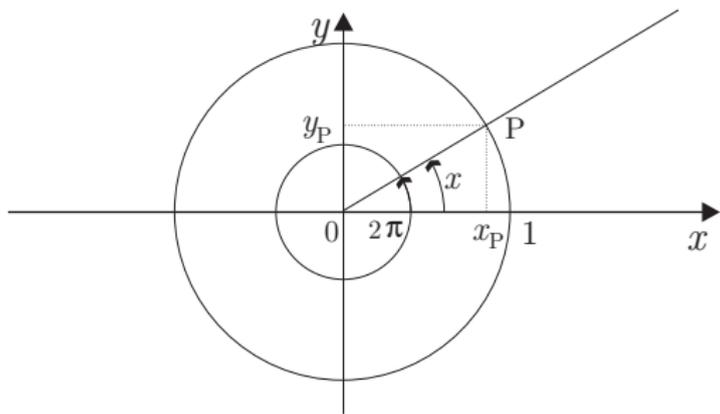
$$\begin{array}{l} \pi/4 \Leftrightarrow \pi/4 \\ 3\pi \Leftrightarrow \pi \\ -\pi/4 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

Considerata una circonferenza \mathbf{C} di raggio unitario con il centro in un sistema di assi coordinati, esiste una funzione:

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow P \in \mathbf{C}$$

$$f(x) = f(x + k2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

funzione periodica di periodo 2π



$$x \in \mathbb{R} \rightarrow P \in \mathbf{C} \rightarrow (x_P, y_P)$$

- $\cos : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x = x_P \in \mathbb{R}$
- $\text{sen} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sen} x = y_P \in \mathbb{R}$

Funzione tangente

Per ogni x per cui $\cos x \neq 0$, è possibile definire il rapporto $\frac{\text{sen}x}{\cos x}$:

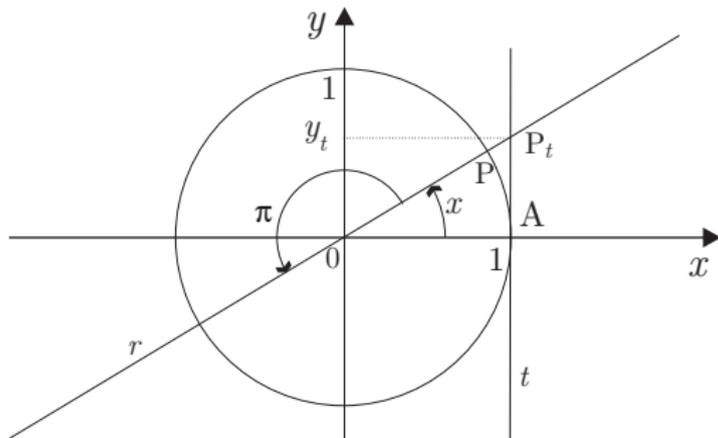
$$\text{tg} : x \in \mathbb{R} - A \rightarrow \text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \in \mathbb{R}$$

dove

$$A = \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Funzione tangente

Geometricamente:



$$\operatorname{tg}x = y_t = \text{ordinata del punto } P_t$$

Funzione cotangente

Per ogni x per cui $\text{sen}x \neq 0$, è possibile definire il rapporto $\frac{\cos X}{\text{sen}X}$:

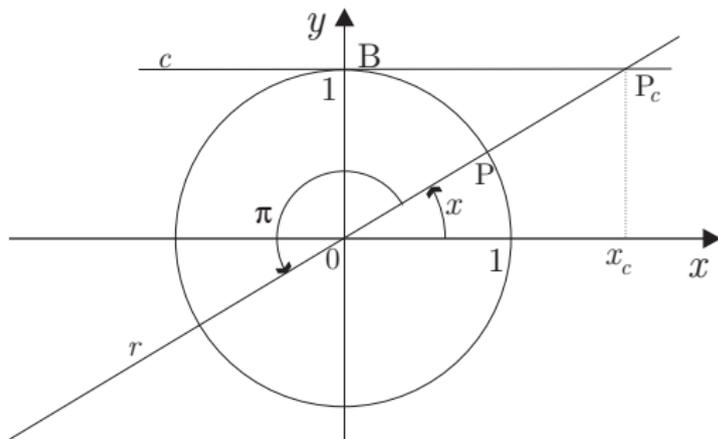
$$\text{cotg} : x \in \mathbb{R} - B \rightarrow \text{cotg}x = \frac{\cos X}{\text{sen}X} \in \mathbb{R}$$

dove

$$B = \{x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Funzione cotangente

Geometricamente:



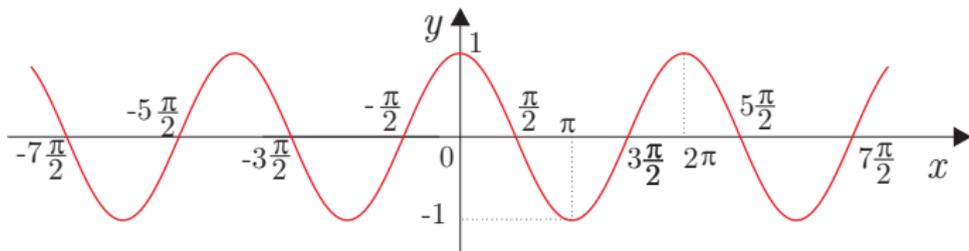
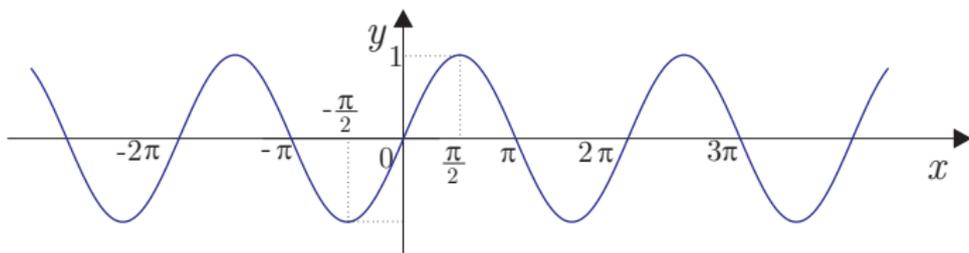
$$\cot x = x_c = \text{ascissa del punto } P_c$$

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$ alcuni valori possono essere ricavati con semplici considerazioni geometriche:

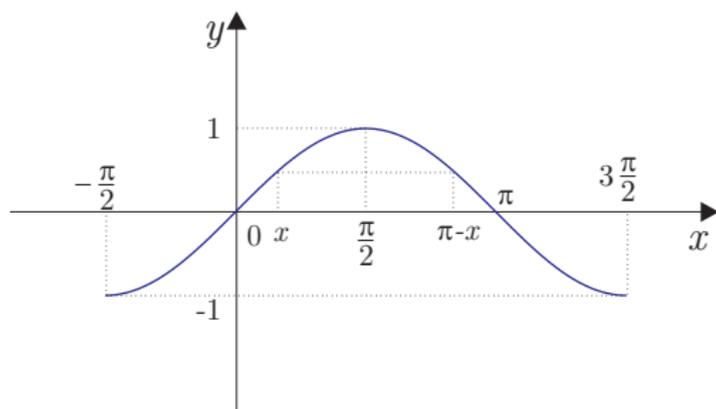
| | senX | cos X | tgX | cotgX |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | \nexists |
| $\pi/6$ | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 | 1 |
| $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | 1/2 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\pi/2$ | 1 | 0 | \nexists | 0 |

Proprietà delle funzioni seno e coseno

Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π

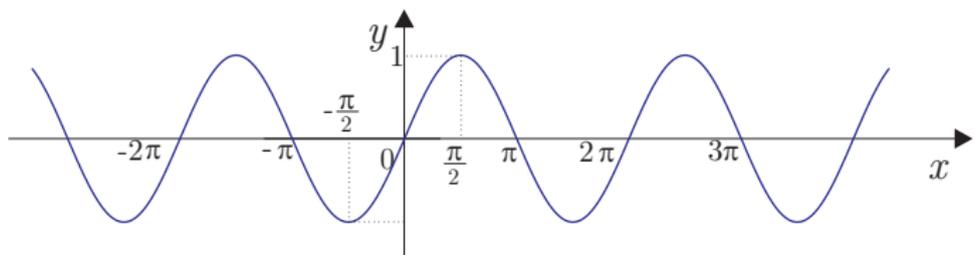


Funzione Seno



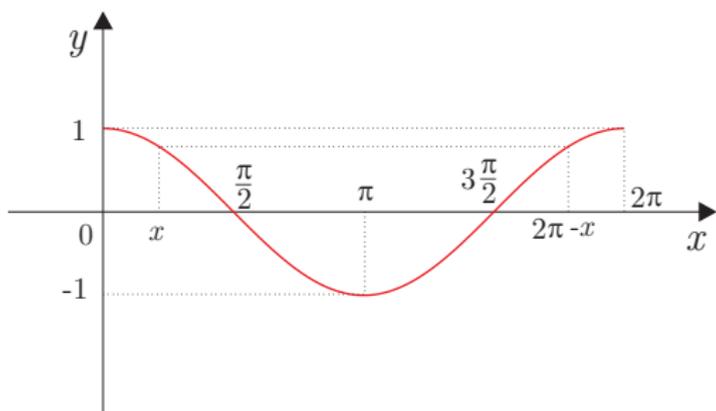
- $E[\sin x] = \mathbb{R}$; $\text{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- $\min \sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\max \sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funzione Seno



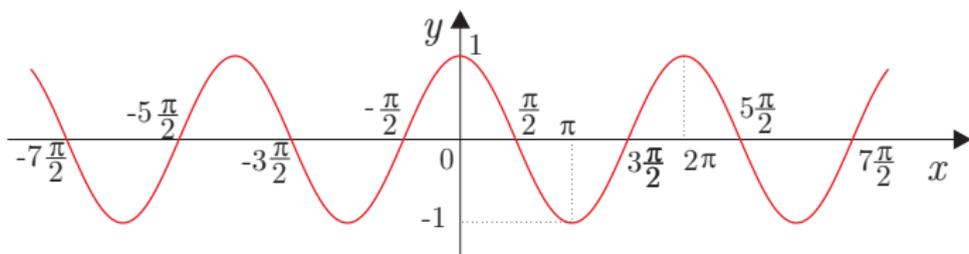
- la funzione è strettamente
 - **decescente** in ogni intervallo $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z};$
 - **crescente** in ogni intervallo $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z};$
 - dispari $\Leftrightarrow \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x).$

Funzione Coseno



- $E[\cos x] = \mathbb{R}$; $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- $\min \cos x = -1$, $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\max \cos x = 1$, $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

Funzione Coseno

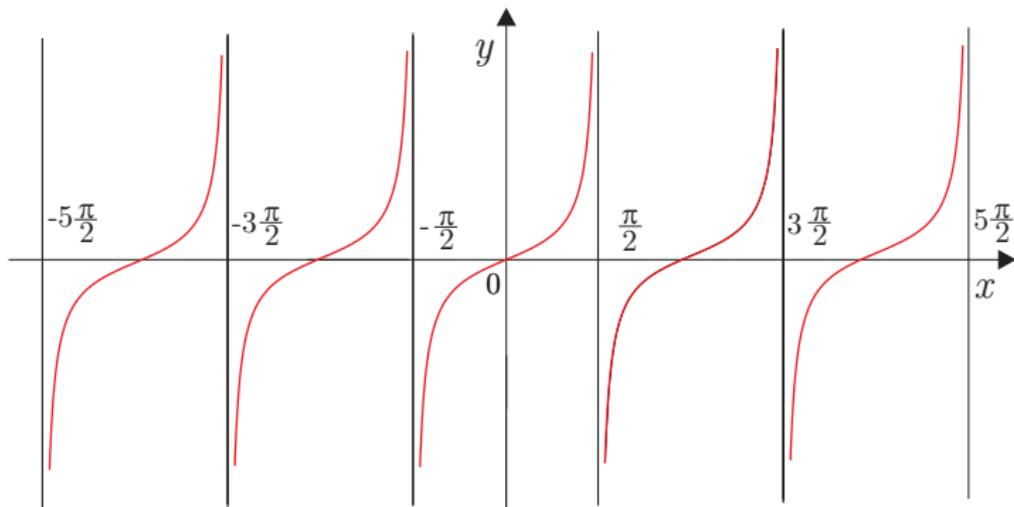


La funzione coseno è

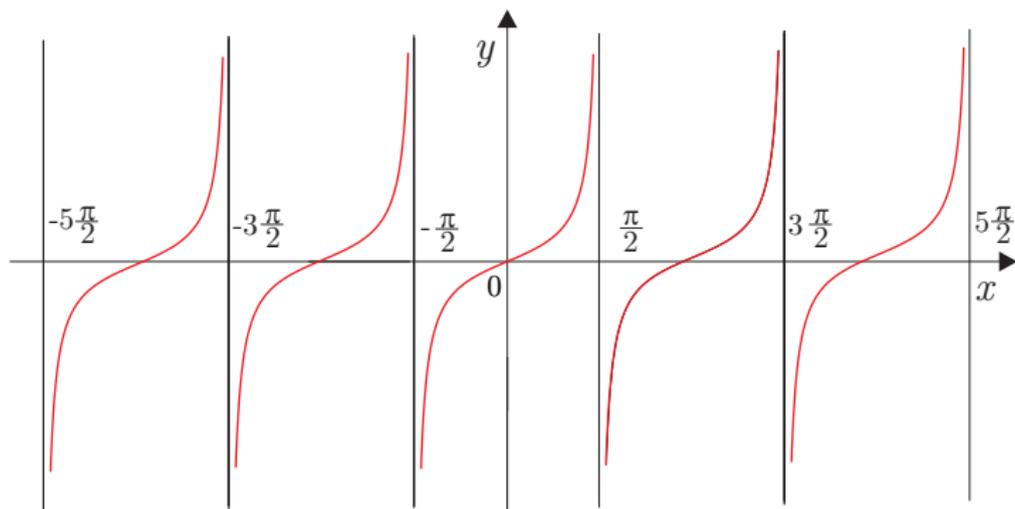
- strettamente decrescente in ogni intervallo $[2k\pi, (2k + 1)\pi], k \in \mathbb{Z}$;
- strettamente crescente in ogni intervallo $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi], k \in \mathbb{Z}$.
- pari $\Leftrightarrow \cos(-x) = \cos(x)$.

Funzione Tangente

La funzione tangente è periodica di periodo π



Funzione Tangente



- $E[\text{tg}x] = \mathbb{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
 $\text{tg}(\mathbb{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}) = \mathbb{R}$
- $\inf \text{tg}x = -\infty$; $\sup \text{tg}x = +\infty$
- la funzione è strettamente **crescente** in ogni intervallo
 $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$;
- la funzione è dispari $\Leftrightarrow \text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$.

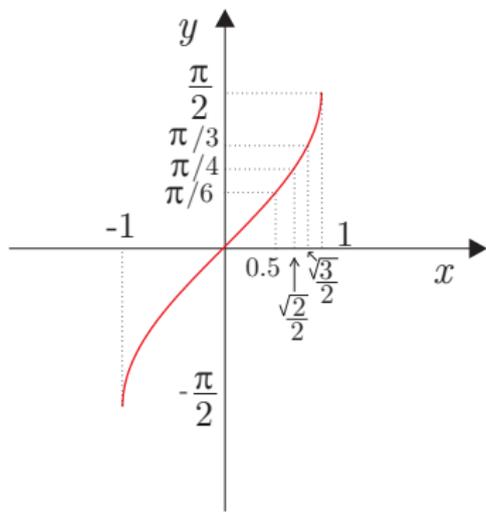
La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsen y$$

L'inversa della restrizione della funzione seno si chiama **Arcoseno**.

$$\arcsen : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arcsen y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Funzione Arcoseno



- $E[\arcsen x] = [-1, 1]$; $\arcsen([-1, 1]) = [-\pi/2, \pi/2]$
- $\min \arcsen x = -\pi/2, x = -1$; $\max \arcsen x = \pi/2, x = 1$;
- **strettamente crescente**;
- **iniettiva e suriettiva** su $[-\pi/2, \pi/2]$.

Funzione Arcocoseno

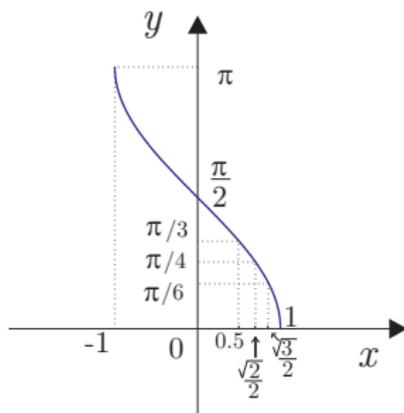
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [0, \pi] : \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa della restrizione della funzione coseno si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione Arcocoseno



- $E[\arccos x] = [-1, 1]$; $\arccos([-1, 1]) = [0, \pi]$
- $\min \arccos x = 0, x = 1$; $\max \arccos x = \pi, x = -1$;
- **strettamente decrescente.**
- **iniettiva e suriettiva su $[0, \pi]$.**

Funzione Arcotangente

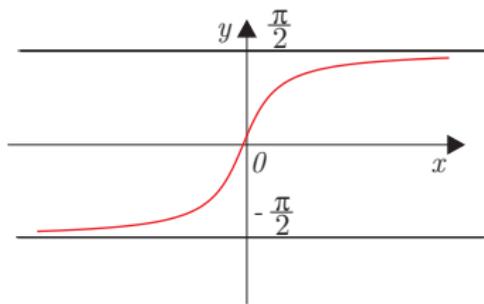
La restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists ! x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y.$$

L'inversa della restrizione della funzione tangente si chiama **Arcotangente**.

$$\operatorname{arctg} : y \in \mathbb{R} \rightarrow x = \operatorname{arctg} y \in] -\pi/2, \pi/2[.$$

Funzione Arcotangente



- $E[\arctg x] = \mathbb{R}; \arctg(\mathbb{R}) =] - \pi/2, \pi/2[$
- $\inf \arctg x = -\pi/2; \sup \arctg x = \pi/2;$
- **strettamente crescente.**
- **iniettiva e suriettiva su $] - \pi/2, \pi/2[$.**