

Funzioni Numeriche

- funzioni di \mathbb{N} in \mathbb{R} (successioni)
- funzioni di $X \subseteq \mathbb{R}$.

Massimo e minimo di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B , si definisce

- **minimo di A , se esiste**, quell'elemento di A minore o uguale ad ogni altro elemento di A :

$$\min A \leq x, \quad \forall x \in A$$

- **massimo di A , se esiste**, quell'elemento di A maggiore o uguale ad ogni altro elemento di A :

$$\max A \geq x, \quad \forall x \in A$$

Estremo inferiore di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B ,

- si definisce **minorante di A** , ogni elemento di B minore o uguale ad ogni altro elemento di A .
- si indica con A_{min} l'insieme dei minoranti di A

$$b \in A_{min} \Leftrightarrow b \in B, \quad b \leq x, \quad \forall x \in A$$

- se $A_{min} \neq \emptyset$ (ovvero esistono minoranti per l'insieme A) allora A viene detto **limitato inferiormente**
- se $A_{min} = \emptyset$ (ovvero non esistono minoranti per l'insieme A) allora A viene detto **illimitato inferiormente**
- si definisce **estremo inferiore di A** , se esiste, il massimo dei minoranti

$$\inf A = \max A_{min}$$

Estremo superiore di un insieme

Sia A un sottoinsieme di un insieme numerico B ,

- si definisce **maggiorante di A** , ogni elemento di B maggiore o uguale ad ogni altro elemento di A .
- si indica con A_{mag} l'insieme dei maggioranti di A

$$b \in A_{mag} \Leftrightarrow b \in B, \quad b \geq x, \quad \forall x \in A$$

- se $A_{mag} \neq \emptyset$ (ovvero esistono maggioranti per l'insieme A) allora A viene detto **limitato superiormente**
- se $A_{mag} = \emptyset$ (ovvero non esistono maggioranti per l'insieme A) allora A viene detto **illimitato superiormente**
- si definisce **estremo superiore di A** , se esiste, il minimo dei maggioranti

$$\sup A = \min A_{mag}$$

Esistenza estremi di un insieme

Dato l'insieme dei numeri reali, \mathbb{R} ,

- ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore,
- ogni suo sottoinsieme limitato superiormente ammette estremo superiore.

Esistenza estremi di un insieme

Risulta utile definire un estremo inferiore (superiore) anche per insiemi non limitati inferiormente (superiormente).

- Se A è illimitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$,
- Se A è illimitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$.

Ogni sottoinsieme di \mathbb{R} ammette estremo inferiore e estremo superiore.

Estremi di un sottoinsieme di \mathbb{R}

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}

- Se A è **limitato inferiormente**, allora $\inf A \in \mathbb{R}$,
- Se A è **illimitato inferiormente**, allora $\inf A = -\infty$,
- Se A è **limitato superiormente**, allora $\sup A \in \mathbb{R}$,
- Se A è **illimitato superiormente**, allora $\sup A = +\infty$.

Minimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\min_{x \in X} f(x)$ si indica il **minimo assoluto di f per $x \in X$** .

Il minimo assoluto di f corrisponde al minimo assoluto dell'immagine della funzione:

$$\min_{x \in X} f(x) = \min f(X).$$

Di conseguenza

$$\min_{x \in X} f(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Punto di minimo assoluto

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore x_0 nel quale si realizza il minimo $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di minimo assoluto per la funzione f** .

Massimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\max_{x \in X} f(x)$ si indica il **massimo assoluto di f per $x \in X$** .

Il massimo assoluto di f corrisponde al massimo assoluto dell'immagine della funzione:

$$\max_{x \in X} f(x) = \max f(X).$$

Di conseguenza

$$\max_{x \in X} f(x) \geq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Punto di massimo assoluto

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore x_0 nel quale si realizza il massimo $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di massimo assoluto per la funzione f** .

- Il **minimo** e il **massimo assoluto** di una funzione sono elementi del **codominio** della funzione.
- I **punti di minimo** e i **punti di massimo** di una funzione sono elementi del **dominio** della funzione.
- Il **minimo assoluto** e il **massimo assoluto**, **se esistono**, sono **unici**.
- I **punti di minimo** e i **punti di massimo assoluto** possono essere più di uno.

Esempio

Siano $X = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \rightarrow x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x)$.

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5,$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10,$$

$$f(4) = 4^2 + 1 = 17.$$

- minimo di $f = 2$ con $x = 1$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = 4$ punto di massimo.

Esempio

Siano $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ e
 $f : x \in X \rightarrow x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x)$.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2, f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5, f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5,$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10, f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10,$$

$$f(4) = 4^2 + 1 = 17, f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17.$$

- minimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = -4$ e $x = 4$ punto di massimo.

Sia $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow 1 - x^2 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in \mathbb{Z}} f(x)$ e $\max_{x \in \mathbb{Z}} f(x)$.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0, f(-1) = 0,$$

$$f(2) = -3, f(-2) = -3,$$

$$f(3) = -8, f(-3) = -8,$$

$$f(4) = -15, f(-4) = -15.$$

- \nexists minimo di f ,
- massimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di massimo.

Estremo inferiore di una funzione

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\inf_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo inferiore di f per $x \in X$** .

L'estremo inferiore di f corrisponde all'estremo inferiore dell'immagine della funzione:

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X).$$

Se l'estremo inferiore è

- **finito** allora la funzione si dice **limitata inferiormente**;
- $-\infty$ allora la funzione si dice **illimitata inferiormente**.

Estremo superiore di una funzione

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\sup_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo superiore di f per $x \in X$** .

L'estremo superiore di f corrisponde all'estremo superiore dell'immagine della funzione:

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X).$$

Se l'estremo superiore è

- **finito** allora la funzione si dice **limitata superiormente**;
- $+\infty$ allora la funzione si dice **illimitata superiormente**.

Una funzione limitata sia superiormente sia inferiormente si dice **limitata**

- $\exists \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \inf_{x \in X} f(x)$ e $\min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \max_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \sup_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \inf_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \min_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \sup_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \max_{x \in X} f(x)$.

Esempio

Siano $X = [1, 2[\subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \rightarrow -2x \in \mathbb{R}$.

Si osservi che

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow (-2) \cdot 1 \geq -2x > -2 \cdot 2 \Rightarrow -2 \geq -2x > -4.$$

Pertanto $f(X) =] - 4, -2]$.

- $\inf_{x \in X} f(x) = -4$ e $\nexists \min_{x \in X} f(x)$,
- $\sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = -2$ con $x = 1$ punto di massimo.

Definizione di intorno

Sia

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $(-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Si definisce $I(x_0)$ l'insieme di tutti gli intorni di x_0

Siano f una funzione definita in X e $x_0 \in X$.

x_0 è un **punto di massimo relativo** per $f \Leftrightarrow$ esiste un intorno di x_0 in cui il massimo di f è $f(x_0)$, cioè se

$$\exists I \in I(x_0) : f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I \cap X$$

$f(x_0)$ è detto **massimo relativo** per f .

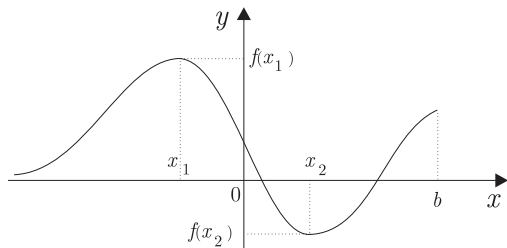
Siano f una funzione definita in X e $x_0 \in X$.

x_0 è un **punto di minimo relativo** per $f \Leftrightarrow$ esiste un intorno di x_0 in cui il minimo di f è $f(x_0)$, cioè se

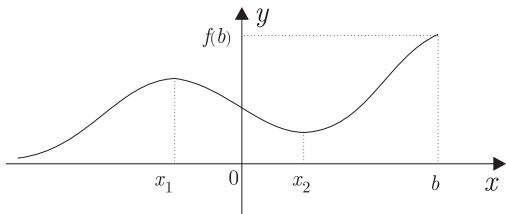
$$\exists I \in I(x_0) : f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in I \cap X$$

$f(x_0)$ è detto **minimo relativo** per f .

Si consideri la funzione

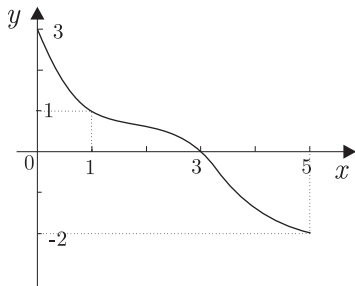


x_1 è un punto di massimo relativo, x_2 è un punto di minimo relativo.



La funzione

- è limitata inferiormente , $\inf f(x) = 0$, **non ha minimo assoluto**;
- **ha un minimo relativo** in x_2 ;
- **ammette massimo assoluto** nel punto b ;
- **ha un massimo relativo** in x_1 .



La funzione

- ammette **massimo assoluto** in 0;
- non ha punti di **massimo relativo**;
- **ammette minimo assoluto** in 5;
- non ha punti di **minimo relativo**.

Funzioni monotone

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica.

Se $\forall x_1$ e x_2 in X con $x_1 < x_2$

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, la funzione f si dice **crescente**
- $f(x_1) < f(x_2)$, la funzione f si dice **strettamente crescente**
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, la funzione f si dice **decescente**
- $f(x_1) > f(x_2)$, la funzione f si dice **strettamente decrescente**

Una funzione che gode di una delle proprietà precedenti viene detta **monotona**.

Monotonia in un punto

Siano f una funzione definita in X e x_0 un punto di X .

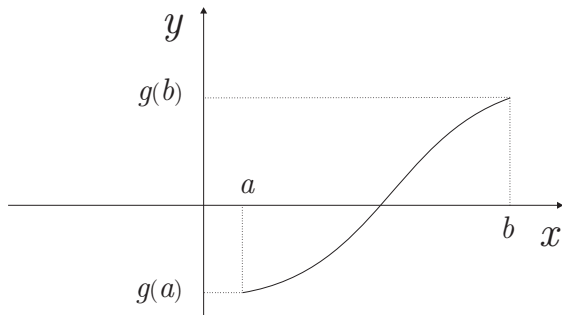
Se esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione è strettamente crescente, si dice che la funzione è **strettamente crescente in** x_0 .

Se esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione è strettamente decrescente, si dice che la funzione è **strettamente decrescente in** x_0 .

NOTA

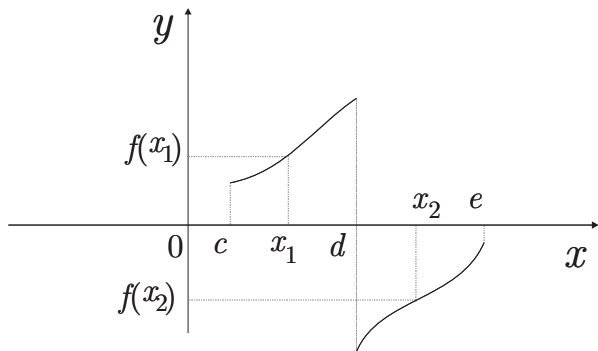
se una funzione è strettamente crescente in tutto X allora essa è strettamente crescente in ogni punto di X ; **viceversa, se una funzione è strettamente crescente in ogni punto di X potrebbe non essere strettamente crescente in tutto X .**

Consideriamo la funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;



g è strettamente crescente in tutto $[a, b]$.

Consideriamo la funzione $f : [c, d[\cup]d, e] \rightarrow \mathbb{R}$;



f è strettamente crescente in ogni punto di $[c, d[\cup]d, e]$ ma non è strettamente crescente in tutto $[c, d[\cup]d, e]$:

$$\forall x_1 \in [c, d[, x_2 \in]d, e] \Rightarrow x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$$

Funzioni lineari e affini

Siano a e b appartenenti a \mathbb{R} con $a > 0$. Sia
 $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$.

Si osservi che $\forall x_1$ e x_2 in X con $x_1 < x_2$
 $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$
quindi la funzione f è **strettamente crescente**

Funzioni lineari e affini

In generale una funzione lineare $f(x) = ax$ e una funzione affine $f(x) = ax + b$ sono

- **strettamente crescenti** se $a > 0$,
- **strettamente decrescenti** se $a < 0$,
- costanti (contemporaneamente **crescenti** e **decrescenti**) se $a = 0$.

Funzioni quadratiche

Sia a appartenente a \mathbb{R} con $a > 0$. Sia
 $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = ax^2 \in \mathbb{R}$.

Si osservi che

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 < ax_2^2 = f(x_2)$$

mentre

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 > ax_2^2 = f(x_2)$$

- **strettamente crescenti** se $x \in [0, +\infty[$,
- **strettamente decrescenti** se $x \in]-\infty, 0]$.

Monotonia di funzioni composte

Siano

- $f : X \rightarrow Y$
- $g : Y \rightarrow Z$

Considerata la funzione composta $h = g \circ f$ si ha

- se f e g sono **entrambe (strettamente) crescenti o decrescenti** h è **(strettamente) crescente**;
- se f e g sono **una (strettamente) crescente, l'altra (strettamente) decrescente** h è **(strettamente) decrescente**.

Monotonia dell'inversa

Una $f : X \rightarrow f(X)$ strettamente monotona è

- iniettiva
- suriettiva

quindi è biunivoca e invertibile.

La funzione inversa $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$
è (strettamente) monotona.

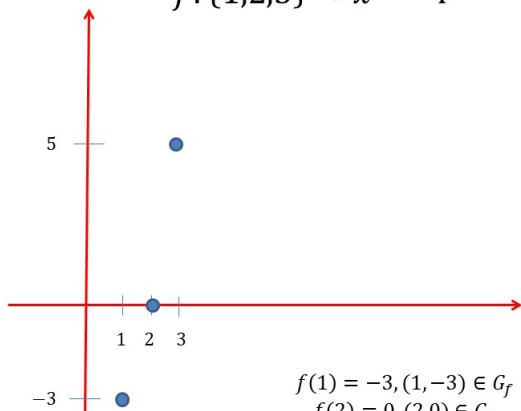
Grafico di una funzione

Data una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce **Grafico di f** l'insieme delle coppie ordinate

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Il grafico di una funzione numerica si rappresenta con un opportuno insieme di punti del piano.

$$f: \{1,2,3\} \rightarrow x^2 - 4$$

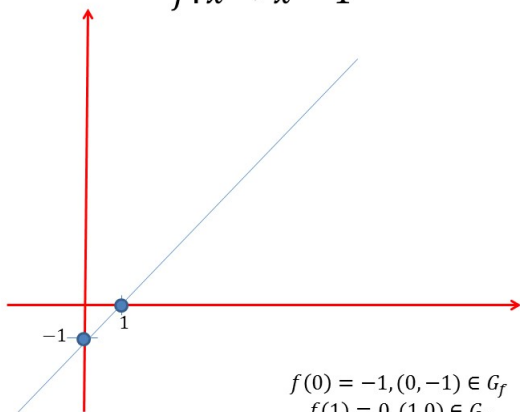


$$f(1) = -3, (1, -3) \in G_f$$

$$f(2) = 0, (2, 0) \in G_f$$

$$f(3) = 5, (3, 5) \in G_f$$

$$f: x \rightarrow x - 1$$



$$f(0) = -1, (0, -1) \in G_f$$

$$f(1) = 0, (1, 0) \in G_f$$