Disequazioni di secondo grado

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.2*

$x^2 + 4 > 0$ $R.\left[\ \forall x \in R\ \right]$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.2*

$x - 3x^2 > 0$ $R.\left[\ 0 < x < \frac{1}{3}\ \right]$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.3*

$x^2 - x > 0$ $R.\left[\ x < 0 \vee x > 1\ \right]$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.3*

$x^2 - x - 2 > 0$ $R.\left[\ x < -1\ \vee x > 2\ \right]$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.4*

$-x^2 + 4x - 3 > 0$ $R.\left[\ 1 < x < 3\ \right]$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.5*

$-3x^2 + 6x - 5 > 0$ $R.[\ nessun\ valore\ di\ x\ ]$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.5*

$4x(x-2) \leq 11 + (x-4)^2$ $R.\left[\ -3 < x < 3\ \right]$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.6*

$\frac{1-3x}{5} - \frac{(2-x)\cdot(2+x)}{3} \leq x - \frac{6}{5} + \frac{1+x^2}{15}$ $R.\left[\ 0 < x < 6\ \right]$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.7*

$\frac{5+3x^2}{6} > \frac{1}{4}\cdot\left(3 + \frac{1}{3} + 2x^2\right) - \frac{x^2-4}{3}$ $R.\left[\ x < -2\ \vee\ x > 2\ \right]$

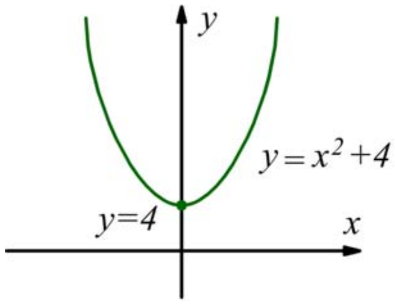
Esercizio no.10 *Soluzione a pag.7*

$(2x-1)\cdot(x-3) - (x-1)\cdot[2(2x-1)+x] < 0$ $R.\left[\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \vee\ x > \frac{\sqrt{3}}{3}\ \right]$

Esercizio no.1:soluzione

$x^2 + 4 > 0$

$x^2 > -4$ sempre verificato! Quindi, qualsiasi valore di x soddisfa la disequazione.



Si tratta, infatti dell'equazione della parabola $y=x^2+4$, che dal punto di vista grafico è totalmente collocata nel semipiano superiore, quindi:

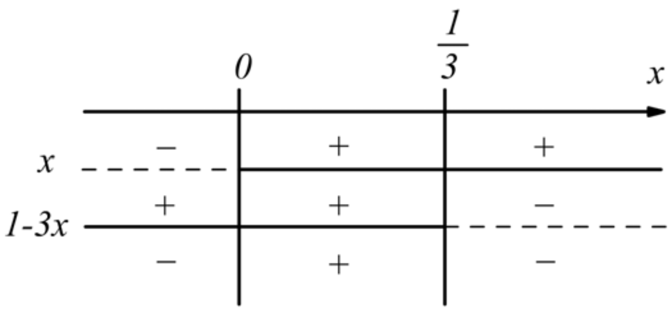
$y = x^2 + 4 > 0$ sempre.

Esercizio no.2:soluzione

$x - 3x^2 > 0$

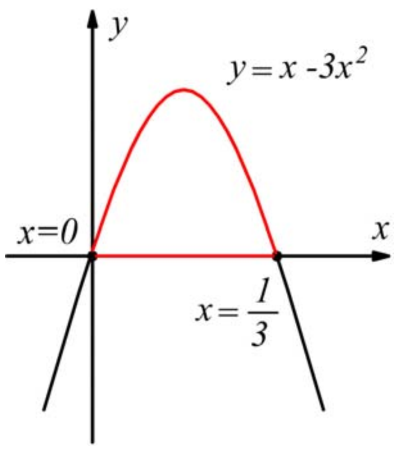
$x \cdot (1 - 3x) > 0$ studiando il segno del prodotto fra questi due termini e considerando che

$1 - 3x > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} > x$



Si conclude che la disequazione è soddisfatta per:

$0 < x < \frac{1}{3}$



Allo stesso risultato si arrivava osservando che

$y = x - 3x^2$

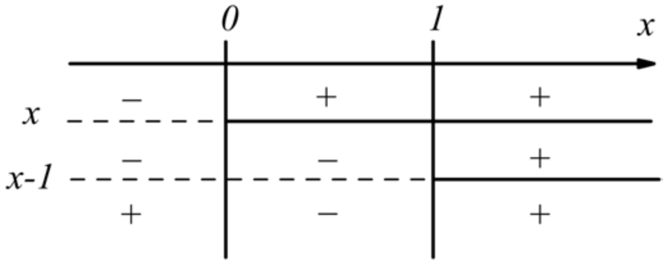
è l'equazione di una parabola con la concavità rivolta verso il basso e che $y = x - 3x^2 > 0$

soltanto per $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$

Esercizio no.3:soluzione

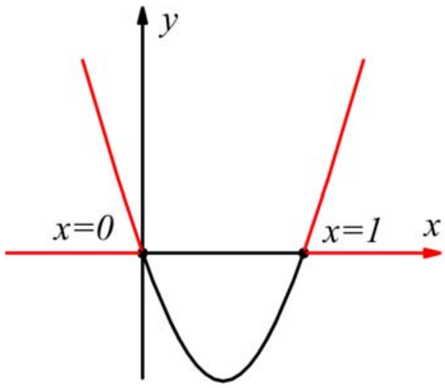
$$x^2 - x > 0$$

$x \cdot (x-1) > 0$ studiando il segno del prodotto $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1 \end{cases}$



Come risulta dal grafico la disequazione è soddisfatta per:

$$\forall x \in (-\infty, 0) \vee (1, +\infty)$$



Usando la geometria analitica, si può constatare che $y = x^2 - x$ è l'equazione di una parabola con a>0 (concavità rivolta verso l'alto).

La condizione
$$y = x^2 - x > 0$$
è verificata soltanto quando : x<0 oppure x>1.

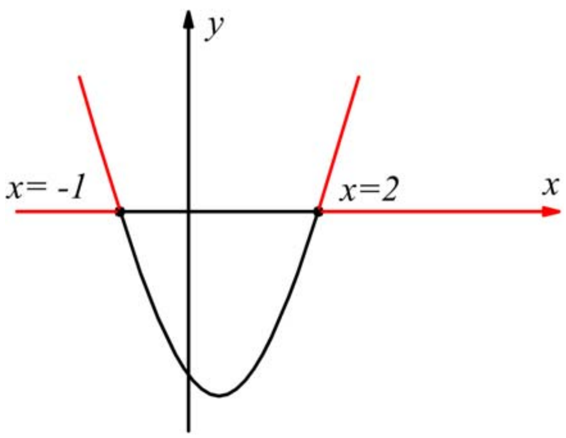
Esercizio no.4:soluzione

$$x^2 - x - 2 > 0$$

La funzione $y = x^2 - x - 2$ è l'equazione di una parabola che prevede le radici:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

dato che a>0 la concavità della parabola rivolta verso l'alto.



La funzione $y = x^2 - x - 2$ è positiva, solo per i valori esterni x>2 ed x< -1.

Usando un altro approccio l'espressione

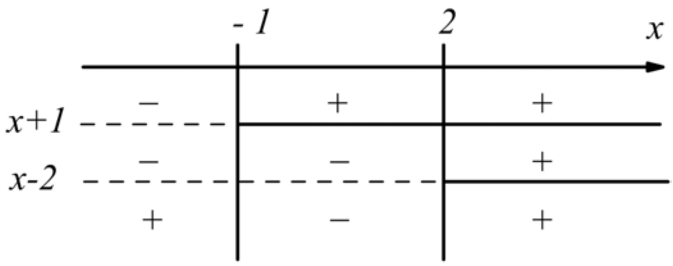
$x^2 - x - 2 > 0$

Può essere ricondotta alla forma:

$(x+1) \cdot (x-2) > 0$

Studiando il segno di questo prodotto:

considerando che $\begin{cases} x+1>0 & \rightarrow & x>-1 \\ x-2>0 & \rightarrow & x>2 \end{cases}$



Anche in questo caso la disequazione

$x^2 - x - 2 > 0$

È soddisfatta per

$x < -1 \;\vee\; x > 2$

Esercizio no.5:soluzione

$-x^2 + 4x - 3 > 0$

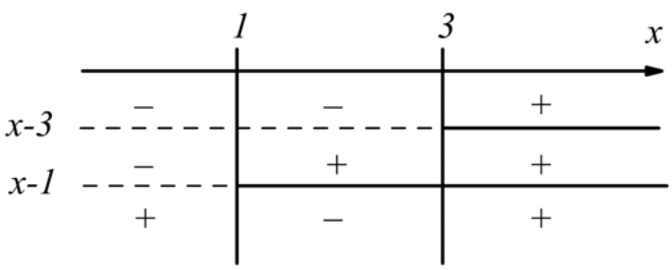
applico il 3° principio per le disequazioni che dice che moltiplicando i due membri per una quantità negativa ed invertendo il segno di disuguaglianza, la disequazione rimane invariata.

$-1 \cdot (-x^2 + 4x - 3) > 0 \cdot (-1) \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 < 0$ le radici del trinomio sono:

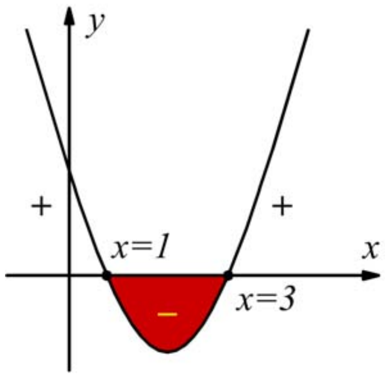
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

la disequazione diventa $(x-3) \cdot (x-1) < 0$ studiando il segno dei due operandi del prodotto:

$\begin{cases} x-3>0 & \rightarrow & x>3 \\ x-1>0 & \rightarrow & x>1 \end{cases}$



come si vede la disequazione $(x-3)\cdot(x-1)<0$ è verificata per 1<x<3.



Alternativamente, sarebbe stato possibile notare come la parabola $y=x^2-4x+3<0$ solo ed esclusivamente $\forall x \in (1;3)$

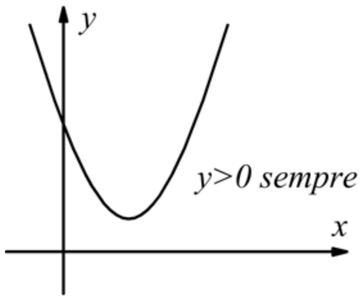
Esercizio no.6:soluzione

$$-3x^2+6x-5>0$$

come nel caso precedente, moltiplichiamo i due membri per -1 e invertiamo il segno.

$-1\cdot(-3x^2+6x-5)>0\cdot(-1) \quad \rightarrow \quad 3x^2-6x+5<0$ le radici del trinomio:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{36-60}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-6}}{2}$$



notiamo come sia Δ<0;
la nostra, è una parabola con la concavità verso l'alto che non ha intersezioni con l'asse delle x,

Quindi la $y=3x^2-6x+5<0$ non potrà mai essere vera, per nessun valore di x.

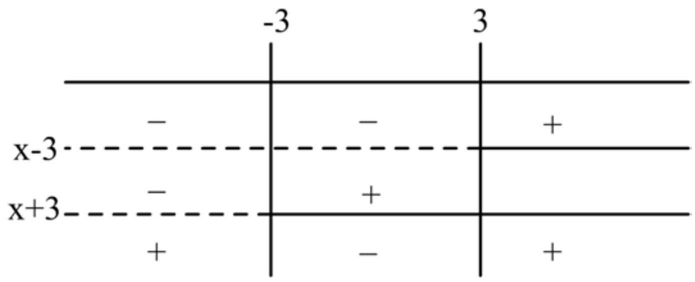
Esercizio no.7:soluzione

$$4x(x-2)\le 11+(x-4)^2$$

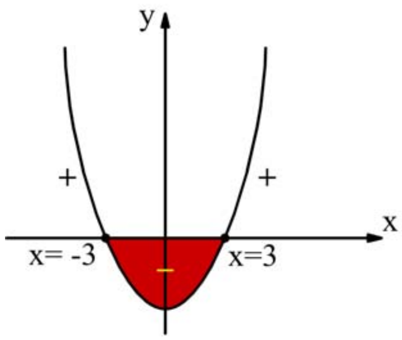
$$4x^2-\cancel{8x}\le 11+x^2-\cancel{8x}+16 \quad \rightarrow \quad 3x^2-27\le 0 \quad \rightarrow \quad x^2-9\le 0$$

cioè $\quad (x-3)\cdot(x+3)\le 0$

considerando che $\begin{cases} x-3>0 & \rightarrow \quad x>3 \\ x+3>0 & \rightarrow \quad x>-3 \end{cases}$



otteniamo che la
$(x-3)\cdot(x+3) \leq 0$
è verificata nell'intervallo -3<x<3



alternativamente, sapendo che la $y = x^2 - 9 \leq 0$ è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, simmetrica rispetto all'asse y delle ordinate con radici ±3. Si riconosce come la disequazione data, sia soddisfatta per l'intervallo chiuso $x \in [-3;\,3]$.

Esercizio no.8:soluzione

$$\frac{1-3x}{5} - \frac{(2-x)\cdot(2+x)}{3} \leq x - \frac{6}{5} + \frac{1+x^2}{15}$$

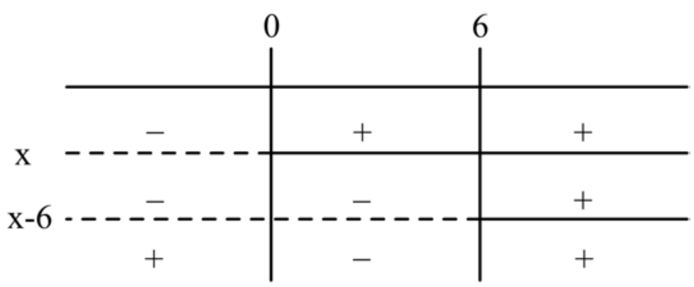
moltiplico i due membri per 15

$$3\cdot(1-3x) - 5\cdot(4-x^2) \leq 15x - 18 + 1 + x^2 \quad \rightarrow \quad 3 - 9x - 20 + 5x^2 \leq x^2 + 15x - 17$$

portando tutti i termini a sinistra

$$5x^2 - x^2 - 9x - 15x - \cancel{20} + \cancel{3} + \cancel{17} \leq 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 24x \leq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x \leq 0$$

$$x\cdot(x-6) \leq 0$$



La disequazione è soddisfatta per

$0 \leq x \leq 6$

Esercizio no.9:soluzione

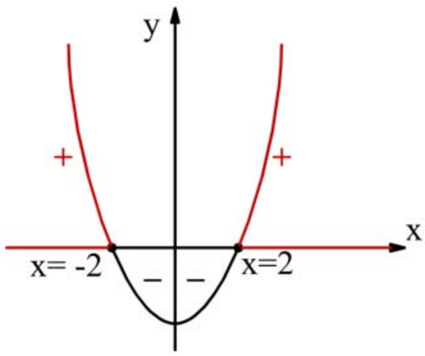
$$\frac{5+3x^2}{6} > \frac{1}{4}\cdot\left(3+\frac{1}{3}+2x^2\right)-\frac{x^2-4}{3}$$

$$\frac{5+3x^2}{6} > \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9+1+6x^2}{3}\right)-\frac{x^2-4}{3} \quad\rightarrow\quad \frac{5+3x^2}{6} > \frac{10+6x^2}{12}-\frac{x^2-4}{3}$$

moltiplicare entrambi i membri per 12

$$2\cdot\left(5+3x^2\right) > 10+6x^2-4\cdot\left(x^2-4\right) \quad\rightarrow\quad \cancel{10}+\cancel{6x^2} > \cancel{10}+\cancel{6x^2}-4x^2+16$$

$$4x^2-16>0 \quad\rightarrow\quad x^2-4>0$$



$y = x^2-4>0$ viene soddisfatta solo per valori di x esterni all'intervallo [2; -2] per cui, scriveremo:

$$x<-2 \;\vee\; x>2$$

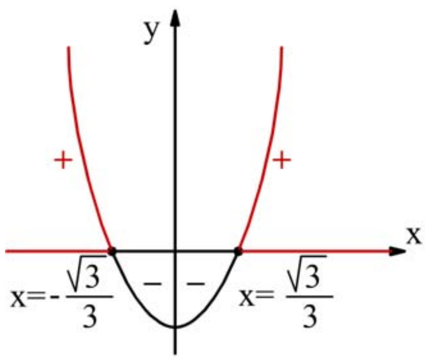
Esercizio no.10:soluzione

$$(2x-1)\cdot(x-3)-(x-1)\cdot[2(2x-1)+x]<0$$

$$2x^2-6x-x+3-(x-1)\cdot[4x-2+x]<0 \quad\rightarrow\quad 2x^2-7x+3-(x-1)\cdot(5x-2)<0$$

$$2x^2-7x+3-\left(5x^2-2x-5x+2\right)<0 \quad\rightarrow\quad 2x^2-\cancel{7x}+3-5x^2+\cancel{7x}-2<0$$

$$-3x^2+1<0 \quad\rightarrow\quad 3x^2-1>0$$ n.b. è riconducibile alla parabola $y=3x^2-1$



che ammette radici $x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

La parabola ha concavità verso l'alto.

è positiva per $x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\vee\; x>\frac{\sqrt{3}}{3}$