Università degli Studi di Napoli *Parthenope*

Progetto di didattica integrativa
per la Matematica

- Primi elementi di teoria degli insiemi
  1. Notazioni
  2. Insiemi numerici
  3. Gli insiemi $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$
  4. Rappresentazione dei numeri reali
  5. Estremi di un insieme
  6. Rappresentazione di $\mathcal{R}$
- Equazioni e disequazioni
- Elementi di Geometria Analitica
  1. Coordinate cartesiane di un piano euclideo
  2. Equazione della retta
  3. Misura degli angoli
- L'operazione di potenza in $\mathcal{R}$
  1. Radice n-esima di un numero reale
  2. Potenza con esponente reale
  3. Logaritmo di un numero reale

Notazioni della teoria degli insiemi.

Gli insiemi sono indicati con lettere maiuscole in carattere grassetto mentre per gli elementi si usano lettere minuscole.

Un insieme può essere rappresentato racchiudendo, fra parentesi graffe:

- i singoli elementi che lo costituiscono;
- una proposizione che identifica, in maniera univoca, i suoi elementi.

———— . . . ————

Sia **A** l'insieme costituito dai primi tre numeri naturali; si scrive:

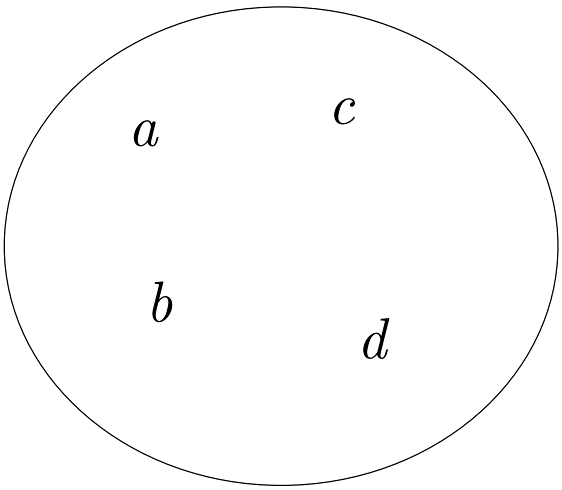
$\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$ oppure $\mathbf{A} = \{\text{i primi tre numeri naturali}\}$.

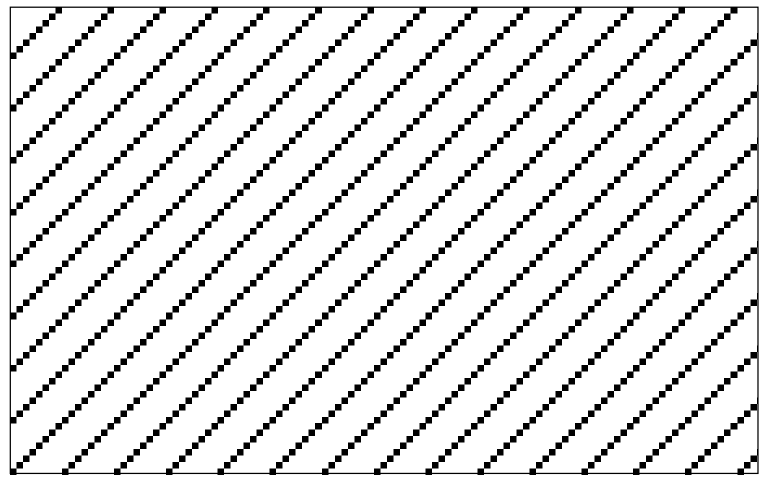
———— . . . ————

Sia **B** l'insieme costituito da tutti i fiumi che nascono in Italia; si scrive:

$$\mathbf{B} = \{\text{i fiumi che nascono in Italia}\}.$$

Risulta utile immaginare gli insiemi come porzioni del piano euclideo e rappresentarli con figure geometriche (Diagrammi di Venn):





Sia $\mathbf{A}$ un insieme ed a un suo elemento.
Per indicare che a appartiene ad $\mathbf{A}$ si scrive:

$$a \in \mathbf{A}.$$

Che cosa significa

$$b \notin \mathbf{A}?$$

Operando con un insieme, siamo spesso interessati a selezionare tra i suoi elementi quelli che godono di una certa proprietà $\mathcal{A}$.

Sia A l'insieme formato dai primi 10 numeri naturali:

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 3, ..., 10\}.$$

Selezioniamo gli elementi di **A** che sono pari ovvero che godono della proprietà $\mathcal{A}$ = *il numero è pari*.

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : \mathcal{A}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Si usa dire:

B sottoinsieme di A

Si usa scrivere:

$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ ossia tutti gli elementi di **B** sono anche elementi di **A**.

Se si vuole rimarcare il fatto che alcuni elementi di **A** non sono anche elementi di **B**, si scrive:

$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ ossia tutti gli elementi di **B** sono anche elementi di **A** e, inoltre, almeno un elemento di **A** non è un elemento di **B**.

Si è convenuto che ogni proprietà definita in un insieme definisca un insieme: una proprietà falsa per un certo insieme è, comunque, definita nell'insieme.

Si conviene che definisca un insieme privo di elementi che viene chiamato ***Insieme vuoto*** e che si indica con $\emptyset$.

Si verifica che, assegnato un qualunque insieme $\mathbf{A}$, risulta che l'insieme vuoto è contenuto in esso:

$$\emptyset \subseteq \mathbf{A}.$$

QUANTIFICATORI

- **quantificatore esistenziale** “$\exists$”

  un simbolo mediante il quale una proposizione del tipo “esiste almeno un elemento x di S per cui la proprietà $\mathcal{A}$ è vera” viene scritta nella forma compatta: “$\exists\, x \in \mathbf{S} : \mathcal{A}$”.

- **quantificatore universale** “$\forall$”.

  Un simbolo mediante il quale una proposizione del tipo “per ogni elemento x di S la proprietà $\mathcal{A}$ è vera” viene scritta nella forma compatta: “$\forall\, x \in \mathbf{S}, \mathcal{A}$”.

Sia $\mathbf{A}$ l'insieme formato dai primi 10 numeri naturali.

La frase *esiste almeno un numero appartenente ad* $\mathbf{A}$ *maggiore di* 9 si scrive, in forma compatta:

$$\exists\, a \in \mathbf{A} : a > 9,$$

La frase *per ogni elemento di* $\mathbf{A}$ *si ha che esso è positivo*, si scrive:

$$\forall\, a \in \mathbf{A},\ a > 0.$$

Si usa anche scrivere "$\exists\,!$" per indicare "esiste un solo" in luogo di "esiste almeno".

Volendo rimarcare che in $\mathbf{A}$ l'elemento maggiore di 9 è unico, si scrive:

$$\exists\,!a \in \mathbf{A} : a > 9.$$

Operazioni tra insiemi

Siano **A** e **B** due insiemi.
Si indica con:

- **A** $\cup$ **B** l'insieme, denominato unione di A e di B, costituito da tutti gli elementi di **A** e di **B**.
- **A** $\cap$ **B** l'insieme, denominato intersezione di A e di B, costituito dagli elementi comuni ai due insiemi.
- **A** $-$ **B** l'insieme, denominato differenza tra A e B, costituito dagli elementi di **A** che non appartengono a **B**
- **A** $\times$ **B** l'insieme, denominato prodotto cartesiano di **A** e **B**, costituito da tutte le coppie ordinate, denotate con (a, b), di primo elemento $a \in \mathbf{A}$ e secondo elemento $b \in \mathbf{B}$.

Considerati gli insiemi

$$\mathbf{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}, \qquad \mathbf{B} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\},$$

determinare:

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; c) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; d) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

$$\Downarrow$$

- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{1,\ 2,\ 3\}$;
- $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{4\}$;
- $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \{5\}$.

...

Siano $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2\}$, rappresentare $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\ (a,1),\ (a,2),\ (b,1),\ (b,2),\ (c,1),\ (c,2)\ \}.$$
$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \{\ (1,a),\ (2,a),\ (1,b),\ (2,b),\ (1,c),\ (2,c)\ \}.$$

Se $\mathbf{A}$ è diverso da $\mathbf{B}$ risulta che

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

$$\Downarrow$$

La coppia $(a, 1)$ è diversa dalla coppia $(1, a)$ pur essendo formata dagli stessi elementi.

Il diverso ordine rende diverso il risultato!

. . .

Il prodotto cartesiano di un insieme $\mathbf{A}$ per se stesso si indica con il simbolo $\mathbf{A}^2$.

Gli insiemi numerici sono gli insiemi i cui elementi sono numeri.

che cosa è un numero?

Senza entrare nel merito, accettiamo l'idea che i numeri sono gli elementi di insiemi astratti sui quali è possibile definire delle operazioni intese nel senso che è possibile, dati due numeri, associarne un terzo, chiamato risultato dell'operazione, appartenente all'insieme stesso. In particolare, negli insiemi numerici sono definite le operazioni di somma e prodotto che godono delle seguenti, ben note, proprietà:

- Proprietà associativa: $\begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b)c = a(b \cdot c) \end{cases}$
- Proprietà commutativa: $\begin{cases} a+b = b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$
- Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma: $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

dove a, b e c sono tre elementi arbitrari dell'insieme.

Gli insiemi $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$

- $\mathcal{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ....\}$ = insieme dei numeri naturali;
- $\mathcal{Z} = \{...,\ \text{-}2,\ \text{-}1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ = insieme dei numeri interi relativi;
- $\mathcal{Q} = \{q = \frac{m}{n},\ m \in \mathcal{Z}\ ,\ n \in \mathcal{N}\ \}$ = insieme dei numeri razionali;
- $\mathcal{R}$ = insieme dei numeri reali.

Risulta:

$$\mathcal{N}\ \subset\ \mathcal{Z}\ \subset\ \mathcal{Q}\ \subset\ \mathcal{R}$$

Tali insiemi sono, poi, totalmente ordinati nel senso che comunque si fissino due elementi distinti x e y risulta o $x < y$ o $y < x$.

Le operazioni di somma e prodotto convivono, con qualche attenzione, con la relazione d'ordine nel senso che, fissati arbitrariamente tre numeri a, b e c:

- se $a < b$, allora $a + c < b + c$
- se $a < b$, allora $\begin{cases} a \cdot c < b \cdot c, & \text{se } c > 0 \\ a \cdot c = b \cdot c, & \text{se } c = 0 \\ a \cdot c > b \cdot c, & \text{se } c < 0 \end{cases}$

A partire da $\mathcal{N}$ gli altri insiemi numerici sono stati costruiti in modo da poter eseguire determinate operazioni.

In $\mathcal{N}$, assegnati due numeri naturali a e b, non sempre esiste un terzo numero c per cui si abbia:

$$a + c = b.$$

$$\Downarrow$$

Assegnati i numeri naturali $a = 3$ e $b = 5$, esiste il numero naturale $c = 2$ per cui risulta:

$$a + c = 3 + 2 = 5 = b.$$

Assegnati i numeri naturali $a = 7$ e $b = 5$, non esiste nessun numero naturale c per cui risulta:

$$a + c = 7 + c = 5 = b.$$

$$\Downarrow$$

Si costruisce l'insieme $\mathcal{Z}$.

Per costruire $\mathcal{Z}$ si aggiungono:

- il numero zero:

  Il numero che gode della proprietà di essere l'unico elemento neutro della somma, ovvero l'unico numero che sommato ad un qualsiasi altro restituisce il numero stesso: $a + 0 = a$

- l'opposto di ogni numero naturale:

  L'opposto di un numero a, indicato con $-a$, è quel numero che sommato ad a restituisce lo zero: $a + (-a) = 0$.

In $\mathcal{Z}$ la richiesta precedente trova sempre risposta.

$\Downarrow$

Esiste in $\mathcal{Z}$ il numero $c = -2$ per cui si ha:

$$a + c = 7 + (-2) = 5 = b.$$

...

Si definisce, quindi, l'operazione di sottrazione tra i due numeri a e b come somma tra a e l'opposto di b.

In $\mathcal{Z}$ assegnati due numeri interi a e b, non sempre esiste un terzo numero intero c per cui si abbia:

$$a \cdot c = b.$$

$$\Downarrow$$

Assegnati i numeri $a = 3$ e $b = 6$, esiste il numero $c = 2$ per cui risulta:

$$a \cdot c = 3 \cdot 2 = 6 = b.$$

Assegnati i numeri $a = 7$ e $b = 5$, non esiste nessun numero intero c per cui risulta:

$$a \cdot c = 7 \cdot c = 5 = b.$$

$$\Downarrow$$

Si costruisce l'insieme $\mathcal{Q}$.

Per costruire $\mathcal{Q}$ si aggiungono:

- i reciproci dei numeri interi dove il reciproco di un numero a, indicato con $1/a$, è quel numero che moltiplicato per a restituisce 1, che rappresenta l'elemento neutro del prodotto: $a \cdot (1/a) = 1$.

È fondamentale ricordare che non è possibile definire il reciproco del numero zero che costituisce la sola eccezione.

Con l'aggiunta di tali numeri è possibile definire i numeri frazionari: $a/c = a \cdot (1/c)$ con $c \neq 0$.
In $\mathcal{Q}$ la richiesta precedente trova sempre risposta.

Esiste in $\mathcal{Q}$ il numero $c = 5/7$ per cui si ha:

$$a \cdot c = 7 \cdot (5/7) = 5 = b.$$

Si definisce l'operazione di divisione tra i due numeri a e b come prodotto tra a e il reciproco di b.

In $\mathcal{Q}$ non è definibile l'operazione di radice quadrata, nel senso che, assegnato un numero positivo a non sempre esiste un numero b per cui si abbia:

$$b \cdot b = a.$$

$$\Downarrow$$

Assegnato il numero razionale $a = 4$, esiste il numero razionale $b = 2$ per cui risulta:

$$b \cdot b = 2 \cdot 2 = 4 = a,$$

ossia che $b = 2$ è la radice quadrata di $a = 4$.

Assegnato il numero razionale $a = 2$, non esiste nessun numero razionale b per cui risulta:

$$b \cdot b = 2 = a$$

ossia che non esiste in $\mathcal{Q}$ la radice quadrata di $a = 2$.

$$\Downarrow$$

Si costruisce l'insieme $\mathcal{R}$ dei numeri reali (razionali e irrazionali).

Per costruire $\mathcal{R}$ si aggiungono nuovi numeri le cui proprietà sono leggermente più complesse da introdurre rispetto a quelle che hanno definito i casi precedenti.

Per adesso accettiamo l'idea che in $\mathcal{R}$ esistono le radici quadrate di tutti i numeri positivi e, come osserveremo, non solo quelle.

. . .

Presi due numeri reali arbitrari a e b, con $a < b$, esistono infiniti numeri compresi tra a e b. Questi numeri costituiscono un insieme che è detto **Intervallo** di $\mathcal{R}$ di estremi a e b ed è indicato, a volte, con il simbolo (a, b). I valori a e b sono detti estremi dell'intervallo.

Rappresentazione dei numeri

Esistono diversi modi per identificare un numero:

- un simbolo
- un valore tramite un sistema di numerazione

— … —

I simboli possono essere:

- assolutamente arbitrari
- costruiti con una qualche regola

— … —

- π rappresenta il rapporto costante tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro
- $\sqrt{a}$ con $a > 0$ rappresenta il numero che moltiplicato per se stesso restituisce a: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

— … —

A volte è possibile operare sui simboli:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Il valore di un dato numero si esprime mediante il sistema posizionale decimale.

- i numeri interi sono sempre rappresentabili con un numero finito di cifre dal significato noto:

$$325 \in \mathcal{Z} \iff 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 3\cdot 100 + 2\cdot 10 + 5$$

- i numeri razionali possono avere qualche problema di rappresentabilità:

$$\frac{3}{4} = 0.75 = 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = 7 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.01$$

$$\frac{2}{3} = 0.666... = 0.\overline{6}.$$

$$\Downarrow$$

Sono possibili solo approssimazioni per difetto o per eccesso:

$$0.66 < \frac{2}{3}, \quad 0.67 > \frac{2}{3}$$

- I numeri reali irrazionali non sono rappresentabili mediante un numero finito di cifre decimali

Sono solo approssimabili, con un grado arbitrario di precisione, con numeri razionali le cui cifre non seguono alcuna periodicità.

Il numero il cui quadrato è 2 si indica con il simbolo di $\sqrt{2}$ e può essere solo approssimato, per difetto o per eccesso, mediante numeri razionali:

$$\sqrt{2} = 1,41(NO!), \quad \sqrt{2} \simeq 1,41$$

$$(1.41)^2 = 1,9881 \neq 2$$

$$\begin{array}{lcl}
(1,4)^2 = 1,96 & < 2 < & (1,5)^2 = 2,25 \\
(1,41)^2 = 1,9881 & < 2 < & (1,42)^2 = 2,0164 \\
(1,414)^2 = 1,999396 & < 2 < & (1,415)^2 = 2,00225
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2} \simeq 1,41 \quad \sqrt{2} \simeq 1,42 \quad \sqrt{2} \simeq 1,414214$$

Estremi di un insieme

Minimo e massimo di un insieme

Sia $\mathbf{A}$ un sottoinsieme di un insieme numerico $\mathbf{B}$. Allora con:

- min $\mathbf{A}$ si intende, se esiste, l'elemento di $\mathbf{A}$ minore o uguale ad ogni altro elemento di $\mathbf{A}$:

$$\min \mathbf{A} \leq x, \forall\, x \in \mathbf{A}$$

- max $\mathbf{A}$ si intende, se esiste, l'elemento di $\mathbf{A}$ maggiore o uguale ad ogni altro elemento di $\mathbf{A}$:

$$\max \mathbf{A} \geq x, \forall\, x \in \mathbf{A}$$

. . .

Sia $\mathbf{A} = \{1,\, 2,\, 3\} \subset \mathcal{N}$.
Valutare il minimo e il massimo di $\mathbf{A}$.

⇩

$$\min \mathbf{A} = 1; \quad \max \mathbf{A} = 3.$$

Sia $\mathbf{A} = \{3,\, 4,\, 5,\, ...\} \subset \mathcal{N}$.
Valutare il minimo e il massimo di $\mathbf{A}$.

⇩

$$\min \mathbf{A} = 3; \quad \text{non esiste } \max \mathbf{A}.$$

Estremo inferiore e superiore di un insieme

Sia $\mathbf{A}$ un sottoinsieme di un insieme numerico $\mathbf{B}$. Allora con:

- $\mathbf{A}_{min}$
  si intende, se esiste, l'insieme formato da quegli elementi di $\mathbf{B}$ che sono minori o, tutt'al più, uguali ad ogni elemento di $\mathbf{A}$:

  $$b \in \mathbf{A}_{min} \Leftrightarrow b \leq x, \forall\, x \in \mathbf{A}.$$

  Se esistono minoranti, l'insieme viene detto ***limitato inferiormente***; in caso contrario ***illimitato inferiormente***.

- $\inf \mathbf{A}$
  si intende, se esiste, il massimo dei minoranti di $\mathbf{A}$:

  $$\inf \mathbf{A} = \max \mathbf{A}_{min}.$$

- $\mathbf{A}_{mag}$
  si intende, se esiste, l'insieme formato da quegli elementi di $\mathbf{B}$ che sono maggiori o, tutt'al più, uguali ad ogni elemento di $\mathbf{A}$:

  $$b \in \mathbf{A}_{mag} \Leftrightarrow b \geq x, \forall x \in \mathbf{A}.$$

  Se esistono maggioranti, l'insieme viene detto ***limitato superiormente***, in caso contrario ***illimitato superiormente***.

- $\sup \mathbf{A}$
  si intende, se esiste, il minimo dei maggioranti di $\mathbf{A}$:

  $$\sup \mathbf{A} = \min \mathbf{A}_{mag}.$$

$\ldots$

Un insieme limitato sia inferiormente sia superiormente si dice ***limitato***.

$\ldots$

Quando un insieme ammette minimo, il minimo stesso è un minorante dell'insieme, più precisamente il più grande dei minoranti; quindi, si ha:
$\min \mathbf{A} = \inf \mathbf{A}.$

Considerazioni analoghe valgono per il massimo.

Sia $\mathbf{A} = \{3, 4, 5\} \subset \mathcal{N}$.

Controllare se è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

I minoranti di $\mathbf{A}$, ossia i numeri naturali minori o uguali a tutti gli elementi di $\mathbf{A}$, sono: $\mathbf{A}_{min} = \{1, 2, 3\}$.
Esistendo minoranti di $\mathbf{A}$, l'insieme è limitato inferiormente e, siccome $\mathbf{A}_{min}$ ammette massimo, $\max \mathbf{A}_{min} = 3$, si ha che $\inf \mathbf{A} = 3$; per l'osservazione precedente si ha anche che $\min \mathbf{A} = 3$.
Analogamente, i maggioranti di $\mathbf{A}$ sono: $\mathbf{A}_{mag} = \{5, 6, 7, ...\}$.
L'insieme $\mathbf{A}$ è quindi limitato superiormente ed essendo $\min \mathbf{A}_{mag} = 5$, si ha che $\sup \mathbf{A} = 5 = \max \mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} = \{x \in \mathcal{R} \,:\, 1 < x < 2\} \subset \mathcal{R}$.

Controllare se è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

$\Downarrow$

I minoranti di $\mathbf{A}$, ossia i numeri reali minori o uguali a tutti gli elementi di $\mathbf{A}$, sono: $\mathbf{A}_{min} = \{x \in \mathcal{R} \,:\, x \leq 1\}$. Esistendo minoranti di $\mathbf{A}$, l'insieme è limitato inferiormente. Siccome $\max \mathbf{A}_{min} = 1$, si ha che $\inf \mathbf{A} = 1$; si noti che $\nexists \min \mathbf{A}$.

Analogamente, i maggioranti di $\mathbf{A}$ sono: $\mathbf{A}_{mag} = \{x \in \mathcal{R} \,:\, x \geq 2\}$. L'insieme $\mathbf{A}$ è quindi limitato superiormente ed essendo $\min \mathbf{A}_{mag} = 2$, si ha che $\sup \mathbf{A} = 2$; si noti che $\nexists \max \mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} = \{x \in \mathcal{R} \, : \, 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathcal{R}$.

Controllare se è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

I minoranti di $\mathbf{A}$ sono gli stessi dell'esempio precedente, si ha, perciò, $\inf \mathbf{A} = 1$; in questo caso, però, 1 appartiene all'insieme $\mathbf{A}$, quindi è anche minimo: $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = 1$.

Analogamente, i maggioranti di $\mathbf{A}$ sono gli stessi dell'esempio precedente, 2 appartiene all'insieme $\mathbf{A}$, quindi si ha: $\max \mathbf{A} = \sup \mathbf{A} = 2$.

Un insieme può ammettere estremo inferiore e, contemporaneamente, non ammettere minimo.
Analogamente per l'estremo superiore.

Sia $\mathbf{A} = \{x \in \mathcal{Q} : \sqrt{2} \leq x < 2\} \subset \mathcal{Q}$.
Controllare se è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

I minoranti di $\mathbf{A}$, ossia i numeri razionali minori di tutti gli elementi di $\mathbf{A}$, sono: $\mathbf{A}_{min} = \{x \in \mathcal{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$.
Esistendo minoranti di $\mathbf{A}$, l'insieme è limitato inferiormente; siccome $\max \mathbf{A}_{min}$ non esiste, non esiste né estremo inferiore né, tanto meno, minimo.
Viceversa, i maggioranti di $\mathbf{A}$ sono: $\mathbf{A}_{mag} = \{x \in \mathcal{Q} : x \geq 2\}$.
L'insieme $\mathbf{A}$ è quindi limitato superiormente ed essendo $\min \mathbf{A}_{mag} = 2$, si ha che $\sup \mathbf{A} = 2$; si noti che $\nexists \max \mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} = \{x \in \mathcal{R} \,:\, \sqrt{2} \leq x < 2\} \subset \mathcal{R}$.

Controllare se è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

Procediamo come nell'esempio precedente notando, però, che ora consideriamo numeri reali. I minoranti di $\mathbf{A}$, ossia i numeri reali minori di tutti gli elementi di $\mathbf{A}$, sono: $\mathbf{A}_{min} = \{x \in \mathcal{R} \,:\, x \leq \sqrt{2}\}$. Esistendo minoranti di $\mathbf{A}$, l'insieme è limitato inferiormente. Siccome $\max \mathbf{A}_{min} = \sqrt{2} \in \mathcal{R}$, si ha che $\inf \mathbf{A} = \sqrt{2}$ che è anche minimo per $\mathbf{A}$.

Per l'estremo superiore valgono esattamente le stesse considerazioni dell'esempio precedente, quindi si ha che $\sup \mathbf{A} = 2$ mentre $\nexists \max \mathbf{A}$.

Completezza di $\mathcal{R}$

I due esempi precedenti mostrano come un insieme può essere limitato inferiormente ma non ammettere estremo inferiore e, a maggior ragione, minimo.

È però fondamentale ricordare che $\mathcal{R}$ è *completo* ossia che ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore.

Considerazioni analoghe valgono per l'estremo superiore.

$\Downarrow$

Ogni numero reale a può interpretarsi come l'estremo superiore dell'insieme dei numeri razionali minori di a e, contemporaneamente, come l'estremo inferiore dei numeri razionali maggiori di a:

$\Downarrow$

ogni numero reale è l'elemento di separazione di due insiemi di numeri razionali, l'insieme formato dalle approssimazioni per difetto di a e l'insieme formato dalle approssimazioni per eccesso di a.

Risulta utile definire un estremo inferiore (superiore) anche per insiemi non limitati inferiormente (superiormente).

⇓

Se $\mathbf{A}$ è illimitato inferiormente,
si pone $\inf \mathbf{A} = -\infty$

Se $\mathbf{A}$ è illimitato superiormente,
si pone $\sup \mathbf{A} = +\infty$

⇓

Ogni sottoinsieme di $\mathcal{R}$ ammette estremo inferiore e estremo superiore.

Sia $\mathbf{A}$ un sottoinsieme di $\mathcal{R}$:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{A} \text{ limitato inferiormente} & \Rightarrow & \exists \inf \mathbf{A} \in \mathcal{R} \\
\mathbf{A} \text{ illimitato inferiormente} & \Rightarrow & \inf \mathbf{A} = -\infty \\
\mathbf{A} \text{ limitato superiormente} & \Rightarrow & \exists \sup \mathbf{A} \in \mathcal{R} \\
\mathbf{A} \text{ illimitato superiormente} & \Rightarrow & \sup \mathbf{A} = +\infty
\end{array}
$$

Consideriamo l'intervallo $\mathbf{I}=(a, b)$ di $\mathcal{R}$.

È evidente che:

- a è l'estremo inferiore ($\inf \mathbf{I}= a$)
- b è l'estremo superiore ($\sup \mathbf{I}= b$)

I valori a e b sono minimo e massimo solo se essi appartengono all'insieme.

In molte situazioni occorre precisare se gli estremi di un intervallo fanno parte o meno dell'intervallo stesso.

Definizioni:

Intervalli limitati di $\mathcal{R}$ Siano a e b due numeri reali con $a < b$. Con

- $[a, b]$ (Intervallo chiuso) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, estremi inclusi:

$$[a, b] = \{x \in \mathcal{R} : a \leq x \leq b\}$$

- $[a, b[$ (intervallo semiaperto a destra) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, a incluso, b escluso:

$$[a, b[= \{x \in \mathcal{R} : a \leq x < b\}$$

- $]a, b]$ (intervallo semiaperto a sinistra) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, a escluso, b incluso:

$$]a, b] = \{x \in \mathcal{R} : a < x \leq b\}$$

- $]a, b[$ (intervallo aperto) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, estremi esclusi:

$$]a, b[= \{x \in \mathcal{R} : a < x < b\}$$

Intervalli illimitati di $\mathcal{R}$

Sia a un numero reale.Con:

- $(-\infty, a]$ (intervallo chiuso illimitato inferiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali minori di a, estremo incluso:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathcal{R} : x \leq a\}$$

- $(-\infty, a[$ (intervallo aperto illimitato inferiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali minori di a, estremo escluso:

$$(-\infty, a[= \{x \in \mathcal{R} : x < a\}$$

- $[a, +\infty)$ (intervallo chiuso illimitato superiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali maggiori di a, estremo incluso:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq a\}$$

- $]a, +\infty)$ (intervallo aperto illimitato superiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali maggiori di a, estremo escluso:

$$]a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} : x > a\}$$

Rappresentazione di $\mathcal{R}$

Per la completezza dei numeri reali, risulta possibile costruire un corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i punti di una retta r.

⇩

Ogni numero reale può essere associato ad un punto di r e, viceversa, ogni punto di r può essere associato ad un numero reale.

——— ... ———

- Si associa il numero 0 con un punto arbitrario di r (origine) che indicheremo con O
- Si associa il numero 1 con un altro punto arbitrario di r, distinto da O, denotato con U.

Fissati questi riferimenti:

- ogni punto P di r sarà associato al numero reale ottenuto con il seguente criterio: si misura il segmento OP rispetto all'unità di misura OU, diciamo $\overline{\mathrm{OP}}$ tale misura. Il punto P sarà associato al numero positivo $\overline{\mathrm{OP}}$ se si trova nella semiretta che contiene U, al numero negativo $-\overline{\mathrm{OP}}$ se si trova nell'altra semiretta.

- Ogni numero $x \in \mathcal{R}$ sarà associato al punto P di r individuato mediante la seguente costruzione: si costruisce un segmento OP di lunghezza $\overline{\mathrm{OP}} = |x|$ e si posiziona l'estremo P a destra di O (o, più in generale, nella semiretta che contiene U) se x è positivo; dalla parte opposta se x è negativo.

—— ... ——

La corrispondenza così definita è **biunivoca** ossia:

- **iniettiva**: a numeri diversi sono associati punti diversi, e viceversa;

- **suriettiva**: ogni punto di r ha un corrispondente in $\mathcal{R}$, e viceversa.

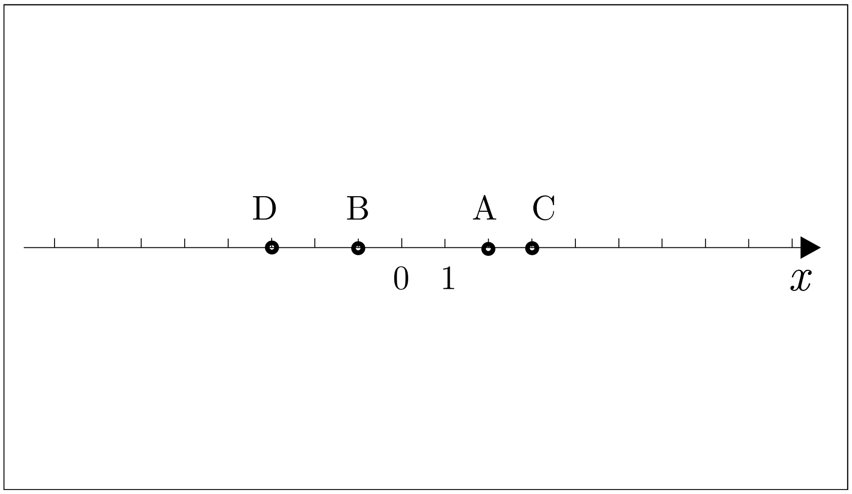
$$\mathrm{P} \equiv x,$$

x viene chiamata *ascissa* o *coordinata* di P.

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{O} \equiv 0, \quad \mathrm{U} \equiv 1.$$

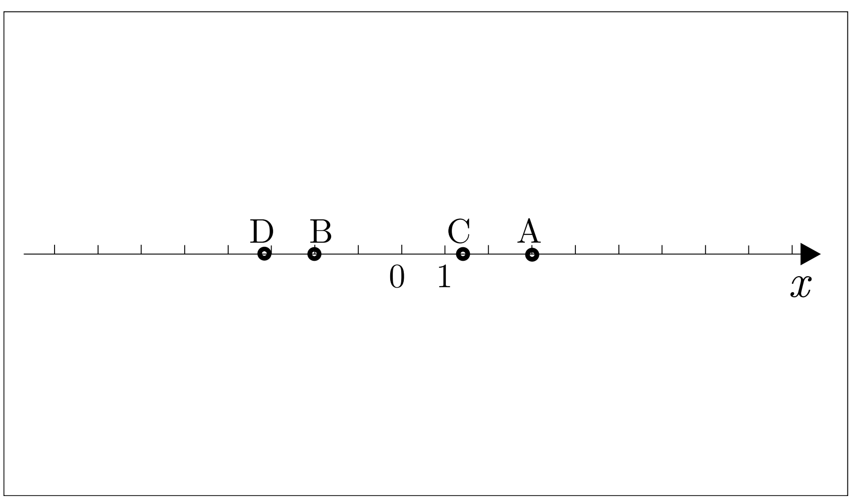
—— ... ——



$$\mathrm{A} \equiv 2; \qquad \mathrm{B} \equiv -1; \qquad \mathrm{C} \equiv 3; \qquad \mathrm{D} \equiv -3;$$

...

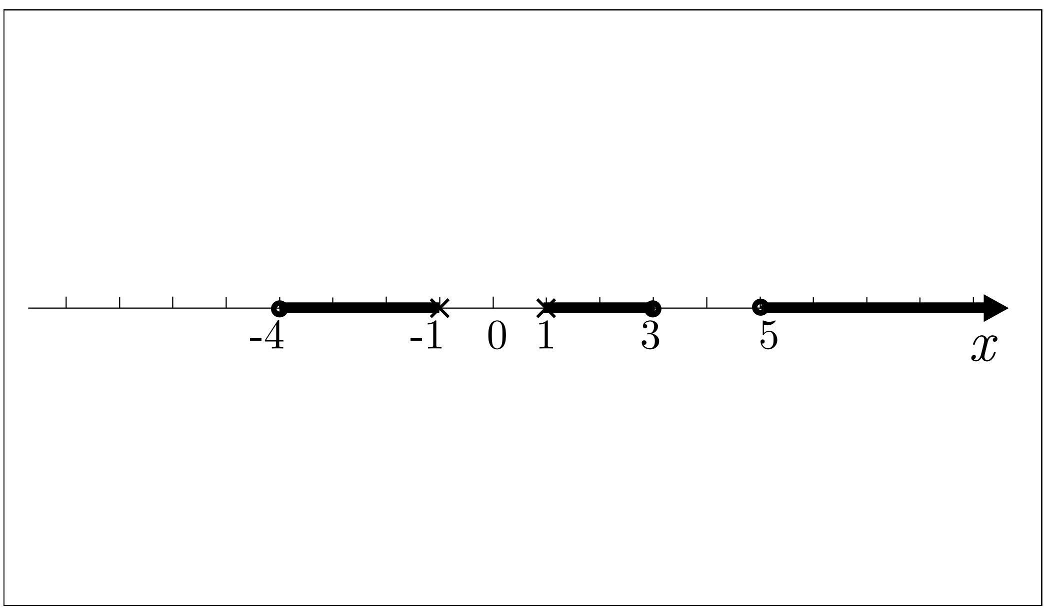
$$\mathrm{A} \equiv 3; \qquad \mathrm{B} \equiv -2; \qquad \mathrm{C} \equiv \sqrt{2}; \qquad \mathrm{D} \equiv -\pi;$$



La possibilità di associare numeri reali a punti di una retta permette di rappresentare i sottoinsiemi di $\mathcal{R}$ come insiemi di punti; in particolare, gli intervalli limitati saranno rappresentati da segmenti, gli intervalli illimitati da semirette.

Rappresentare i seguenti intervalli di $\mathcal{R}$:

$$[-4,-1[, \quad]1,3], \quad [5,+\infty).$$



Equazioni e disequazioni

Introduzione alle equazioni

Il problema che va sotto il nome di ***risoluzione di un'equazione*** si può enunciare come segue:

viene assegnata una espressione matematica nella quale compare una variabile (l'incognita, per antica tradizione indicata con x) e si chiede di determinare quali valori occorre assegnare a tale variabile affinché l'espressione assuma un determinato valore (spesso, zero).

Questo problema è di fondamentale interesse e di non semplice risoluzione.

Equazioni algebriche

Che significa $3x - 6 = 0$?

Si ricercano i valori da assegnare a x affinché l'eguaglianza risulti soddisfatta.

Il problema facilmente risolubile utilizzando note proprietà algebriche elementari:

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2.$$

L'unico valore che rende l'espressione assegnata uguale a zero è $x = 2$, infatti: $3 \cdot 2 - 6 = 0$.

In sintesi:

- il problema ammette soluzione;
- tale soluzione è unica;
- la soluzione vale 2.

Che significa $a \cdot x + b = 0$?
Cosa rappresenta esattamente?

.

Per analogia con la relazione precedente: si cercano i valori da assegnare a x affinché l'eguaglianza risulti soddisfatta

⇓

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow a \cdot x = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

ATTENZIONE

- Si dà per scontato che a e b siano i dati e x l'incognita! Nella scrittura $a \cdot x + b = 0$ tale informazione non è presente.
- La divisione per a è possibile solo se a è diverso da zero

⇓

Occorre formulare il problema in modo preciso!

Equazione di I grado

Assegnata l'equazione $ax + b = 0$, *con* a *e* b *numeri preassegnati, di cui il primo diverso da zero, si cercano i valori da dare a* x *affinché l'eguaglianza sia verificata. Risulta:*

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

$$\Downarrow$$

Esiste un unico valore $x = -b/a$ *che sostituito nella espressione assegnata la rende uguale a zero, infatti:* $a \cdot (-b/a) + b = 0$.

In sintesi:

- il problema ammette soluzione;
- tale soluzione è unica;
- la soluzione vale

$$-\frac{b}{a}$$

.

Assegnata l'equazione $ax + b = 0$, con a e b numeri preassegnati, di cui il primo **uguale** a zero, si cercano i valori da dare a x affinché l'eguaglianza sia verificata.

Esiste x tale che:

$$0 \cdot x + b = 0?$$

Sussistono due diverse possibilità:

- Il numero b è diverso da zero: è evidente che, qualunque valore assegnamo a x, risulta:

$$0 \cdot x + b = b \neq 0.$$

  – Il problema non ammette soluzione.

- Il numero b è uguale a zero: è evidente che qualunque sia il valore che assegnamo a x, risulta:

$$0 \cdot x + b = b = 0.$$

  – Il problema ammette soluzione;

– tale soluzione non è unica;
– ogni numero reale è soluzione dell'equazione: l'equazione ammette infinite soluzioni.

Assegnata l'equazione $3x - 6 = 5x + 10$, si ricercano i valori da assegnare a x affinché l'eguaglianza risulti soddisfatta.

$\Downarrow$

L'eguaglianza può essere riscritta come $2x = -16$, da cui si ottiene $x = -8$.

Equazione di II grado

Assegnata l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, *con* a, b *e* c *numeri reali preassegnati e con il primo diverso da zero, si cercano i valori da dare a* x *affinché l'eguaglianza sia verificata.*

Si valuta la quantità, detta **discriminante***:*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Sussistono, allora, le tre seguenti eventualità:

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{ non esistono soluzioni},$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{ esiste una soluzione : } \quad x = \frac{-b}{2a},$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{ esistono due soluzioni : } \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Risolvere:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$$

$$\Downarrow$$

L'equazione ammette due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2} = -2.$$

$$\Downarrow$$

Risulta:

$$(3)^2 - 3 - 6 = 0 \quad \text{e} \quad (-2)^2 - (-2) - 6 = 0.$$

Qualunque altro valore assegnato a x renderà l'espressione non nulla.

Risolvere

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0.$$

L'equazione non ammette soluzione.

. . .

risolvere

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0,$$

l'equazione ammette un'unica soluzione:

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2} = 2.$$

Risulta:

$$(2)^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0,$$

Qualunque altro valore assegnato a x renderà l'espressione non nulla.

Introduzione alle disequazioni

Il problema che va sotto il nome di ***risoluzione di una disequazione*** si può enunciare come segue: viene assegnata una espressione matematica nelle quale compare una variabile (l'incognita) e si chiede di determinare quali valori occorre assegnare a tale variabile affinché l'espressione assuma valori maggiori o minori di un determinato valore (spesso, zero).

Questo problema è di fondamentale interesse e di non semplice risoluzione.

Disequazioni algebriche

⇩

Che significa $3x - 6 > 0$?

Si ricercano i valori da assegnare a x affinché la disuguaglianza risulti soddisfatta. Il problema può essere risolto usando la stessa tecnica utilizzata per risolvere le equazioni di I grado e ricordando che una disuguaglianza non cambia se si moltiplicano entrambi i membri per un numero positivo:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{3} = 2.$$

I valori che rendono l'espressione assegnata maggiore di zero sono tutti e soli i valori maggiori di due: $x \in \,]2, +\infty)$.

Risolvere

$$-2x - 8 > 0$$

$$-2x - 8 > 0 \Rightarrow -2x > 8 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4.$$

I valori che rendono l'espressione assegnata maggiore di zero sono tutti e soli i valori minori di -4: $x \in (-\infty, -4[$.

Si noti che se si moltiplicano entrambi i membri della disuguaglianza per un numero negativo si inverte il verso della disuguaglianza.

In generale:

Disequazione di I grado

Assegnata la disequazione $ax + b > 0$, *con* $a \neq 0$, *si ha*

$$ax+b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-b}{a} \iff x \in \,]\dfrac{-b}{a}, +\infty), \\ x < \dfrac{-b}{a} \iff x \in (-\infty, \dfrac{-b}{a}[, \end{cases}$$

Disequazione di II grado

Assegnata la disequazione $ax^2+bx+c > 0$*, con* $a \neq 0$*, si considerano, preliminarmente, le soluzioni dell'equazione associata.*

Sussistono allora le tre seguenti eventualità:

- *l'equazione non ammette soluzioni:*
  - *se* $a > 0$*, tutti i valori di* $x \in \mathcal{R}$ *soddisfano la disequazione;*
  - *se* $a < 0$*, nessun valore di* x *soddisfa la disequazione;*
- *l'equazione ammette una soluzione,* x_0*:*
  - *se* $a > 0$*, tutti i valori di* $x \in \mathcal{R} - \{x_0\}$ *soddisfano la disequazione;*
  - *se* $a < 0$*, nessun valore di* x *soddisfa la disequazione;*
- *l'equazione ammette due soluzioni,* $x_1 < x_2$*:*
  - *se* $a > 0$*, tutti i valori di* x *esterni all'intervallo* $]x_1, x_2[$ *soddisfano la disequazione;*
  - *se* $a < 0$*, tutti i valori di* x *appartenenti all'intervallo* $]x_1, x_2[$ *soddisfano la disequazione.*

Risolvere

$$x^2 - x - 6 > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0.$$

Esistono due valori che soddisfano l'equazione associata:

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2} = -2 \text{ e } x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

- Coefficiente di x^2 positivo

La disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo $]-2, 3[$:

$$x \in \; (-\infty, -2[\cup]3, +\infty).$$

Se la disequazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

si osservi che:

$$ax^2 + bx + c < 0 \iff -ax^2 - bx - c > 0.$$

Risolvere

$$x^2 - 3x + 4 < 0.$$

$$\Downarrow$$

$$-x^2 + 3x - 4 > 0.$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = -7 < 0.$$

Non esistono soluzioni per l'equazione associata.

- Coefficiente di x^2 negativo

$$\Downarrow$$

Nessun valore di x soddisfa la disuguaglianza.

Se la disequazione si presenta nella forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0(\leq)$$

occorre aggiungere le soluzioni dell'equazione associata.

...

Risolvere

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Esiste un'unica soluzione per l'equazione associata:

$$x_0 = 2$$

- Coefficiente di x^2 positivo
- la disequazione della forma "maggiore o uguale"

$$\Downarrow$$

Ogni valore di x soddisfa la disuguaglianza.

Introduzione ai sistemi di disequazioni

Il problema che va sotto il nome di ***risoluzione di un sistema di disequazioni*** in una variabile si può enunciare come segue:
assegnate due o più disequazioni in una stessa variabile, determinare i valori della variabile che rendono contemporaneamente soddisfatte le disequazioni.

La risoluzione di un sistema di disequazioni si effettua:

1. risolvendo, indipendentemente l'una dalle altre, le singole disequazioni
2. intersecando, successivamente, gli insiemi che ne costituiscono le soluzioni.

Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

- Soluzioni della prima disequazione:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow \ x > 1 \quad \text{e} \quad x < 2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X}_1 =]1, 2[.$$

- Soluzioni della seconda disequazione:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \ x \leq -1 \quad \text{e} \quad x \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X}_2 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

- Intersezione

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 =]1, 2[.$$

La risoluzione di molte disequazioni si effettua trasformando il problema in uno o più sistemi di disequazioni più semplici del problema di partenza.

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x-3}{x^2-6x+8} > 0.$$

$$\Downarrow$$

L'espressione da analizzare si presenta come un rapporto tra due termini: $x-3$ e x^2-6x+8.

Sarà positiva dove numeratore e denominatore sono entrambi positivi o negativi.

$$\Downarrow$$

La soluzione del problema è costituita dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x-3 & < 0 \\ x^2-6x+8 & < 0 \end{cases}, \begin{cases} x-3 & > 0 \\ x^2-6x+8 & > 0 \end{cases}$$

- I Sistema

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3, \quad x^2 - 6x + 8 < 0 \Rightarrow 2 < x < 4,$$

$$\mathbf{X}_1 =]2, 3[.$$

- II Sistema

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3, \quad x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ o } x > 4,$$

$$\mathbf{X}_2 =]4, +\infty).$$

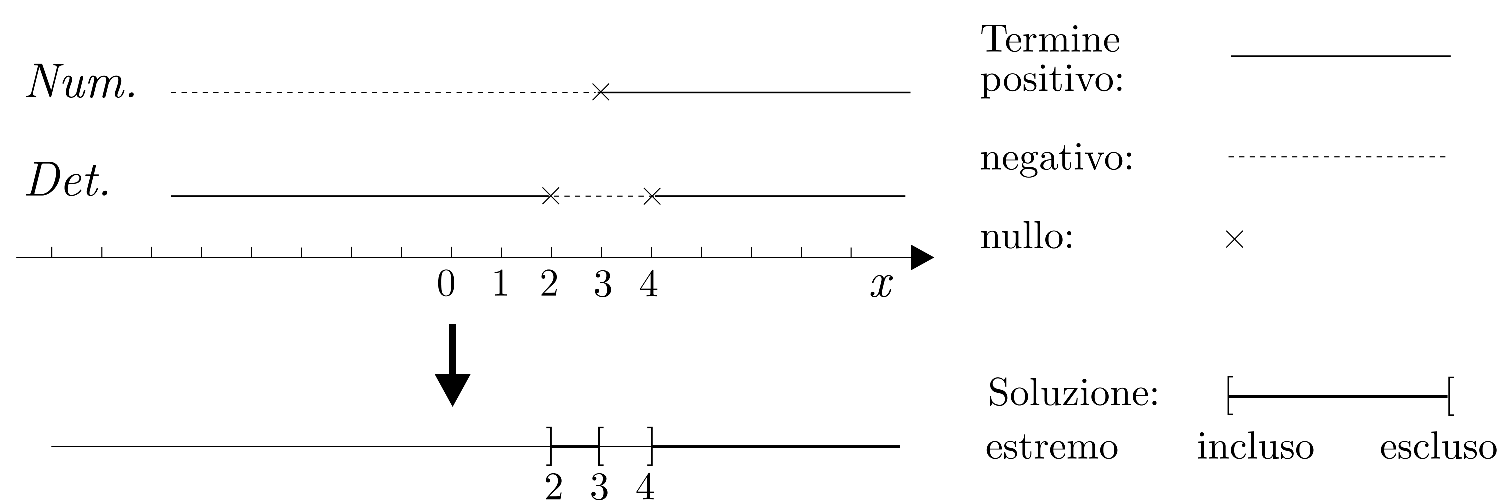
- Unione

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2 =]2, 3[\cup]4, +\infty).$$

Le soluzioni dei due sistemi sono legate fra di loro.

È possibile risolverli contemporaneamente ovvero risulta consigliabile analizzare i segni del numeratore e del denominatore e risalire alle zone in cui tali termini hanno segno concorde.

Questo può essere descritto con una opportuna rappresentazione grafica



Elementi di Geometria Analitica

Coordinate cartesiane di un piano euclideo

Consideriamo sul piano euclideo $\mathbf{\Pi}$ due rette ortogonali (*assi cartesiani*) sulle quali vengono introdotti due sistemi di ascisse con origine nel punto di intersezione delle rette e uguale unità di misura.

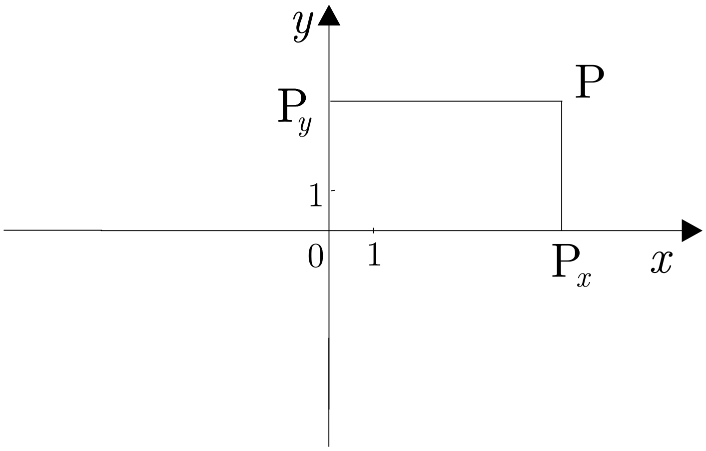
Tipicamente una delle rette si considera orizzontale (*asse delle ascisse o asse delle x*) con il verso positivo da sinistra verso destra, l'altra verticale (*asse delle ordinate o asse delle y*) con il verso positivo dal basso verso l'alto.

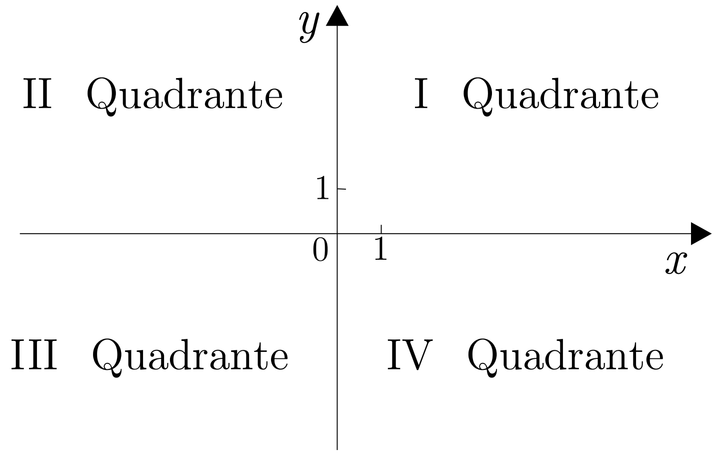
Considerato un punto P del piano, siano P_x e P_y le proiezioni di P rispettivamente sull'asse delle x e sull'asse delle y e x e y le loro ascisse rispetto ai riferimenti adottati sui rispettivi assi.

$$\Downarrow$$

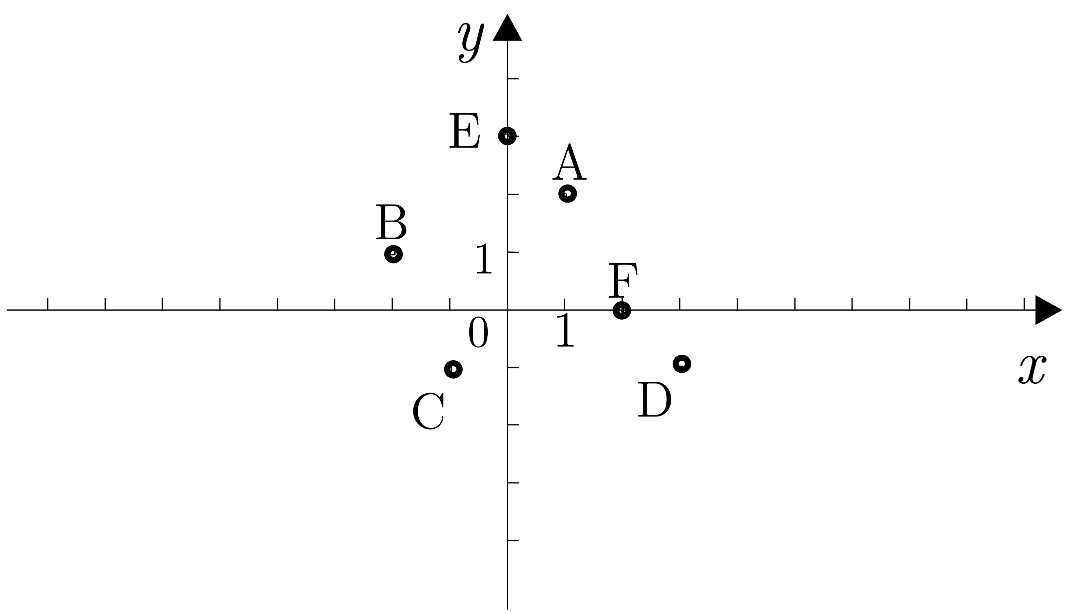
Si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{\Pi}$ e $\mathcal{R}^2$ che ad ogni punto P del piano $\mathbf{\Pi}$ associa un'unica coppia (x, y) di $\mathcal{R}^2$ e viceversa; tale associazione si indica con: $\mathrm{P} \equiv (x, y)$.

Gli assi cartesiani dividono il piano euclideo in 4 zone denominate quadranti che si è soliti numerare in senso antiorario.





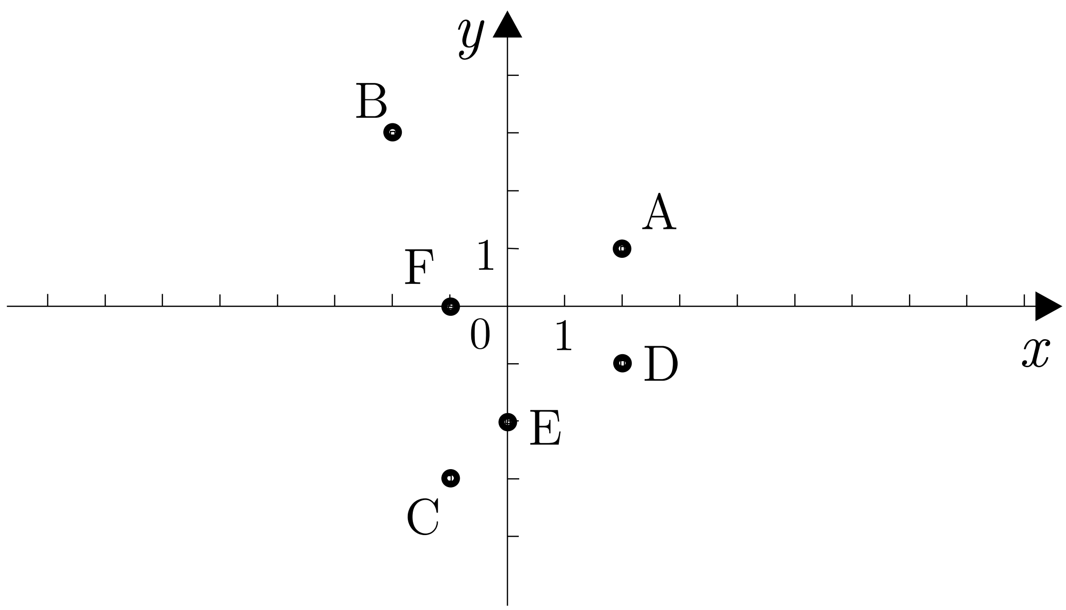
Valutare le coordinate dei 6 punti indicati con le lettere A ÷ F.



Rappresentare i punti:

$A \equiv (2, 1)$; $B \equiv (-2, 3)$; $C \equiv (-1, -3)$; $D \equiv (2, -1)$;

$E \equiv (0, -2)$; $F \equiv (-1, 0)$.



Punto medio di un segmento:

$$\mathrm{A} \equiv (x_a, y_a), \;\; \mathrm{B} \equiv (x_b, y_b)$$

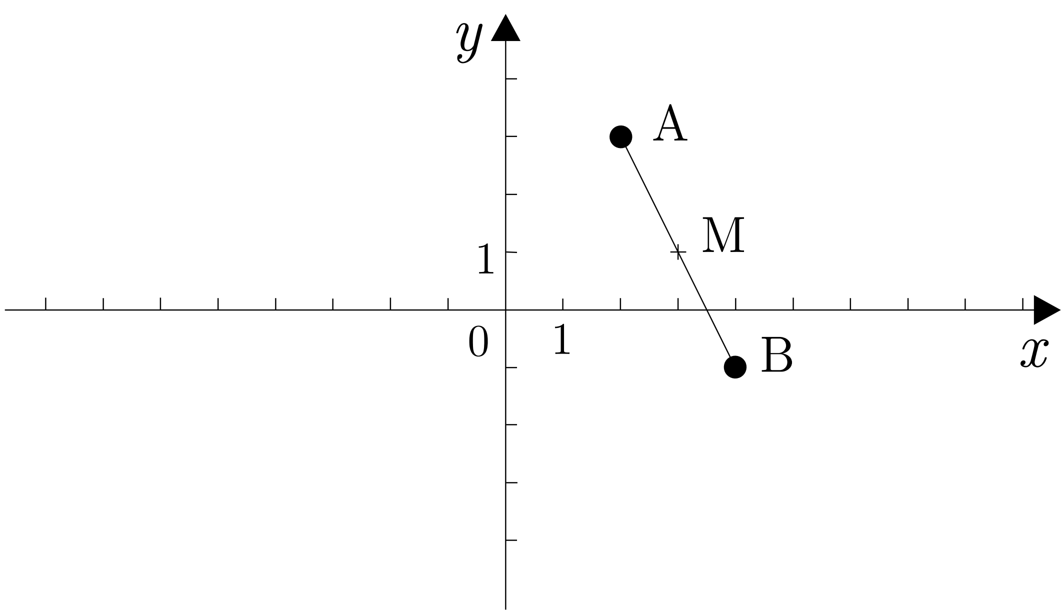
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M} \equiv \left(x_m = \frac{x_a + x_b}{2}, y_m = \frac{y_a + y_b}{2} \right)$$

Dato il segmento di estremi $\mathrm{A} \equiv (2, 3)$ e $\mathrm{B} \equiv (4, -1)$, calcolare le coordinate del punto medio M.

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M} \equiv \left(\frac{2+4}{2} = 3, \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \right)$$



Lunghezza di un segmento - Distanza tra due punti:

$$\mathrm{A} \equiv (x_a, y_a),\ \mathrm{B} \equiv (x_b, y_b)$$

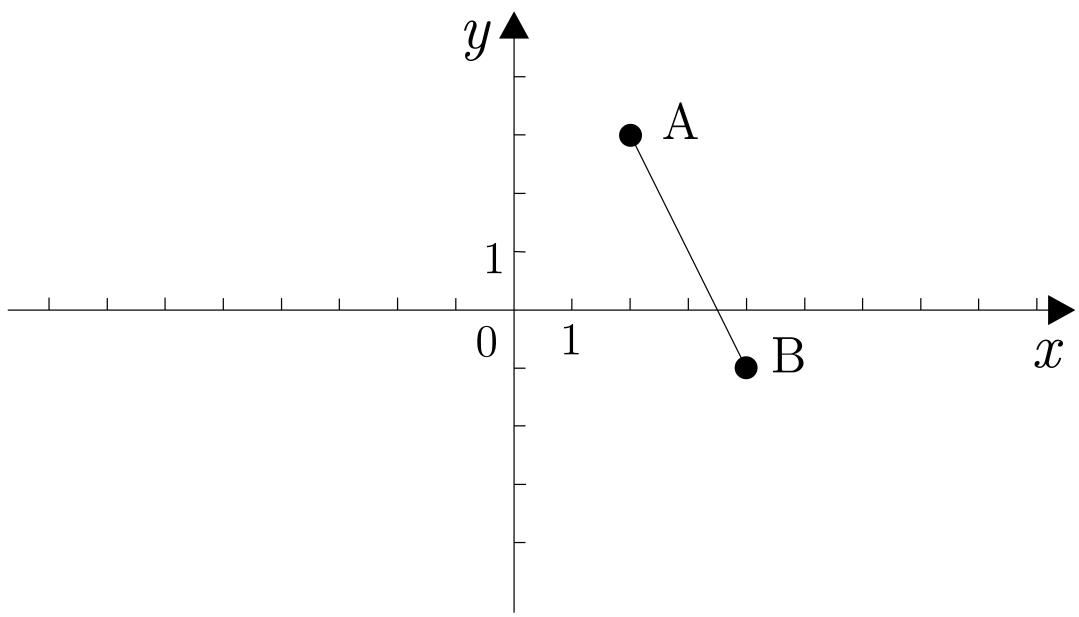
$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Calcolare la lunghezza del segmento di estremi $\mathrm{A} \equiv (2, 3)$ e $\mathrm{B} \equiv (4, -1)$.

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

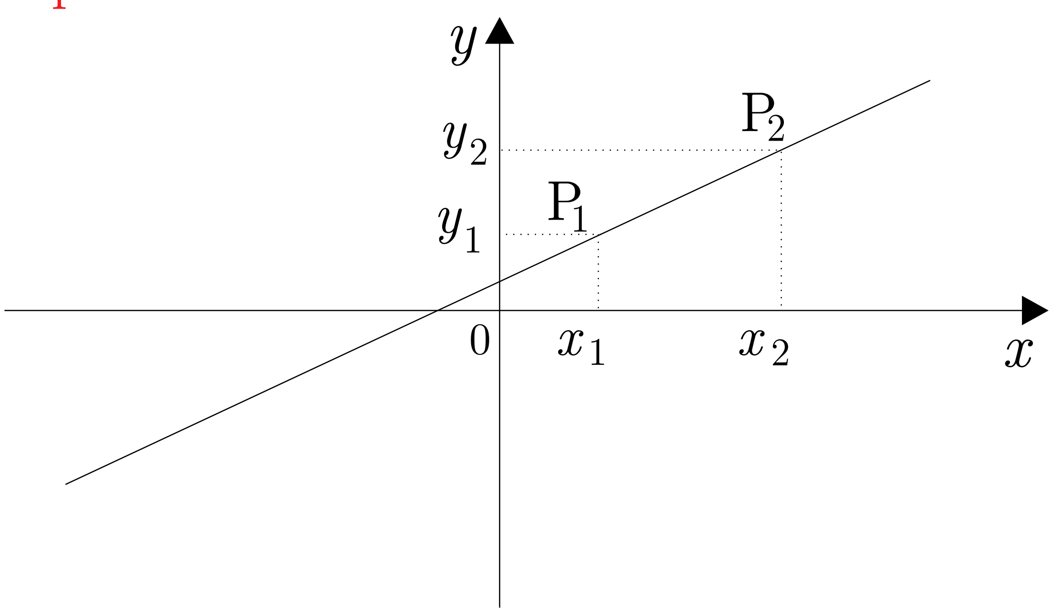


Equazione della retta

Se si fissano nel piano $\mathbf{\Pi}$ due punti distinti $\mathrm{P}_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $\mathrm{P}_2 \equiv (x_2, y_2)$, questi identificano, in modo univoco, una retta.

Si dimostra che le coordinate di tutti e soli i punti di questa retta costituiscono le soluzioni di un'equazione di I grado in x e y che, in dipendenza dei valori delle coordinate di P_1 e P_2, si scrive:

- Retta obliqua



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$$

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $\mathrm{P}_1 \equiv (1, 2)$ e $\mathrm{P}_2 \equiv (2, -2)$.

$$\Downarrow$$

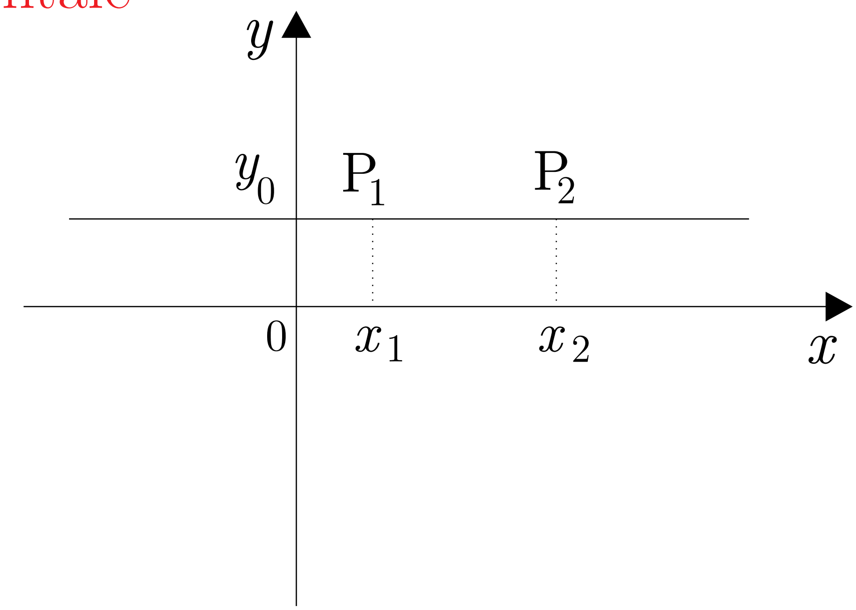
Sia le ascisse che le ordinate dei punti sono diverse fra loro:

$$\Downarrow$$

La retta è obliqua di equazione:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2} \Rightarrow \; 4x + y - 6 = 0.$$

- Retta orizzontale



$$y = y_0, x_1 \neq x_2,\ y_1 = y_2 = y_0$$

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $\mathrm{P}_1 \equiv (1, 2)$ e $\mathrm{P}_2 \equiv (2, 2)$.

$$\Downarrow$$

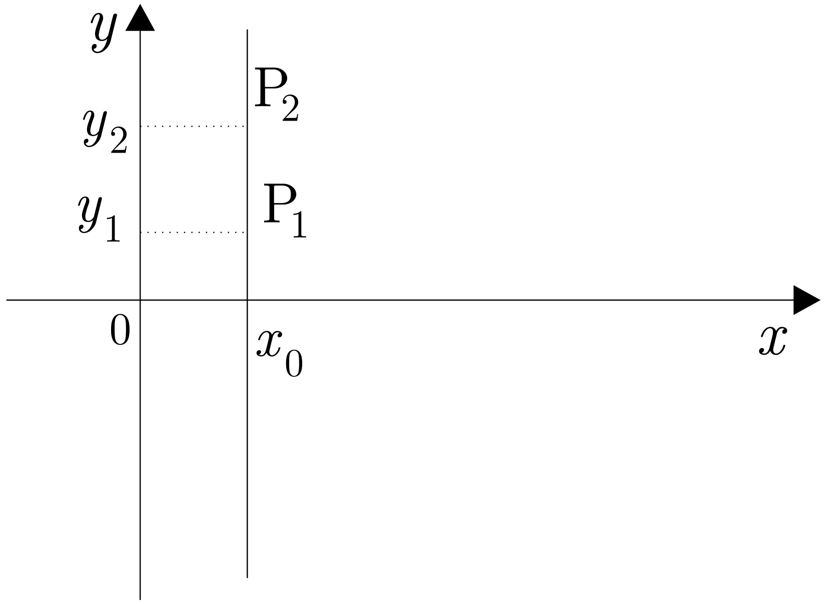
Le ordinate dei punti sono uguali fra loro:

$$\Downarrow$$

La retta è orizzontale di equazione:

$$y = 2$$

• Retta verticale



$$x = x_0, x_1 = x_2 = x_0,\ y_1 \neq y_2$$

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1 \equiv (1, 2)$ e $P_2 \equiv (1, -2)$.

Le ascisse dei punti sono uguali fra loro:

La retta è verticale di equazione:

$$x = 1$$

Ponendo:

$a = y_2 - y_1,\ b = x_1 - x_2,\ c = y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1),$

le varie equazioni si unificano nell'unica relazione:

$$ax + by + c = 0,$$

che viene detta **equazione implicita della retta.**

È fondamentale ricordare che considerata una qualunque equazione di I grado $ax + by + c = 0$ le sue soluzioni identificano una retta.

Per rappresentarla, occorre individuare due punti distinti del piano che appartengano alla retta stessa.

- Se il coefficiente b è diverso da zero, si assegnano due valori arbitrari a x e si ottengono le corrispondenti y utilizzando l'**equazione esplicita della retta**, rispetto a y:

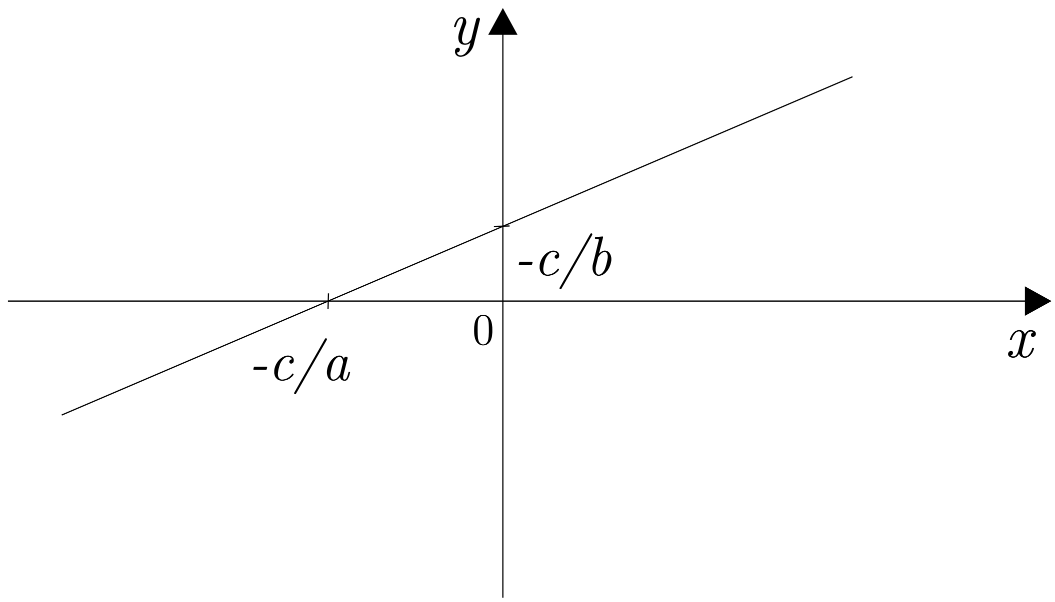
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + n,$$

- Se il coefficiente a è diverso da zero, si assegnano due valori arbitrari a y e si ottengono le corrispondenti x utilizzando l'**equazione esplicita della retta**, rispetto a x:

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} = py + q.$$

Se a e b sono entrambi diversi da zero, semplifica i calcoli assegnare $x = 0$ e ricavare y dalla prima equazione esplicita e, successivamente, assegnare $y = 0$ e ricavare x dalla seconda:

$$\mathrm{P}_1 \equiv (0, -\frac{c}{b}), \quad \mathrm{P}_2 \equiv (-\frac{c}{a}, 0).$$



In generale, si usa solo la forma esplicita rispetto a y.

Si tenga presente che tale forma non permette di rappresentare rette verticali.

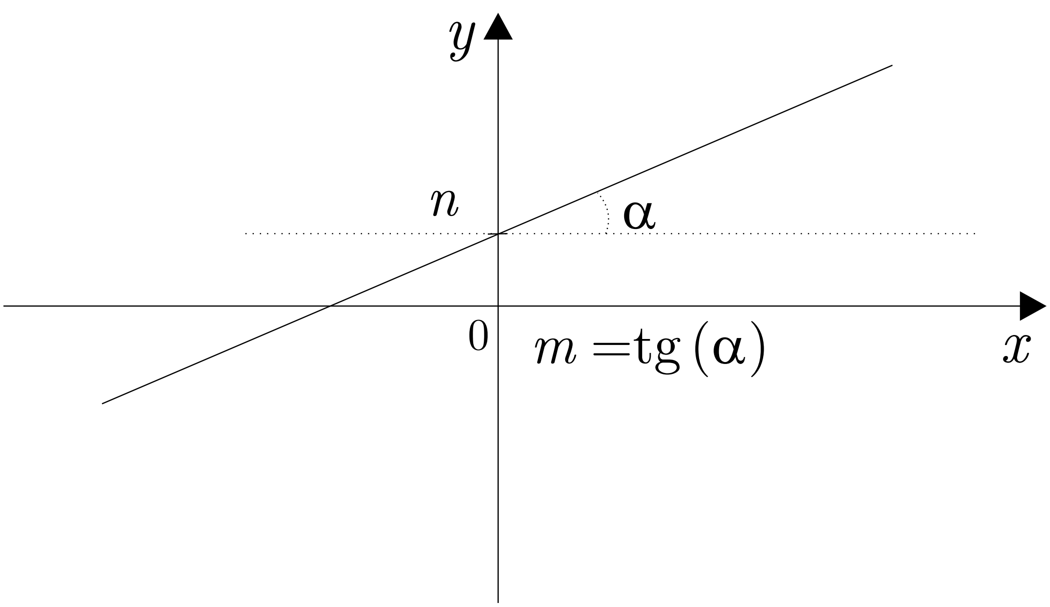
Coefficiente angolare e termine noto.

Consideriamo la forma esplicita di una retta:

$$y = mx + n.$$

In essa:

- il coefficiente m viene chiamato ***coefficiente angolare*** e dipende dall'angolo che la retta forma con l'asse delle x.
- il coefficiente n viene chiamato ***termine noto*** e coincide con l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse delle y.



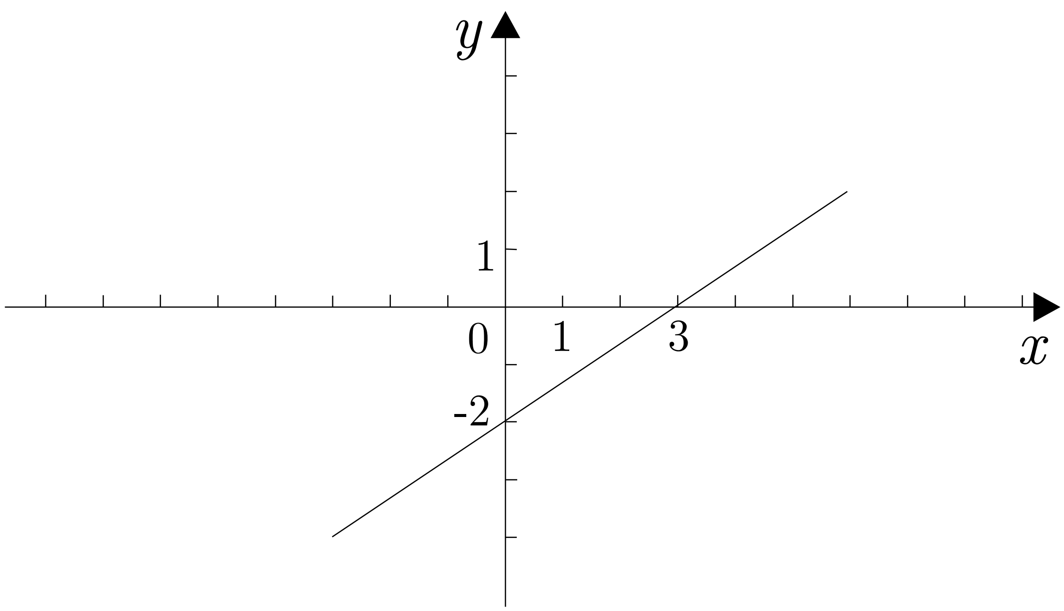
Per essere precisi il coefficiente angolare coincide con la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x.

Rappresentare la retta di equazione:

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

Appartengono alla retta i punti:

$$\mathrm{P}_1 \equiv (0, -\frac{-6}{-3}), \quad \mathrm{P}_2 \equiv (-\frac{-6}{2}, 0).$$



Rappresentare la retta di equazione:

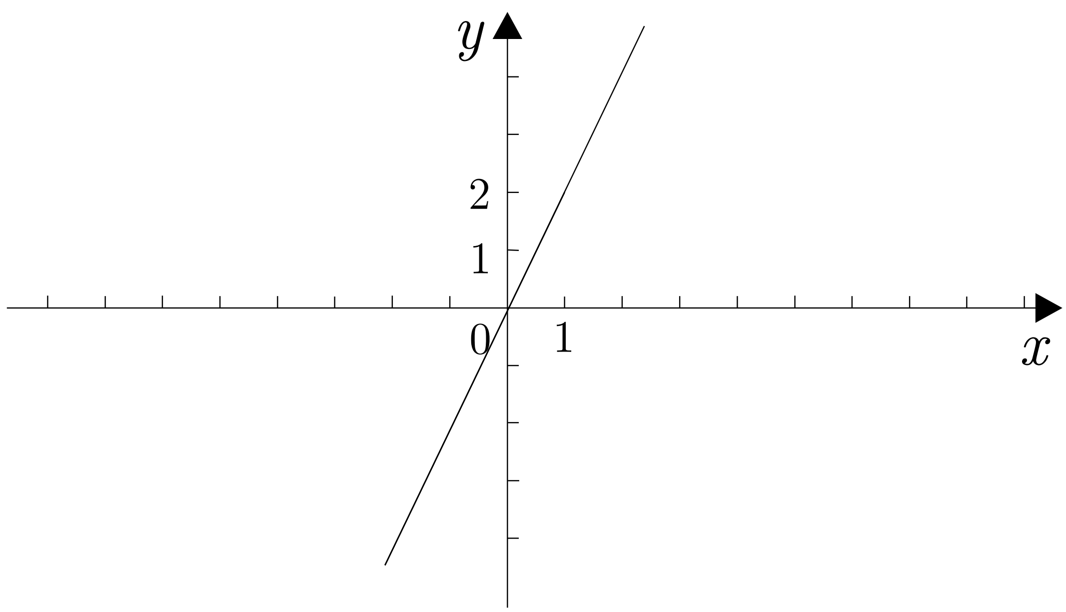
$$6x - 3y = 0.$$

$$\Downarrow$$

Il termine noto è zero:
la retta passa perl'origine.
Assegnamo un valore arbitrario a x e ricaviamo y:

$$x = 1 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 3y = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \mathrm{P} \equiv (1, 2).$$

$$\Downarrow$$



Assegnata la retta di equazione:

$$x - 2y + 4 = 0,$$

controllare se i punti $\mathrm{P}_1 \equiv (-1, 2)$ e $\mathrm{P}_2 \equiv (2, 3)$ appartengono alla retta.

Basta sostituire le coordinate dei punti nell'equazione della retta e controllare se la stessa risulta soddisfatta:

$$\begin{aligned} -1 - 2 \cdot 2 + 4 = -1 \neq 0, &\iff \mathrm{P}_1 \text{ non appartiene alla retta} \\ 2 - 2 \cdot 3 + 4 = 0, &\iff \mathrm{P}_2 \text{ appartiene alla retta.} \end{aligned}$$

Controllare se i tre punti $\mathrm{P}_1 \equiv (-1, 2)$, $\mathrm{P}_2 \equiv (1, 1)$ e $\mathrm{P}_3 \equiv (3, 0)$ sono allineati.

Basta controllare se uno dei tre punti appartiene alla retta definita dai rimanenti due:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{3 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{0 - 2}{1 - 2}.$$

I tre punti sono allineati.

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette.

- **Forma implicita**:
  due rette r e s di equazioni rispettive:

  $$r \equiv a_r x + b_r y + c_r = 0, \quad s \equiv a_s x + b_s y + c_s = 0,$$

  sono:

  – parallele se $a_r = k a_s$, $b_r = k b_s$, per k opportuno; in più, se anche $c_r = k c_s$, le rette coincidono;

  – perpendicolari se $a_r = k b_s$, $b_r = -k a_s$, per k opportuno.

- **Forma esplicita**:
  due rette r e s di equazioni rispettive:

  $$r \equiv y = m_r x + n_r, \quad s \equiv y = m_s x + n_s,$$

  sono:

  – parallele se $m_r = m_s$;

  – perpendicolari se $m_r = -1/m_s$.

Considerate le rette $r \equiv x + y + 1 = 0$ e $s \equiv y = x + 2$, controllare se sono perpendicolari.

Il coefficiente angolare di r è $m_r = -1$,

Il coefficiente angolare di s è $m_s = 1$:

le due rette sono perpendicolari.

Per un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del piano $\mathbf{\Pi}$ passano infinite rette.

Tali rette si rappresentano mediante una delle seguenti equazioni:

- Forma implicita

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

- Forma esplicita

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

$$\Downarrow$$

Equazione delle rette per un punto
Equazione del fascio di rette di centro P_0.

L'equazione esplicita del fascio di rette passanti per P_0 non rappresenta la retta verticale passante per P_0.

Assegnata la retta r di equazione:

$$x - 2y + 2 = 0$$

e il punto $\mathrm{P}_0 \equiv (2, 3)$, scrivere:

- l'equazione del fascio passante per P_0:

$$a(x - 2) + b(y - 3) = 0.$$

- la retta parallela a r passante per P_0:

$$(x - 2) - 2(y - 3) = x - 2y + 4 = 0$$

- retta perpendicolare a r passante per P_0:

$$2(x - 2) + (y - 3) = 2x + y - 7 = 0$$

Due rette non parallele si incontrano in un unico punto.

Per trovare le coordinate di tale punto occorre risolvere il sistema lineare di due equazioni in due incognite formato dalle equazioni delle rette.

Considerate le rette $r \equiv x + 2y + 1 = 0$ e $s \equiv y = x + 2$, determinare l'eventuale punto di intersezione.

$\Downarrow$

Il coefficiente angolare di r è $m_r = -0.5$, quello di s è $m_s = 1$, le due rette non sono parallele e, pertanto, si incontrano in un solo punto.

Le sue coordinate sono date dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema.

Sottraendo, membro a membro, dalla prima equazione la seconda è possibile ricavare y:

$$(x + 2y = -1) - (x - y = -2) \Rightarrow \; 3y = 1 \Rightarrow \; y = \frac{1}{3}$$

Sostituendo il valore della y così ottenuto in una delle due equazioni si ricava x:

$$x + 2\frac{1}{3} = -1 \Rightarrow \; x = -\frac{5}{3}.$$

Assegnata la retta r di equazione:

$$x + y + 1 = 0$$

e il punto $\mathrm{P}_0 \equiv (1, 2)$, calcolare la distanza di P_0 dalla retta $r = dist(\mathrm{P}_0, r)$.

$\Downarrow$

Distanza di un punto P da una retta r = lunghezza del segmento di estremi P e P_r, essendo P_r la proiezione di P sulla retta.

P_r = punto di intersezione tra la retta r e la retta s passante per P e perpendicolare a r.

1. Fascio di rette passanti per $\mathrm{P}_0 \Rightarrow \; y = m(x-1)+2$
2. Coefficiente angolare di r =-1
3. Coefficiente angolare rette perpendicolari = 1
4. Equazione di $s \Rightarrow \; y = (x-1)+2 = x+1$

$\Downarrow$

Le coordinate del punto proiezione P_r sono date dalla soluzione del sistema ottenuto con le equazioni di r e s:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Soluzione del sistema

$$x = -1, \quad y = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$dist(\mathrm{P}_0, r) = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_r} = \sqrt{(1+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Il procedimento utilizzato applicato ad un generico punto $\mathrm{P}_0 \equiv (x_0, y_0)$ ed ad una retta r rappresenta o in forma implicita o in forma esplicita, permette di ottenere le seguenti relazioni:

Distanza di un punto da una retta:

- Forma implicita:

$$dist(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Forma esplicita:

$$dist(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|mx_0 - y_0 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

...

Assegnata la retta r di equazione:

$$x + y + 1 = 0$$

e il punto $\mathrm{P}_0 \equiv (1, 2)$, calcolare la distanza di P_0 dalla retta r.

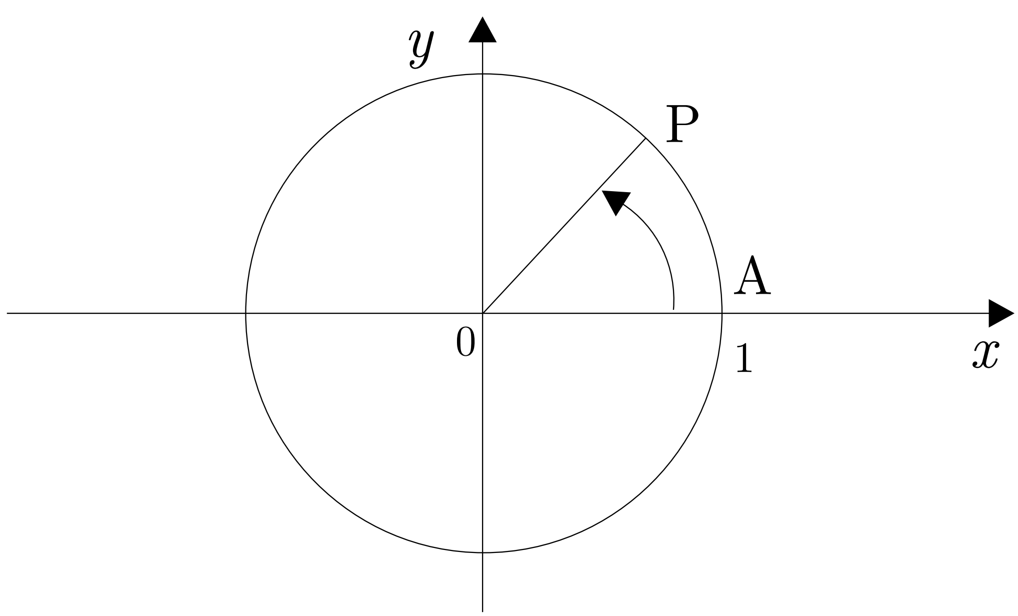
$\Downarrow$

$$dist(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Misura degli angoli

Considerato un sistema di assi cartesiani ed una circonferenza, di centro nell'origine degli assi e raggio unitario, indichiamo con A il punto in cui la semiretta positiva dell'asse delle x incontra la circonferenza.
Fissato un punto P della circonferenza resta individuato l'angolo $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{P}$ che il segmento OP forma con l'asse delle x; questo angolo può essere misurato:

- o mediante il confronto rispetto ad un angolo unitario (misura in gradi)
- o attraverso la lunghezza dell'arco AP percorso in senso antiorario (misura in radianti)



Tenendo conto che l'intera circonferenza è lunga 2π, si ha che l'angolo giro la cui misura in gradi è $360°$, in radianti misura 2π.

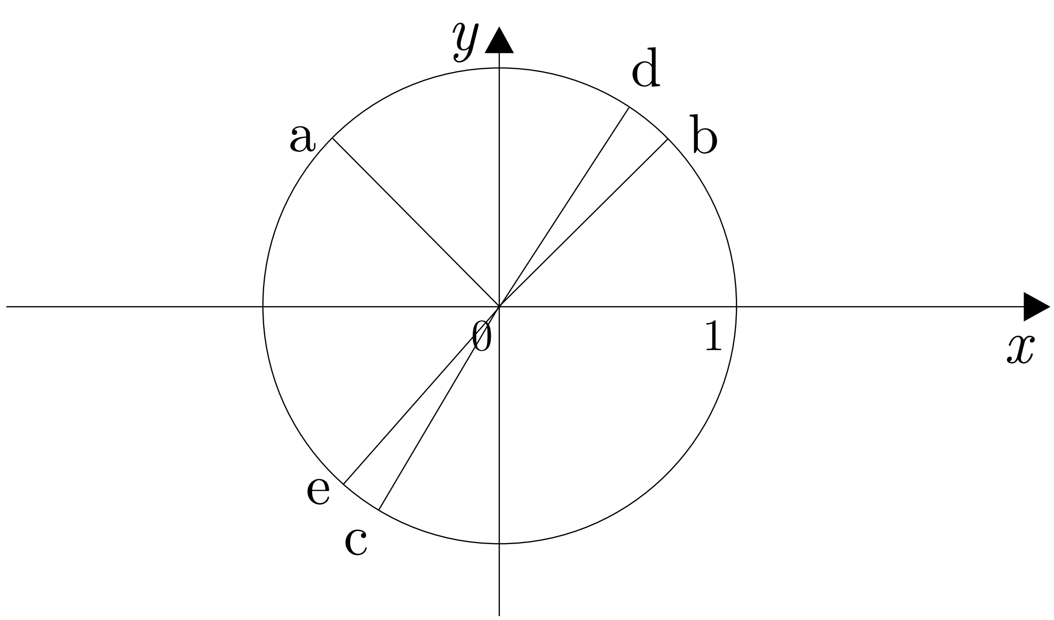
In generale, vale la seguente proporzione che permette di passare dalle misure in gradi a quelle in radianti:

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180°} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

Convertire in gradi gli angoli la cui misura in radianti è:

a) $3\pi/4$; b) $\pi/4$; c) $4\pi/3$; d) 1 ; e) 4.

a) $135°$; b) $45°$; c) $240°$; d) $\simeq (57.297469)°$
e) $\simeq (229.189877)°$.

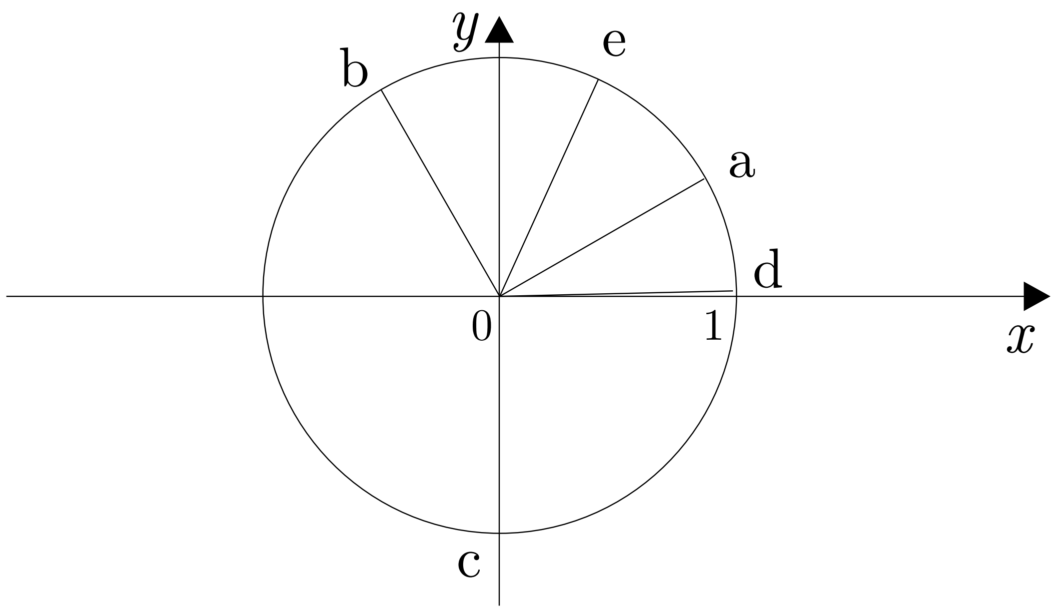


Convertire in radianti gli angoli la cui misura in gradi è:

$$\text{a) } 30°; \quad \text{b) } 120°; \quad \text{c) } 270°; \quad \text{d) } 1°$$
$$\text{e) } 65°15' = (65.25)°.$$

$$\Downarrow$$

$$\text{a) } \pi/6; \quad \text{b) } 2\pi/3; \quad \text{c) } 3\pi/2; \quad \text{d) } \simeq 0.0174528$$
$$\text{e) } \simeq 1.138794.$$



Valgono le seguenti convenzioni.
Se $\alpha \in [0, 2\pi[$ è la misura dell'angolo $\mathrm{A\widehat{O}P}$:

- il valore $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\mathrm{A\widehat{O}P'}$ di ampiezza uguale al precedente e $\mathrm{P'}$ simmetrico di P rispetto all'asse delle x;
- al variare di k in $\mathcal{Z}$, i valori $\alpha + k \cdot 2\pi$ denotano lo stesso angolo. Ad esempio, $\pi/4, \pi/4 + 2\pi, \pi/4 - 4\pi$ identificano lo stesso angolo di $45°$.

Fra tutte le misure di un angolo, quella che ricade nell'intervallo $[0, 2\pi[$ viene detta ***misura principale***.

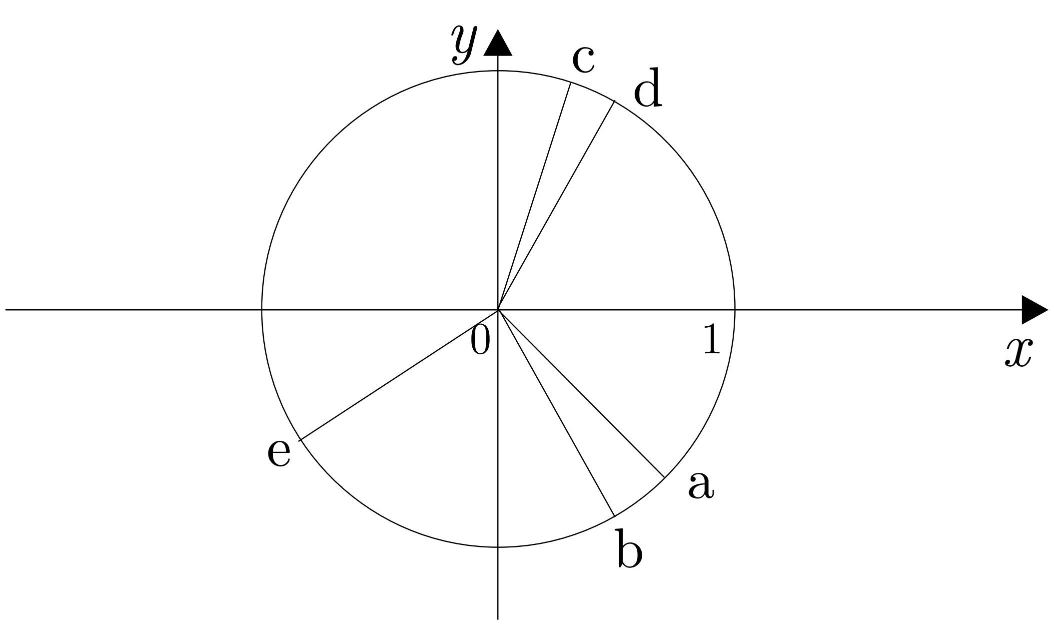
Riportare alla misura principale le seguenti misure di angoli in radianti:

a) $7\pi/4$; b)$-\pi/3$; c)$12\pi/5$; d)$13\pi/3$; e)10.

$\Downarrow$

Occorre controllare se il valore α, che rappresenta la misura dell'angolo, appartiene all'intervallo $[0, 2\pi[$ ovvero se risulta $0 \leq \alpha < 2\pi$. In caso affermativo α è la misura principale, in caso contrario occorre sottrarre o aggiungere ad α un opportuno multiplo di 2π in modo che il risultato appartenga all'intervallo principale.

- $7\pi/4 \in [0, 2\pi[$, quindi è la misura principale di un angolo;
- $-\pi/3 \notin [0, 2\pi[$, sommiamo 2π, il risultato $5\pi/3$ appartiene all'intervallo principale, quindi è la misura richiesta;
- $12\pi/5 \notin [0, 2\pi[$, ...
- $13\pi/3 \notin [0, 2\pi[$, ...
- $10 \notin [0, 2\pi[$, ...



L'operazione di potenza in $\mathcal{R}$

Con il simbolo x^n (potenza con esponente intero positivo) si intende:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ \cdots \ x}_{n\ volte}$$

Radice n-esima di un numero reale

Per ogni intero n, per la completezza di $\mathcal{R}$, si ha:

$$\forall\, y \in \ [0, +\infty) \quad \exists\, !x \in \ [0, +\infty) \ : x^n = y.$$

Tale numero x si chiama radice n-esima di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$, da cui l'equivalenza:

$$x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x, \ \ \forall\, x, y \in \ [0, +\infty).$$

Si ha, per n:

- pari:

$$(-x)^n = x^n \geq 0$$

da cui:

$$\forall\, y \in [0, +\infty) \quad \exists\, ! x \in (-\infty, 0] \; : x^n = y$$
$$\forall\, y \in (-\infty, 0[\quad \nexists\, x \in \mathcal{R} \; : x^n = y$$

- dispari:

$$(-x)^n = -x^n$$

da cui

$$\forall\, y \in (-\infty, 0[\quad \exists\, ! x \in (-\infty, 0[\, : x^n = y.$$

Tale numero x si chiama ancora radice n-esima di y e si indica sempre con $\sqrt[n]{y}$, da cui l'equivalenza analoga alla precedente:

$$x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x, \quad \forall\, x, y \in (-\infty, 0[.$$

Risulta:

$$\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{-y}, \quad y \in (-\infty, 0]$$

Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:
a) $x^3 = 8$; b) $x^5 = -1$; c) $x^5 = 3$; d) $x^2 = 9$;
e) $x^4 = 5$; f) $x^4 = -7$.

$\Downarrow$

- $\exists\,!x : x^3 = 8 \Rightarrow \; x = \sqrt[3]{8} = 2$.
- $\exists\,!x : x^5 = -1 \Rightarrow \; x = \sqrt[5]{-1} = -1$.
- $\exists\,!x : x^5 = 3 \Rightarrow \; x = \sqrt[5]{3}$. Al simbolo $\sqrt[5]{3}$ è possibile dare solo un valore approssimato che può essere ottenuto con una calcolatrice, es. $\sqrt[5]{3} \simeq 1.2457$.
- Esistono due valori opposti nei quali la potenza assume il valore assegnato.
  Il valore positivo x_1 si ottiene valutando la radice quadrata: $x_1 = \sqrt{9} = 3$, quello negativo sarà allora $x_2 = -3$.
- Esistono due valori opposti nei quali la potenza assume il valore assegnato.
  Il valore positivo x_1 si ottiene valutando la radice quadrata: $x_1 = \sqrt[4]{5}$, quello negativo sarà allora $x_2 = -\sqrt[4]{5}$.
  Al simbolo $\sqrt[4]{5}$ è possibile dare solo un valore approssimato, es. $\sqrt[4]{5} \simeq 1.4953$.

- La potenza pari assume solo valori positivi o, tutt'al più nulli, quindi non esiste nessun valore reale che soddisfa l'eguaglianza.

— . . . —

Per l'operazione di potenza e di radice valgono numerose relazioni e proprietà:

- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c, \quad (a^b)^c = a^{bc} \neq a^{(b^c)};$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad a, b \geq 0, n, m \in \mathcal{N};$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a \geq 0, m, n \in \mathcal{N};$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0.$

Operazione di potenza ad esponente reale

Diamo un senso al simbolo $a^{\sqrt{2}}$ con $a > 0$.

Sia $\mathbf{A}$ l'insieme formato con i numeri ottenuti elevando a ad esponenti razionali minori di $\sqrt{2}$:

$$a^{1.4} = a^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{a^{14}}, a^{1.41} = a^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{a^{141}}, a^{1.414} = a^{\frac{1414}{1000}} =$$

Sia $\mathbf{B}$ l'insieme formato con i numeri ottenuti elevando a ad esponenti razionali maggiori di $\sqrt{2}$:

$$a^{1.5} = a^{\frac{15}{10}} = \sqrt[10]{a^{15}}, a^{1.42} = a^{\frac{142}{100}} = \sqrt[100]{a^{142}}, a^{1.415} = a^{\frac{1415}{1000}} =$$

$$\Downarrow$$

Si dimostra che questi due insiemi di numeri sono tali che l'estremo superiore di $\mathbf{A}$ coincide con l'estremo inferiore di $\mathbf{B}$; orbene questo valore si chiama $a^{\sqrt{2}}$:

$$\sup \mathbf{A} = \inf \mathbf{B} = a^{\sqrt{2}}.$$

In questo modo si definisce il simbolo a^b con $a > 0$ e b reale arbitrario.

Logaritmo di un numero reale

Per la completezza di $\mathcal{R}$, per ogni valore positivo a, si ha:

$$\forall\, y \in]0, +\infty) \quad \exists\, ! x \in \mathcal{R} \ : a^x = y.$$

Tale numero x è chiamato il logaritmo di y in base a e si indica con $\log_a y$, da cui l'equivalenza:

$$a^x = y \iff \log_a y = x, \ \forall\, x \in \mathcal{R}, \ y \in]0, +\infty).$$

Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:

a) $3^x = 9$; b) $10^x = 3$; c) $5^x = -1$; d) $\log_{10} x = 1$; e) $\log_{10} x = -1$; f) $\log_3 x = 2$.

$\Downarrow$

- $\exists\, ! x : 3^x = 9 \Rightarrow \ x = \log_3 9 = 2.$
- $\exists\, ! x : 10^x = 3 \Rightarrow \ x = \log_{10} 3 = \log_{10} 3.$
  Al simbolo $\log_{10} 3$ è possibile dare solo un valore approssimato, es. $\log_{10} 3 \simeq 0.4771.$
- La potenza con esponente reale fornisce solo numeri positivi, pertanto non esistono valori che verificano l'eguaglianza.

- $\exists\, !x : \log_{10} x = 1 \Rightarrow\ x = 10^1 = 10.$
- $\exists\, !x : \log_{10} x = -1 \Rightarrow\ x = 10^{-1} = 0.1.$
- $\exists\, !x : \log_3 x = 2 \Rightarrow\ x = 3^2 = 9.$

Per l'operazione di logaritmo valgono numerose relazioni e proprietà, in particolare, si ha:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(cb);\ \ \log_a b - \log_a c = \log_a(c/b)$ con $a, b, c > 0$;
- $b \log_a c = \log_a(c^b)$, con $a, b, c > 0$;
- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;\ \ a^c = b^{c \log_b a}$.

Calcolare $\log_2 5$.

$\Downarrow$

$$\log_2 5 = \begin{cases} \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{0.69897}{0.30103} \simeq 2.3219, \\ \\ \dfrac{\log 5}{\log 2} \simeq \dfrac{1.60943}{0.69315} \simeq 2.3219, \end{cases}$$

Calcolare $3^{\sqrt{2}}$ senza utilizzare il tasto funzionale x^y eventualmente presente nella propria calcolatrice.

$$3^{\sqrt{2}} = \begin{cases} 10^{\sqrt{2}\log_{10} 3} \simeq 10^{1.4142\times 0.47712} \simeq 4.7287, \\ e^{\sqrt{2}\log 3} \simeq e^{1.4142\times 1.09861} \simeq 4.7287. \end{cases}$$