Studio di funzione

Salvatore Scognamiglio

Università degli studi di Napoli “Parthenope”

Quesito

Studiare la seguente funzione (max 6 punti):

$$f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right).$$

In particolare:

- determinare il campo di esistenza (max 2 punti);
- determinare il comportamento agli estremi del campo di esistenza (max 2 punti);
- studiare la monotonia (max 1 punto);
- disegnare il grafico della funzione (max 1 punto).

Campo di esistenza

$$E[f(x)] = \{x \in \mathcal{R} : \frac{x-3}{x+4} > 0.\}$$

L'insieme dei valori x che soddisfano la condizione

$$\frac{x-3}{x+4} > 0$$

è dato dall'unione delle soluzioni dei due sistemi di equazioni

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x+4>0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x-3<0 \\ x+4<0 \end{cases} \quad .$$

Le soluzioni sono rispettivamente $]3, +\infty[$ e $]-\infty, -4[$ e quindi il campo di esistenza della funzione è

$$(x < -4) \cup (x > 3) =]-\infty - 4[\cup]3, +\infty[.$$

Comportamento agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \log\ 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \log\ 1 = 0,$$

la retta di equazione $y = 0$ rappresenta un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \to -4^-} \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \log\left(\frac{-7}{0^-}\right) = \log(+\infty) = +\infty,$$

la retta di equazione $x = -4$ rappresenta un asintono verticale.

$$\lim_{x \to 3^+} \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \log\left(\frac{0^+}{7}\right) = \log(0^+) = -\infty,$$

la retta di equazione $x = 3$ rappresenta un asintono verticale.

Monotonia

Lo studio della monotonia della funzione può essere effettuato analizzando il segno della legge della derivata prima.
In generale, si considera f una funzione definita in X e $x_0 \in X$. Se f è dotata di derivata prima in x_0 allora

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente in x_0;
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ strettamente decrescente in x_0;
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ nulla si può dire sul comportamento della funzione.

Monotonia

Data la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+4}\right),$$

la legge della derivata prima risulta

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-3}{x+4}} \cdot \frac{x+4-x+3}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{7}{(x+4)^2} = \frac{7}{(x-3)(x+4)}.$$

Visto che

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{(x-3)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) > 0,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[,$$

la funzione risulta strettamente crescente in ogni punto del campo di esistenza.

Grafico della funzione

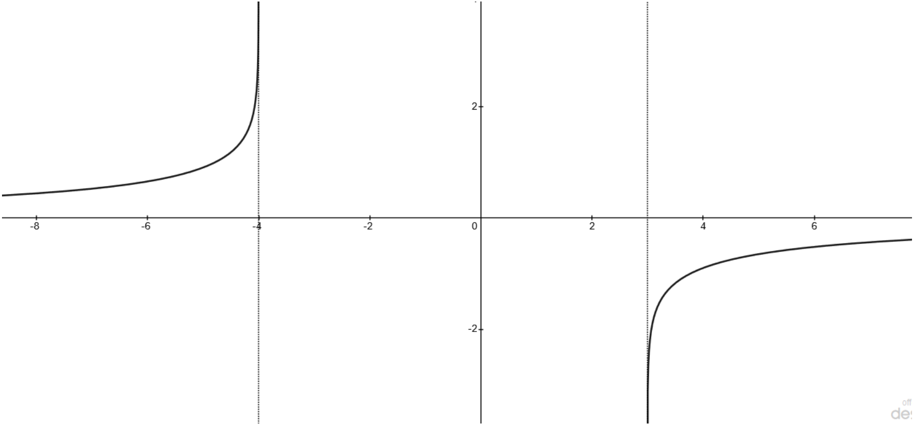

Figure: Grafico della funzione.