Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Integrazione di funzioni razionali

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Integrazione di funzioni razionali

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, ovvero

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \ ,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots b_m x^m \ .$$

a. $P(x)$ ha grado 0, $Q(x)$ ha grado 1 (nella prima capsula)

b. $P(x)$ ha grado 0, $Q(x)$ ha grado 2 (nella prima capsula)

c. $P(x)$ ha grado 1, $Q(x)$ ha grado 2 (nella prima capsula)

d. $P(x)$ ha grado $n \geq 2$, $Q(x)$ ha grado 2

e. qualche esempio in cui $Q(x)$ ha grado $m \geq 2$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Dobbiamo dividere il numeratore per il denominatore:

$$2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = q(x)(x^2 - 2x - 3) + r(x)$$

dove $q(x)$ e $r(x)$ sono polinomi da determinare (rispettivamente di grado $3-2$ e grado minore di 2).
In tal modo, l'integrale diventa

$$\int \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{q(x)(x^2 - 2x - 3) + r(x)}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$= \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{x^2 - 2x - 3} dx$$

e sappiamo già calcolare questi due integrali.

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline & \\ & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline & \\ & 2x \end{array}$$

divido:

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline & \\ \text{moltiplico:} \quad 2x^3 - 4x^2 - 6x & 2x \\ & \end{array}$$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{ll|l} & 2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline & & \\ \text{sottraggo:} & 2x^3 - 4x^2 - 6x & 2x \\ \hline & -x^2 + 3x + 2 & \end{array}$$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3-5x^2-3x+2}{x^2-2x-3}\,dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-3x+2 & x^2-2x-3 \\ \hline \end{array}$$

divido: $\quad 2x^3-4x^2-6x \quad\quad 2x-1$

$$-x^2+3x+2$$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2}
 & \\
2x^3 - 4x^2 - 6x & 2x - 1 \\ \hline
 & \\
-x^2 + 3x + 2 & \\
-x^2 + 2x + 3 &
\end{array}$$

moltiplico:

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 - 6x \phantom{{}+2} & 2x - 1 \\ \hline -x^2 + 3x + 2 & \\ -x^2 + 2x + 3 & \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

sottraggo:

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

Per trovare $q(x)$ e $r(x)$ dobbiamo dividere:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2}
 & \\
2x^3 - 4x^2 - 6x & 2x - 1 \\ \hline
 & \\
\text{sottraggo:} \quad -x^2 + 3x + 2 & \\
-x^2 + 2x + 3 & \\ \hline
 & \\
x - 1 &
\end{array}$$

Così $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \int (2x - 1)\, dx + \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}\, dx$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$$

Per calcolare l'ultimo integrale, osservo che (Esempio c.1) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ è riducibile, dunque uso i fratti semplici:

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

$$x - 1 = a(x+1) + b(x-3) = (a+b)x + a - 3b$$

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ -1 = a - 3b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 - a \\ -1 = 4a - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

Esempio (d.1 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int (2x - 1)\,dx + \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\
&= \int (2x - 1)\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x - 3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x + 1}\,dx \\
&= x^2 - x + \frac{1}{2}\log|x - 3| + \frac{1}{2}\log|x + 1| + c \\
&= x^2 - x + \log\sqrt{|x^2 - 2x - 3|} + c
\end{aligned}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \;\; 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline & \\ & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \ \ 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline & \\ & x^2 \\ & \end{array}$$

divido:

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \ \ 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline \text{moltiplico:} \quad x^4 - 4x^3 + 5x^2 & x^2 \end{array}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \;\; 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{3-3}
 & & \\
\text{sottraggo:} & x^4 - 4x^3 + 5x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 \\ \cline{2-2}
 & & \\
 & -2x^2 + 8x + \;\; 0 &
\end{array}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5}\, dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \ \ 0 & x^2 - 4x + 5 \\
\hline
\text{divido:} \quad x^4 - 4x^3 + 5x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2 \\
\hline
-2x^2 + 8x + \ \ 0 &
\end{array}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

moltiplico:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + \ \ 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline
x^4 - 4x^3 + 5x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2 \\ \hline
-2x^2 + 8x + \ \ 0 & \\
-2x^2 + 8x - 10 &
\end{array}$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x + 0 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline x^4 - 4x^3 + 5x^2 & x^2 - 2 \\ \hline -2x^2 + 8x + 0 & \\ -2x^2 + 8x - 10 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

sottraggo:

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx = \int (x^2 - 2) dx + \int \frac{10}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Esempio (d.2 grado $n \geq 2$ su grado 2)

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Come nell'esempio precedente, iniziamo con la divisione:
Abbiamo già visto (Esempio b.2) che

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

è irriducibile, dunque:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 5} dx &= \int (x^2 - 2) dx + \int \frac{10}{x^2 - 4x + 5} dx \\
&= \int (x^2 - 2) dx + 10 \int \frac{1}{(x-2)^2 + 1} dx \\
&= \frac{x^3}{3} - 2x + 10 \arctan(x-2) + c
\end{aligned}$$

Esempio (e. denominatore di grado $m > 2$)

$$\int \frac{x+2}{x^4-1} dx$$

Cerchiamo di fattorizzare il denominatore:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

e di scomporre l'integrando in fratti più semplici:

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

N.B.: abbiamo scelto come numeratori polinomi di grado inferiore ai denominatori!

Esempio (e. denominatore di grado $m > 2$)

$$\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} x+2 = & a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) \\ & + (c+dx)(x-1)(x+1) \\ = & a(x^3+x^2+x+1) + b(x^3-x^2+x-1) \\ & + c(x^2-1) + d(x^3-x) = \\ & = (a+b+d)x^3 + (a-b+c)x^2 \\ & + (a+b-d)x + a - b - c \end{aligned}$$

Esempio (e. denominatore di grado $m > 2$)

$$\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} x+2 = & (a+b+d)x^3 + (a-b+c)x^2 \\ & + (a+b-d)x + a - b - c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ a-b+c=0 \\ a+b-d=1 \\ a-b-c=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-d \\ a-b=-c \\ -2d=1 \\ -2c=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=(-d-c)/2=3/4 \\ b=(-d+c)/2=-1/4 \\ d=-1/2 \\ c=-1 \end{cases}$$

Esempio (e. denominatore di grado $m>2$)

$$\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

In conclusione $$\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx =$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \arctan x - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \mathrm{c} =$$

$$\log \sqrt[4]{|(x-1)^3/(x+1)(x^2+1)|} - \arctan x + \mathrm{c}$$