Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Integrazione di funzioni razionali - 1 parte

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Integrazione di funzioni razionali

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, ovvero

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \ ,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots b_m x^m \ .$$

a. $P(x)$ ha grado 0, $Q(x)$ ha grado 1

b. $P(x)$ ha grado 0, $Q(x)$ ha grado 2

c. $P(x)$ ha grado 1, $Q(x)$ ha grado 2

d. $P(x)$ ha grado $n \geq 2$, $Q(x)$ ha grado 2 (nella seconda capsula)

Esempio (a. grado zero su grado 1)

$$\int \frac{1}{1+2x}\,dx$$

Questo integrale è di tipo logaritmico si calcola con una semplice sostituzione.

$$y = 1+2x, \quad \text{quindi} \quad dy = 2dx$$

$$\int \frac{1}{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2x}\,2dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=1+2x}$$

$$= \frac{1}{2}\log|y|\Big|_{y=1+2x} + c = \frac{1}{2}\log|1+2x| + c$$

Esempio (a. grado zero su grado 1)

$$\int \frac{1}{1+2x}dx$$

Da questo esempio traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y}dy\Big|_{y=ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c}$$

Esempio (b.1 grado 0 su grado 2)

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$$

Ora il polinomio a denominatore è riducibile, cioè ha radici reali distinte. Infatti

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = 3, -1$$
$$x^2-2x-3 = (x-3)(x+1).$$

Per calcolare questo integrale, utilizziamo il metodo dei fratti semplici, ovvero cerchiamo di scrivere

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

dove a a b sono costanti da determinare.

Metodo dei fratti semplici

Determiniamo le costanti a a b in modo che

$$\boxed{\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}}$$

In tal modo, l'integrale si riduce alla somma di due integrali di tipo logaritmico di facile calcolo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx &= \int \left(\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}\right) dx \\ &= a\int \frac{1}{x-3}dx + b\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= a\log|y|\Big|_{y=x-3} + b\log|t|\Big|_{t=x+1} + \mathrm{c} \\ &= a\log|x-3| + b\log|x+1| + \mathrm{c}\end{aligned}$$

Metodo dei fratti semplici

Determiniamo le costanti a a b in modo che

$$\boxed{\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}}$$

Per determinare a a b, calcoliamo

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-3b}{x^2-2x-3}$$

e imponiamo che questa quantità sia uguale all'integrando

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{0\cdot x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-a \\ 4a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-1/4 \\ a=1/4 \end{cases}$$

Esempio (b.2 grado 0 su grado 2)

$$\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$$

Ora il polinomio a denominatore è irriducibile, cioè non ha radici reali. Infatti

$$x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i.$$

Per calcolare questo integrale, utilizziamo il metodo della somma di quadrati, ovvero cerchiamo di scrivere

$$x^2-4x+5 = (ax+b)^2 + c^2$$

dove a, b e c sono costanti da determinare.

Metodo della somma di quadrati

Determiniamo le costanti a, b, c in modo che

$$\boxed{x^2 - 4x + 5 = (ax + b)^2 + c^2}$$

Si può calcolare l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\,dx = \int \frac{1}{(ax+b)^2 + c^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{(\frac{ax+b}{c})^2 + 1}\,dx = \frac{1}{ac}\int \frac{1}{(\frac{ax+b}{c})^2 + 1}\,\frac{a}{c}\,dx$$

$$= \frac{1}{ac}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=\frac{ax+b}{c}} = \frac{1}{ac}\arctan\frac{ax+b}{c} + \mathrm{c}$$

Metodo della somma di quadrati

Determiniamo le costanti a, b, c in modo che

$$\boxed{x^2 - 4x + 5 = (ax + b)^2 + c^2}$$

Per trovare a, b e c, imponiamo:

$$x^2 - 4x + 5 = a^2x^2 + 2abx + b^2 + c^2$$

da cui

$$\begin{cases} 1 = a^2 \\ -4 = 2ab \\ 5 = b^2 + c^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-4}{2a} = -2 \\ c^2 = 5 - b^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Esempio (b.3 grado 0 su grado 2)

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$$

Osserviamo innanzitutto che il polinomio a denominatore è un quadrato perfetto, cioè $x^2+2x+1=(x+1)^2$.
Ponendo $y=x+1$ si ha $dy=dx$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy\Big|_{y=x+1} \\
&= \int y^{-2}\,dy\Big|_{y=x+1} = -y^{-1}\Big|_{y=x+1} + c \\
&= -\frac{1}{x+1} + c
\end{aligned}$$

Esempio (c.1 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2-2x-3}dx$$

Come nell'Esempio b.1, il denominatore è riducibile:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1).$$

Si può ancora usare il metodo dei fratti semplici, cioè cercare a a b in modo che

$$\frac{2x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

e l'integrale si calcola come nell'Esempio b.1.

Esempio (c.1 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2-2x-3}\,dx$$

Come nell'Esempio b.1, il denominatore è riducibile:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1).$$

Si può ancora usare il metodo dei fratti semplici

$$\frac{2x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

Per determinare a a b, imponiamo

$$2x=a(x+1)+b(x-3)=(a+b)x+a-3b$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-3b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4b=2 \\ a=3b \end{cases} \qquad \begin{cases} b=1/2 \\ a=3/2 \end{cases}$$

Esempio (c.2 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2-4x+5}dx$$

Come nell'Esempio b.2 il denominatore è irriducibile.
Cerchiamo allora di scomporre l'integrando così:

$$2x = a(x^2-4x+5)' + b.$$

In tal modo avremo

$$\int \frac{2x}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{a(x^2-4x+5)' + b}{x^2-4x+5}dx$$
$$= a\int \frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}dx + b\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx$$

Sappiamo già calcolare questi due integrali (il primo è di tipo logaritmico, il secondo come nell'Esempio b.2).

Esempio (c.2 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2-4x+5}\,dx$$

Come nell'Esempio b.2 il denominatore è irriducibile.
Cerchiamo allora di scomporre l'integrando così:

$$2x = a(x^2-4x+5)' + b.$$

Per determinare le costanti a a b, dobbiamo calcolare

$$(x^2-4x+5)' = 2x-4,$$

e poi dividere $2x$ per $2x-4$. Si vede subito che

$$2x = 1\,(2x-4) + 4.$$

Esempio (c.3 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx$$

Come nell'Esempio b.3, il denominatore è un quadrato perfetto, cioè $x^2+2x+1=(x+1)^2$.
Cerchiamo allora di scrivere

$$2x = a(x+1)+b$$

dove a a b sono costanti da determinare.
In tal modo, possiamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$a\int \frac{1}{x+1}\,dx + b\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = a\log|x+1| - \frac{b}{x+1} + c$$

Esempio (c.3 grado 1 su grado 2)

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\,dx$$

Come nell'Esempio b.3, il denominatore è un quadrato perfetto, cioè $x^2+2x+1=(x+1)^2$.
Cerchiamo allora di scrivere

$$2x = a(x+1)+b$$

dove a a b sono costanti da determinare.
Per determinare a a b, dobbiamo dividere $2x$ per $x+1$.
Si vede subito che

$$2x = 2(x+1)-2.$$