Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Integrazione per sostituzione

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Teorema (Integrale per sostituzione - int. indef.)

Siano $f(x)$ una funzione integrabile e $\phi(x)$ una funzione derivabile e strettamente monotona su uno stesso intervallo. Allora

$$\int f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)} \qquad \text{(IXS)}$$

Cosa significa questa formula?
Se indichiamo con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, la formula IXS afferma che
la funzione $F\left(\phi(x)\right)$ è una primitiva di $f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)$.

Teorema (Integrale per sostituzione - int. indef.)

Siano $f(x)$ una funzione integrabile e $\phi(x)$ una funzione derivabile e strettamente monotona su uno stesso intervallo. Allora

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)} \qquad \text{(IXS)}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ (cioè $F' = f$). Basta verificare che

$$(F(\phi(x)))' = f(\phi(x))\,\phi'(x).$$

Ma questo è certo per la regola di derivazione della funzione composta:

$$(F(\phi(x)))' = F'(\phi(x))\,\phi'(x) = f(\phi(x))\,\phi'(x) \qquad \blacksquare$$

Teorema (Integrale per sostituzione - int. indef.)

Siano $f(x)$ *una funzione integrabile e* $\phi(x)$ *una funzione derivabile e strettamente monotona su uno stesso intervallo. Allora*

$$\int f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)} \qquad (IXS)$$

Teorema (Integrale per sostituzione - int. def.)

Siano $f(x)$ *una funzione integrabile e* $\phi(x)$ *una funzione derivabile e strettamente monotona su* (a,b)*. Allora*

$$\int_a^b f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy \qquad (IXS)$$

Esempio (1)

$$\int 2x \sin(x^2)\, dx$$

La funzione $\sin$ è composta con x^2. Effettuando la sostituzione $\phi(x) = x^2$, si ha $\phi'(x) = 2x$.
Dunque la formula IXS afferma che

$$\int 2x \sin(x^2)\, dx = \int \sin y\, dy \Big|_{y=x^2}$$

$$= -\cos y \Big|_{y=x^2} + c = -\cos(x^2) + c.$$

Esempio (2)

$$\int \cos x \sin^2 x \, dx$$

La funzione y^2 è composta con $\sin x$. Effettuando la sostituzione $\phi(x) = \sin x$, si ha $\phi'(x) = \cos x$.
Dunque la formula IXS afferma che

$$\int \cos x \sin^2 x \, dx = \int y^2 \, dy \Big|_{y=\sin x}$$
$$= \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=\sin x} + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c.$$

Per ricordare la formula IXS, è utile fare un calcolo formale con le notazioni di Leibnitz

Regola mnemonica

Se $y = \phi(x)$, allora $\dfrac{dy}{dx} = \phi'(x)$. Moltiplicando entrambi i membri (formalmente) per dx si ottiene

$$dy = \phi'(x)\, dx$$

Esempio (3)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}\,dx$$

Facciamo la sostituzione

$$y = e^x, \text{ da cui } dy = (e^x)'dx = e^x dx.$$

Gli estremi di integrazione diventano

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1 \qquad x = 1 \Rightarrow y = e^1 = e.$$

Pertanto

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{3+y}}\,dy$$

Esempio (3)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}dx$$

$$\int_0^1 \frac{e}{\sqrt{3+x}}dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{3+y}}dy.$$

Facciamo una nuova sostituzione:

$$z = 3 + y, \text{ da cui } dz = (3+y)'dy = dy.$$

Gli estremi di integrazione diventano

$$y = 1 \Rightarrow z = 3 + 1 = 4 \qquad y = e \Rightarrow z = 3 + e.$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{\sqrt{3+y}}dy &= \int_4^{3+e} \frac{1}{\sqrt{z}}dz = \int_4^{3+e} z^{-\frac{1}{2}}dz \\ &= 2z^{\frac{1}{2}}\Big|_4^{3+e} = 2\left(\sqrt{3+e}-2\right)\end{aligned}$$

Esempio (3)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}dx$$

La sostituzione più opportuna è

$$y = 3 + e^x, \text{ da cui } dy = (3+e^x)'dx = e^x dx.$$

Gli estremi di integrazione diventano

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 + e^0 = 4 \qquad x = 1 \Rightarrow y = 3 + e.$$

Così

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}dx = \int_4^{3+e} \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int_4^{3+e} y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= 2y^{\frac{1}{2}}\Big|_4^{3+e} = 2\left(\sqrt{3+e} - 2\right)$$

Esempio (Traslazione)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)\,dx$$

Conviene effettuare la sostituzione

$$y = x + \pi \qquad dy = (x+\pi)'\,dx = dx.$$

Gli estremi di integrazione diventano

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Si ottiene così

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin y\,dy$$

da cui segue facilmente

$$= -\cos y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -(-1) + 0 = 1$$

Esempio (Traslazione)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)\,dx$$

Da questo esempio traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy}$$

Esempio (Dilatazione)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

Conviene effettuare la sostituzione

$$y = 2x \qquad dy = (2x)'\,dx = 2\,dx.$$

Gli estremi di integrazione diventano

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0 \qquad x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1.$$

Si ottiene così

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

da cui segue facilmente

$$= \frac{1}{2}\arctan y\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{8}$$

Esempio (Dilatazione)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

Da questo esempio traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int_a^b f(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(y)\,dy}$$

Esempio (Derivata logaritmica)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$$

Va osservato che il numeratore di questa frazione è esattamente la derivata del denominatore. Facciamo allora il cambiamento di variabile
$y = x^2+3x+1$, da cui $dy = (x^2+3x+1)'dx = (2x+3)dx$.
Si ottiene così

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=x^2+3x+1}$$

da cui segue facilmente

$$= \log|y|\Big|_{y=x^2+3x+1} = \log\left|x^2+3x+1\right| + c$$

Esempio (Derivata logaritmica)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$$

Da questo esempio traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\bigg|_{y=f(x)} = \log\left|f(x)\right| + c}$$

e, per l'integrale definito,

$$\boxed{\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{y}\,dy = \log\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|}$$

Calcoliamo l'integrale di una funzione elementare:

Esempio (Integrale della tangente)

$$\int \tan x \, dx = \log \frac{1}{|\cos x|} + c.$$

Poiché $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e $(\cos x)' = -\sin x$, possiamo scrivere

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \cos x, \text{ da cui } dy = -\sin x \, dx,$$

si ottiene

$$= -\int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\cos x} = -\log|\cos x| + c = \log \frac{1}{|\cos x|} + c$$

Esempio (Funzioni trigonometriche)

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \sin x, \text{ da cui } dy = \cos x \, dx$$

si ottiene

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int y^2 \, dy \Big|_{y=\sin x}$$

e dunque

$$= \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=\sin x} + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

Esempio (Funzioni trigonometriche)

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx$$

In generale

$$\boxed{\int f(\sin x) \cos x \, dx = \int f(y) \, dy \Big|_{y=\sin x}}$$

e analogamente

$$\boxed{\int f(\cos x) \sin x \, dx = -\int f(y) \, dy \Big|_{y=\cos x}}$$

Esempio (Funzioni del logaritmo)

$$\int_1^e \frac{2+\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx$$

Effettuiamo la sostituzione

$$y = \log x, \text{ da cui } dy = \frac{1}{x}dx.$$

Gli estremi di integrazione cambiano secondo

$$x = 1 \Rightarrow y = \log 1 = 0 \qquad x = e \Rightarrow y = \log e = 1.$$

Si ottiene

$$\int_1^e \frac{2+\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx = \int_0^1 \left(2+\sqrt[3]{y}\right)dy = 2\int_0^1 dy + \int_0^1 y^{\frac{1}{3}}\,dy$$

$$= 2y + \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = 2 + \frac{3}{4} - 0 = \frac{11}{4}$$

Esempio (Funzioni del logaritmo)

$$\int_1^e \frac{2+\sqrt[3]{\log x}}{x}\,dx$$

In generale

$$\boxed{\int \frac{f(\log x)}{x}\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\log x}}$$