Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Integrazione per parti

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Teorema (Formula di integrazione per parti - int. indef.)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili e derivabili su uno stesso intervallo. Allora

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (IXP)$$

Teorema (Formula di integrazione per parti - int. indef.)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili e derivabili su uno stesso intervallo. Allora

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{(IXP)}$$

Dimostrazione. La formula è equivalente a

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx + \int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x),$$

cioè $$\int \left[f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x) \right] dx = f(x)\, g(x).$$

Questo significa che $f\, g$ è una primitiva di $f\, g' + f'\, g$, che è senz'altro vero per la regola di derivazione del prodotto, infatti

$$\big(f(x)\, g(x)\big)' = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x).$$

■

Teorema (Formula di integrazione per parti - int. indef.)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili e derivabili su uno stesso intervallo. Allora

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (IXP)$$

Si deduce la versione per l'integrale definito:

Teorema (Formula di integrazione per parti - int. def.)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili e derivabili su uno stesso intervallo (a,b). Allora

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)'\,g(x)\,dx \quad (IXP)$$

Esempio (1)

$$\int x \sin x \, dx$$

Possiamo usare la formula IXP in due modi diversi

- leggendo $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$,
- leggendo $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = x$.

Esempio (1)

$$\int x \sin x \, dx$$

Proviamo a seguire la prima idea:

$f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx\end{aligned}$$

In questo modo la formula risulta efficace, perché il nuovo integrale da calcolare è immediato:

$$= -x \cos x + \sin x + \mathrm{c}.$$

Esempio (1)

$$\int x \sin x \, dx$$

Seguiamo ora l'altro percorso:

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = x$, $g(x) = x^2/2$.

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx$$

e la formula è inefficace, perché il nuovo integrale da calcolare è più complicato di quello di partenza.

Talvolta risulta utile iterare la formula di IXP.

Esempio (2)

$$\int (1+x^2)\, e^x\, dx$$

Utilizziamo la formula IXP con

$f(x) = 1 + x^2$, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$.

$$\int (1+x^2)\, e^x\, dx = (1+x^2)e^x - \int 2xe^x\, dx.$$

Il nuovo integrale non è immediato, ma è più semplice di quello di partenza, e possiamo di nuovo calcolarlo con IXP.

Ponendo

$$f(x) = x, \; f'(x) = 1, \; g'(x) = e^x, \; g(x) = e^x$$

si ha

$$\int x\,e^x\,dx = x e^x - \int 1 e^x\,dx = x\,e^x - e^x + \mathrm{c}.$$

Riassumendo abbiamo

$$\begin{aligned}\int (1+x^2)\,e^x\,dx &= (1+x^2)e^x - 2\int x\,e^x\,dx \\ &= (1+x^2)e^x - 2\left(x\,e^x - e^x\right) + \mathrm{c} \\ &= (x^2 - 2x + 3)e^x + \mathrm{c}.\end{aligned}$$

Questi due esempi ci illustrano che

Osservazione

Se l'integrando è dato dal prodotto fra un polinomio e una funzione di cui è nota la primitiva (ad eg, $\sin x, \cos x, e^x$), spesso è conveniente utilizzare la formula di IXP interpretando

- il polinomio come parte integrata ($f(x)$)
- l'altra funzione come parte integranda ($g'(x)$).

Attenzione, questa non è una regola universale!

Esempio (3)

$$\int x \log x \, dx$$

Qui non è possibile interpretare $\log x$ come parte integranda (non ne conosciamo una primitiva!), pertanto poniamo

$$g'(x) = x \quad g(x) = x^2/2 \quad f(x) = \log x \quad f'(x) = 1/x$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}
\int x \log x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + \text{c}.
\end{aligned}$$

Talvolta risulta utile "inventare" la parte integranda.

Esempio (4)

$$\int \log x \, dx$$

Qui non c'è esplicitamente un prodotto, ma possiamo interpretare

$$\log x = 1 \log x.$$

Utilizziamo la formula IXP con

$$f(x) = \log x \quad f'(x) = 1/x \quad g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$\int 1 \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int dx = x \log x - x + c.$$

Talvolta IXP permette di scrivere un'equazione.

Esempio (5)

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Utilizziamo la formula IXP con

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Valutiamo anche l'ultimo integrale con IXP

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Talvolta LaTeX permette di scrivere un'equazione.

Esempio (5)

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Fin qui

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x(\sin x + \cos x) + \int e^x \cos x dx$$

Portando entrambi gli integrali a primo membro abbiamo

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x(\sin x + \cos x),$$

infine $$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c.$$

Esercizio 1

Calcolare l'integrale definito $\int_1^e x \log^2 x \, dx$

IXP $f(x) = \log^2 x$ (da cui $f'(x) = (2\log x)/x$)
$g'(x) = x$ (da cui $g(x) = x^2/2$)

$$\int_1^e x \log^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \frac{2\log x}{x} \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \log x \, dx$$

Esercizio 1

Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^e x\log^2 x\,dx$

IXP $f(x) = \log^2 x$ (da cui $f'(x) = (2\log x)/x$)

$g'(x) = x$ (da cui $g(x) = x^2/2$)

$$\int_1^e x\log^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{2\log x}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\log x\,dx$$

L'ultimo integrale (indefinito) è calcolato in Es. (3)

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - 0 + 0 - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin^2 x \, dx$

Interpretiamo $\sin^2 x = \sin x \sin x$ e usiamo IXP con

$$f(x) = \sin x \qquad \text{(da cui } f'(x) = \cos x\text{)}$$
$$g'(x) = \sin x \qquad \text{(da cui } g(x) = -\cos x\text{)}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin^2 x \, dx$

Interpretiamo $\sin^2 x = \sin x \sin x$ e usiamo IXP con

$$f(x) = \sin x \quad \text{(da cui } f'(x) = \cos x\text{)}$$
$$g'(x) = \sin x \quad \text{(da cui } g(x) = -\cos x\text{)}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

e dato che $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ si ottiene

$$= -\cos x \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx$$

$$= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin^2 x \, dx$

Abbiamo così ricavato

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

da cui

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x + \mathrm{c}.$$

e infine

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(-\cos x \sin x + x) + \mathrm{c}.$$