Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Altri esercizi sugli integrali

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Esercizio 1

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, si ottiene

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=x^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx$

In questo caso non è possibile effettuare sostituzioni. Cerchiamo allora di fattorizzare il denominatore:

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

e di scomporre l'integrando in fratti più semplici:

$$\frac{x+2}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c+dx}{x^2+1}.$$

N.B.: abbiamo scelto come numeratori polinomi di grado inferiore ai denominatori!

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x+2}{x^4-1}dx$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
x+2 =& a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) \\
&+ (c+dx)(x-1)(x+1) \\
=& a(x^3+x^2+x+1) + b(x^3-x^2+x-1) \\
&+ c(x^2-1) + d(x^3-x) = \\
&= (a+b+d)x^3 + (a-b+c)x^2 \\
&+ (a+b-d)x + a-b-c
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x+2}{x^4-1} dx$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} x+2 =& (a+b+d)x^3 + (a-b+c)x^2 \\ &+ (a+b-d)x + a-b-c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ a-b+c=0 \\ a+b-d=1 \\ a-b-c=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-d \\ a-b=-c \\ -2d=1 \\ -2c=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=(-d-c)/2=3/4 \\ b=(-d+c)/2=-1/4 \\ d=-1/2 \\ c=-1 \end{cases}$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x+2}{x^4-1} dx$

$$\frac{x+2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c+dx}{x^2+1}.$$

In conclusione $\int \frac{x+2}{x^4-1} dx =$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \arctan x - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \mathrm{c} =$$

$$\log \sqrt[4]{|(x-1)^3/(x+1)(x^2+1)|} - \arctan x + \mathrm{c}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx$

Iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+5x+0 & x^2+2x+1 \\ \hline & \\ & 3 \\ & \end{array}$$

divido:

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx$

Iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+5x+0 & x^2+2x+1 \\ \hline & \\ 3x^2+6x+3 & 3 \\ & \end{array}$$

moltiplico:

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx$

Iniziamo con la divisione:

$$\begin{array}{rr|l} & 3x^2+5x+0 & x^2+2x+1 \\ \cline{3-3} \text{sottraggo:} & 3x^2+6x+3 & 3 \\ \cline{2-2} & -x-3 & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx = \int 3dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+1}dx$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}\,dx$

Iniziamo con la divisione:

$$\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}\,dx = \int 3\,dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+1}\,dx$$

Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che il denominatore è un quadrato perfetto:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

Dividiamo allora $x+3$ per $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+1 \\ \hline x+1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx$

Infine

$$\int \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}dx = \int 3dx - \int \frac{x+3}{(x+1)^2}dx$$

$$= \int 3dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{2}{(x+1)^2}dx$$

$$= 3x - \log|x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$

Valutiamo dapprima l'integrale indefinito.

Interpretiamo l'integrando come un prodotto

$$1 \cdot \arcsin x$$

e integriamo per parti:

$$f(x) = \arcsin x \quad (\text{da cui } f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2})$$

$$g'(x) = 1 \quad (\text{da cui } g(x) = x)$$

$$\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$

Valutiamo dapprima l'integrale indefinito.

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Per valutare il secondo integrale, facciamo la sostituzione $y = 1 - x^2$ da cui $dy = -2x dx$:

$$-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \Big|_{y=1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \Big|_{y=1-x^2} = y^{\frac{1}{2}} \Big|_{y=1-x^2} + c$$

$$= \sqrt{1-x^2} + c$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$

Riassumendo

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx = & \quad x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ = & \quad x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \text{c}. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx = & \quad x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ = & \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \left(0 + \sqrt{1}\right) \\ = & \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$