Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Esercizi sugli integrali

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Esercizio 1

Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito per parti:

$f(x) = x^2 - x + 1$ (da cui $f'(x) = 2x - 1$)

$g'(x) = e^x$ (da cui $g(x) = e^x$)

$$\int (x^2 - x + 1)e^x dx = (x^2 - x + 1)e^x - \int (2x - 1)e^x dx.$$

Esercizio 1

Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito per parti:

$$\int (x^2 - x + 1)e^x dx = (x^2 - x + 1)e^x - \int (2x - 1)e^x dx.$$

Anche l'ultimo integrale può essere calcolato per parti

$f(x) = 2x - 1$ (da cui $f'(x) = 2$)

$g'(x) = e^x$ (da cui $g(x) = e^x$)

$$\int (2x - 1)e^x dx = (2x - 1)e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x - 1)e^x - 2e^x + c = (2x - 3)e^x + c.$$

Esercizio 1

Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito

$$\begin{aligned}\int (x^2 - x + 1)e^x dx &= (x^2 - x + 1)e^x - (2x - 3)e^x + \mathrm{c} \\ &= (x^2 - 3x + 4)e^x + \mathrm{c}.\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx &= (x^2 - 3x + 4)e^x\Big|_0^1 \\ &= (1 - 3 + 4)e - 4 = 2e - 4.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+9}$

Cominciamo ad osservare che $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Poniamo allora

$$y = x-3, \quad \text{da cui} \quad dy = dx$$

e gli estremi diventano

$$x=0 \Rightarrow y=0-3=-3 \qquad x=2 \Rightarrow y=2-3=-1.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int_{-3}^{-1} \frac{dy}{y^2} = \int_{-3}^{-1} y^{-2}dy$$

$$= -y^{-1}\Big|_{-3}^{-1} = -\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{e^x}{3-e^x}\,dx$

Usiamo IXS con

$$y = 3 - e^x, \quad \text{da cui} \quad dy = -e^x\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{3-e^x}\,dx = -\int \frac{-e^x}{3-e^x}\,dx = -\int \frac{dy}{y}\Bigg|_{y=3-e^x}$$

$$= -\log|y|\,\Big|_{y=3-e^x} + c = -\log\left|3-e^x\right| + c$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale indefinito $\int x^2 \log\left(1+x^3\right) dx$

Poniamo

$$y = 1 + x^3, \quad \text{da cui} \quad dy = 3x^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \log\left(1+x^3\right) dx &= \frac{1}{3} \int \log\left(1+x^3\right) 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \log y \, dy \Big|_{y=1+x^3} \end{aligned}$$

Questo integrale è stato calcolato mediante IXP - Esempio (4). Il risultato finale è

$$\frac{1+x^3}{3}\left(\log\left(1+x^3\right)-1\right)$$

Esercizio 5

Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

Poniamo

$$y = \sqrt{x}, \quad \text{da cui} \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad x = y^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{1}{1+x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{dy}{1+y^2}\bigg|_{y=\sqrt{x}}$$

$$= 2\arctan y\Big|_{y=\sqrt{x}} + c = 2\arctan\sqrt{x} + c$$

Esercizio 6

Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,dx$

Poniamo $y = 1+3\cos x$, da cui $dy = -3\sin x\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\Big|_{y=1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy\Big|_{y=1+3\cos x}$$

$$= -\frac{2}{3}y^{\frac{1}{2}}\Big|_{y=1+3\cos x} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{1+3\cos x} + c$$

Esercizio 7

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{1/2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Poniamo $y = 3x$, da cui $dy = 3dx$ e

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 = 0 \quad x = 1/2\sqrt{3} \Rightarrow y = 3/2\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$

$$\int_0^{1/2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \int_0^{1/2\sqrt{3}} \frac{3dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \arcsin y \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = \frac{\pi}{9}$$