ESERCITAZIONE 10: derivate - 1 parte

ESERCIZIO 1. Dopo aver individuato il dominio, calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando l'insieme di derivabilità. Classificare poi gli eventuali punti di non derivabilità (punti di non continuità, cuspidi, punti angolosi, punti a tangente verticale).

1.a) $x^3 - 2x^5 + 7x - 3$,	1.b) $\dfrac{x^2+x}{x-1}$,	1.c) $\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$,
1.d) $\dfrac{x^3-x+1}{x^2-5}$,	1.e) $\sqrt{x} - e^x + \cos x$,	1.f) $\cos(3x) - \sin(x^2)$,
1.g) $\sqrt{\lvert x+2\rvert}$,	1.h) $\sqrt[3]{1-x^3}$,	1.i) $\sqrt[3]{1-x^2}$,
1.j) $x\,\log(3x^2)$,	1.k) $\log\dfrac{x-3}{x+1}$,	1.l) $\dfrac{x-3}{x+1}\log x$,
1.m) e^{1-x^2},	1.n) $e^{\lvert x-1\rvert}$,	1.o) $\dfrac{x+1}{2-x}\,e^x$,
1.p) $(x+5)\,e^{3x^2}$,	1.q) 5^x,	1.r) $\log_2 x$,
1.s) $\cos\dfrac{x-\pi}{x}$,	1.t) $\arctan(x^2-1)$,	1.u) $\arcsin\sqrt{1+x^2}$,

ESERCIZIO 2. Determinare, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni, nei punti a fianco indicati

2.a) $\sin x$	nel punto di ascissa $x = \pi/3$,
2.b) $\dfrac{\sqrt{x^3+3}}{x}$	nel punto $x = 1$, $y = f(x) = 2$,
2.c) $\sqrt[5]{x}$	nel punto di ascissa $x = 0$,
2.d) $\sqrt{\lvert 4-x^2\rvert}$	nel punto di ascissa $x = 2$,
2.e) $\cos\log x$	nel punto di ascissa $x = e^{\pi/2}$,
2.f) e^{x^2}	nel punto di ascissa $x = -1$,
2.g) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$	nel punto di ascissa $x = 0$,
2.h) $e^{2x}(2\sin 3x - 4x)$	nel punto di ascissa $x = \dfrac{\pi}{2}$,
2.i) 2^{x^2+3x}	nel punto di ascissa $x = 0$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

3.a) $f(x)$ è continua sul suo dominio	☐ V	☐ F
3.b) $f(x)$ è derivabile su $[-1,1]$	☐ V	☐ F
3.c) $f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle su $[-1,1]$	☐ V	☐ F
3.d) $f(x)$ verifica le ipotesi del Teor. di Weierstrass su $[-1,1]$	☐ V	☐ F
3.e) $x = 1$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
3.f) $x = 1$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
3.g) il punto di massimo assoluto è stazionario	☐ V	☐ F
3.h) il punto di minimo assoluto è stazionario	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

4.a) $f(x)$ è crescente	☐ V	☐ F
4.b) $f(x)$ è crescente sull'intervallo $(0, \sqrt{2}-1)$	☐ V	☐ F
4.c) $f(x)$ è decrescente sull'intervallo $(\sqrt{2}-1, +\infty)$	☐ V	☐ F
4.d) $x = \sqrt{2}-1$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
4.e) $x = \sqrt{2}-1$ è un punto di massimo relativo	☐ V	☐ F
4.f) $x = \sqrt{2}-1$ è un punto di massimo assoluto	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 5. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

5.a) $f(x)$ è crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$	☐ V	☐ F
5.b) $f(x)$ è decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$	☐ V	☐ F
5.c) $x = -1/\sqrt[3]{2}$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
5.d) $x = -1/\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo relativo	☐ V	☐ F
5.e) $x = -1/\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
5.f) $x = 1$ è un punto a tangente verticale	☐ V	☐ F
5.g) $x = 1$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
5.h) $x = 1$ è un punto di minimo relativo	☐ V	☐ F
5.i) $x = 1$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
5.j) 0 è il minimo di $f(x)$	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 6. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + |x|$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

7.a) $f(x)$ è pari	☐ V	☐ F
7.b) $x = 0$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
7.c) $x = 0$ è un punto di minimo relativo	☐ V	☐ F
7.d) $x = 0$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
7.e) $f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema degli zeri nell'intervallo $[-2, 1]$	☐ V	☐ F
7.f) $f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

7.g) $x = 1$ è un punto di discontinuità	☐ V	☐ F
7.h) $x = 1$ è un punto angoloso	☐ V	☐ F
7.i) $x = -1$ è un punto angoloso	☐ V	☐ F
7.j) $x = 1$ è un punto di massimo assoluto	☐ V	☐ F
7.k) $x = -1$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
7.l) non ci sono punti stazionari	☐ V	☐ F
7.m) $f(x)$ è strettamente decrescente	☐ V	☐ F
7.n) per ogni $c > 0$, l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 8. Per ognuna delle seguenti funzioni, studiare l'andamento qualitativo precisando:

1) il dominio,
2) l'insieme di continuità, classificando gli eventuali punti di discontinuità e di prolungabilità,
3) il comportamento alle estremità del dominio, precisando la presenza di eventuali asintoti,
4) l'insieme di derivabilità, classificando gli eventuali punti di non derivabilità,
5) gli estremi locali (cioè massimi e minimi relativi) e gli intervalli di monotonia,
6) gli estremi globali (cioè estremo superiore e inferiore), rilevando gli eventuali massimi e minimi assoluti,
7) il grafico,
8) l'immagine.

8.a) $\dfrac{x}{x^2-3x+6}$, 8.b) $\dfrac{x^2}{x-4} - |x|$,

8.c) $\sqrt{1+x^2}$, 8.d) $\sqrt[3]{x(x-1)^2}$,

8.e) $\dfrac{x-1}{x}\, e^x$, 8.f) $|x|^x$,

ESERCIZIO 9. Per ognuna delle seguenti funzioni, determinare il dominio e l'insieme di derivabilità. Trovare poi i punti estremanti locali e globali e stabilire qual è l'immagine della funzione. Infine, tracciare un grafico qualitativo e discutere le equazioni $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ e $f(x) = -1$ (cioè stabilire se ammettono soluzioni e, in caso affermativo, precisare quante sono).

9.a) $x\, e^{-x^2}$, 9.b) $\dfrac{x^2}{x+1}$, 9.c) $\log x + |x^2-4|$, 9.d) $\log \dfrac{x}{x+3}$.